# Моделиране на марковски вериги с MS Excel

Георги Георгиев

***Markov Chains Modeling in MS Excel:*** *Final homogeneous discrete and continuous Markov chains are considered. Programming module, implemented with MS Excel is created on the ground of their analytic description. It models the behaviour of the Markov chains and calculates their state probabilities during the transitional processes and for stationary regimes. The results of modeling are presented in tables and in graphic form.*

***Key Words:*** *Markov Chains, Transition Probabilities, Transition Intensities, Transient Processes, Steady-State Probabilities, Modeling, MS Excel.*

## ВЪВЕДЕНИЕ

Функционирането на много обекти представлява последователност от преходи от едно състояние в друго. Когато преходите се извършват под въздействието на случайни фактори се казва, че в обекта протича случаен процес. Случайният процес се нарича марковски (или процес без последействие), ако бъдещото му развитие зависи единствено от текущото му положение и не зависи от предисторията на процеса. Когато множеството от състояния е дискретно и преходите между тях се извършват със скок (мигновено), то марковският случаен процес се нарича марковска верига. Когато броят на състоянията е ограничен, то веригата се нарича крайна.

Веригата е дискретна, когато преходите между състоянията са възможни само в строго определени, предварително фиксирани моменти от времето, наречени стъпки (или етапи) на процеса. В интервалите от време между тези моменти състоянието на процеса не се променя. Преходите между състоянията се извършват с т. н. преходни вероятности, които за хомогенна верига не зависят от номера на стъпката.

Веригата е непрекъсната, когато преходите между състоянията са възможни в произволни, неизвестни предварително моменти от времето. Преходите между състоянията се извършват с т. н. интензивности на преходите, които за хомогенна верига не зависят от времето.

Изследването на марковска верига може да се извърши чрез аналитичното й моделиране или чрез симулация на нейното поведение.

При аналитичното моделиране се използва такова формално описание на марковските вериги, което позволява явно решение на уравнения и системи от уравнения за определяне на вероятностите на състоянията им по време на преходни процеси и за стационарни режими. При това се използват и числени методи: метод на Гаус за решаване на системи от линейни алгебрични уравнения; метод на Рунге-Кута за решаване на системи от обикновени диференциални уравнения.

В настоящата работа се разглеждат крайни хомогенни марковски вериги по време на преходен процес и в стационарен режим. С използване на предварително указани формули е създаден програмен модул, реализиран с MS Excel и с помощта на Visual Basic for Applications (VBA). Чрез него се моделира поведението на марковските вериги и се пресмятат вероятностите на състоянията им по време на преходни процеси и за стационарни режими. Резултатите от моделирането се представят в табличен и в графичен вид.

Симулацията на марковски вериги ще бъде разгледана в отделна статия.

## МОДЕЛИРАНЕ НА ДИСКРЕТНИ МАРКОВСКИ ВЕРИГИ

Нека марковският случаен процес има краен брой състояния $S_1, S_2, \ldots, S_n$ и преходите между тях са възможни само в строго определени, предварително фиксирани моменти от времето $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots$. Процесът се разглежда като функция на целочислен аргумент, номера на стъпката $k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. $S(0)$ означава началното състояние на процеса (преди първата стъпка), а $S(k)$ означава състоянието на процеса непосредствено след $k$-тата стъпка.

Случайните събития $S(k) = S_j$ означават, че непосредствено след $k$-тата стъпка процесът се намира в състоянието $S_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. За вероятностите им $p_j(k) = P[S(k) = S_j]$ е в сила т. н. нормиращо условие $\sum_{j=1}^{n} p_j(k) = 1$.

Началното разпределение на вероятностите на състоянията (преди първата стъпка) се описва с вектора $\mathbf{p}(0) = \left\| p_1(0)\ p_2(0) \cdots p_n(0) \right\| = \left\| p_j(0) \right\|_{1xn}$.

Разпределението на вероятностите на състоянията непосредствено след $k$-тата стъпка се описва с вектора $\mathbf{p}(k) = \left\| p_1(k)\ p_2(k) \cdots p_n(k) \right\| = \left\| p_j(k) \right\|_{1xn}$.

Вероятностите за преход от състоянието $S_i$ в състоянието $S_j$ за една стъпка (примерно $k$-тата) за хомогенна верига не зависят от номера на стъпката:

$$P_{ij} = P_{ij}(k) = P[S(k) = S_j / S(k-1) = S_i] \ \ (i, j = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и образуват матрицата на преходните вероятности **P** $= \left\| P_{ij} \right\|_{nxn}$, при което $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поради това $P_{ii} = 1 - \sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} P_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Преходният процес се определя по формулата за пълната вероятност:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) P_{ij} \ \ (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

При зададен вектор $\mathbf{p}(0)$ от (1) се определя векторът $\mathbf{p}(k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

При определени условия [1] с нарастване на броя на стъпките $k$ $(k \to \infty)$ във веригата се установява стационарен режим, представен чрез вектора на стационарните вероятности на състоянията $\mathbf{p}(\infty) = \left\| p_1\ p_2 \cdots p_n \right\| = \left\| p_j \right\|_{1xn}$.

Стационарните вероятности на състоянията $p_j = \lim_{k \to \infty} p_j(k)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ не зависят от номера на стъпката $k$ и от вектора $\mathbf{p}(0)$. Те са числа и представляват средните относителни времена за престой на процеса в състоянията $S_j$. Те също удовлетворяват нормиращото условие $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Стационарните вероятности на състоянията са решение на системата от линейни алгебрични уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i P_{ij} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \end{array} \right. . \tag{2}$$

Системата (2) има единствено решение, т. е. еднозначно определя стационарните вероятности $p_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тя се решава по метода на Гаус с избор на главен елемент.

**МОДЕЛИРАНЕ НА НЕПРЕКЪСНАТИ МАРКОВСКИ ВЕРИГИ**

Нека марковският случаен процес има краен брой състояния $S_1, S_2, \ldots, S_n$ и преходите между тях са възможни в произволни, неизвестни предварително моменти от времето $t$. Процесът се разглежда като функция на непрекъснат аргумент, времето $t$ $(t \geq 0)$. $S(0)$ означава началното състояние на процеса (при $t = 0$), а $S(t)$ означава състоянието на процеса в произволен момент от времето $t$ $(t \geq 0)$.

Случайните събития $S(t) = S_j$ означават, че в произволен момент от времето $t$ процесът се намира в състоянието $S_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. За вероятностите им $p_j(t) = P[S(t) = S_j]$ е в сила т. н. нормиращо условие $\sum_{j=1}^{n} p_j(t) = 1$ $(t \geq 0)$.

Началното разпределение на вероятностите на състоянията (при $t = 0$) се описва с вектора $\mathbf{p}(0) = \| p_1(0)\ p_2(0) \cdots p_n(0) \| = \| p_j(0) \|_{1xn}$.

Разпределението на вероятностите на състоянията в произволен момент от времето $t$ се описва с вектора $\mathbf{p}(t) = \| p_1(t)\ p_2(t) \cdots p_n(t) \| = \| p_j(t) \|_{1xn}$ $(t \geq 0)$.

Преходите от състоянието $S_i$ в състоянието $S_j$ $(j \neq i)$ се извършват под въздействието на поасонови потоци от събития, чието основно свойство е отсъствието на последействие. За хомогенна верига тези потоци са стационарни, т. е. интензивностите им не зависят от времето: $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}$ $(j \neq i, \lambda_{ij} \geq 0)$ и образуват матрицата на интензивностите на преходите $\Lambda = \| \lambda_{ij} \|_{nxn}$, при което $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поради това $\lambda_{ii} = -\sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} \lambda_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Величината $\lambda_{ij}$ $(j \neq i)$ е интензивност, с която процесът преминава от текущото си състояние $S_i$ в състоянието $S_j$, а $\lambda_i = -\lambda_{ii}$ може да се интерпретира като интензивност, с която процесът напуска състоянието $S_i$.

Преходният процес се определя от системата от линейни диференциални уравнения на Колмогоров:

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = -\left( \sum_{i=1,\, i \neq j}^{n} \lambda_{ji} \right) p_j(t) + \sum_{i=1,\, i \neq j}^{n} \lambda_{ij} p_i(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

При зададен вектор $\mathbf{p}(0)$ от (3) се определя векторът $\mathbf{p}(t)$ $(t \geq 0)$. Системата (3) се интегрира числено по класическия метод на Рунге-Кута с точност от четвърти ред.

При определени условия [1] с нарастване на времето $t$ $(t \to \infty)$ във веригата се установява стационарен режим, представен чрез вектора на стационарните вероятности на състоянията $\mathbf{p}(\infty) = \| p_1\ p_2 \cdots p_n \| = \| p_j \|_{1xn}$.

Стационарните вероятности на състоянията $p_j = \lim_{t \to \infty} p_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ не зависят от времето $t$ и от вектора $\mathbf{p}(0)$. Те са числа и представляват средните относителни времена за престой на процеса в състоянията $S_j$. Те също удовлетворяват нормиращото условие $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Стационарните вероятности на състоянията са решение на системата от линейни алгебрични уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} \lambda_{ij} p_i - \left( \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} \lambda_{ji} \right) p_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \end{array} \right. . \tag{4}$$

Системата (4) има единствено решение, т. е. еднозначно определя стационарните вероятности $p_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$. Тя се решава по метода на Гаус с избор на главен елемент.

## ОПИСАНИЕ НА ПРОГРАМНИЯ МОДУЛ

Създаденият с MS Excel програмен модул, реализиран с помощта на Visual Basic for Applications (VBA), съдържа пет работни листа: Съдържание, Дискретни, Дискретни-Chart, Непрекъснати и Непрекъснати-Chart.

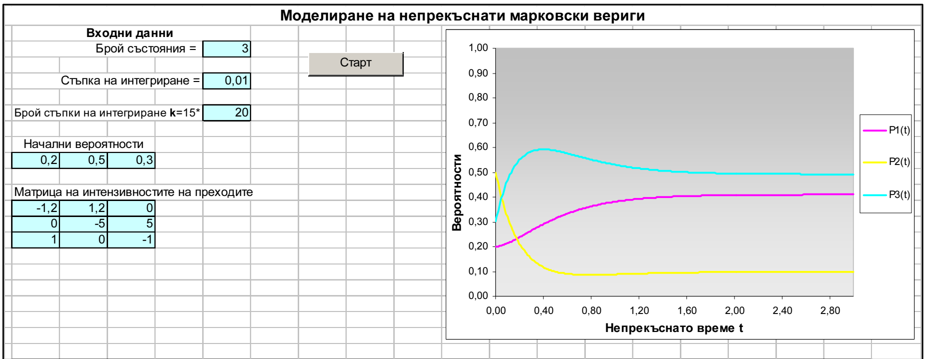
Всеки от работните листи Дискретни и Непрекъснати съдържа съответно: област за въвеждане на входните данни; област, в която се извеждат числените стойности за вероятностите на състоянията; област, в която стойностите за вероятностите на състоянията се представят в графичен вид.

В работните листи Дискретни-Chart и Непрекъснати-Chart вероятностите на състоянията се представят в графичен вид за по-добра нагледност.

## РЕЗУЛТАТИ ОТ МОДЕЛИРАНЕТО

На фиг. 1 са представени резултатите от моделирането на непрекъсната марковска верига с матрица на интензивностите на преходите

$$\Lambda = \left\| \lambda_{ij} \right\|_{nxn} = \left\| \begin{matrix} -1.2 & 1.2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| .$$




| | Начални вероят-ности | Вероятностен преходен процес | | | | | | | | | | | | | | | Стацио-нарни вероят-ности |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **t** | **0** | **0,2** | **0,4** | **0,6** | **0,8** | **1** | **1,2** | **1,4** | **1,6** | **1,8** | **2** | **2,2** | **2,4** | **2,6** | **2,8** | **3** | $\infty$ |
| P1(t) | 0,2 | 0,2379 | 0,2904 | 0,3329 | 0,3623 | 0,3812 | 0,3928 | 0,3998 | 0,404 | 0,4064 | 0,4079 | 0,4087 | 0,4092 | 0,4095 | 0,4096 | 0,4097 | 0,4098 |
| P2(t) | 0,5 | 0,2128 | 0,1175 | 0,0907 | 0,0864 | 0,0885 | 0,0915 | 0,0939 | 0,0956 | 0,0967 | 0,0974 | 0,0978 | 0,098 | 0,0982 | 0,0982 | 0,0983 | 0,0984 |
| P3(t) | 0,3 | 0,5494 | 0,5921 | 0,5764 | 0,5513 | 0,5303 | 0,5157 | 0,5062 | 0,5004 | 0,4968 | 0,4947 | 0,4935 | 0,4928 | 0,4924 | 0,4921 | 0,492 | 0,4918 |

Фиг. 1. Моделиране на непрекъсната марковска верига

За сравнение на фиг. 2 са представени резултатите от моделирането на дискретна марковска верига с матрица на преходните вероятности

$$\mathbf{P} = \left\| P_{ij} \right\|_{nxn} = \begin{Vmatrix} 0.94 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.05 & 0 & 0.95 \end{Vmatrix}.$$

Дискретната верига апроксимира непрекъснатата верига при малка стъпка на дискретизация $\Delta t = 0.05$:

$$P_{ij} = \lambda_{ij}\Delta t \ \ (j \neq i), \quad P_{ii} = 1 - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} P_{ij} \ .$$

**Моделиране на дискретни марковски вериги**

**Входни данни**

Брой състояния = 3

Старт

Брой стъпки на процеса k = 15* 3

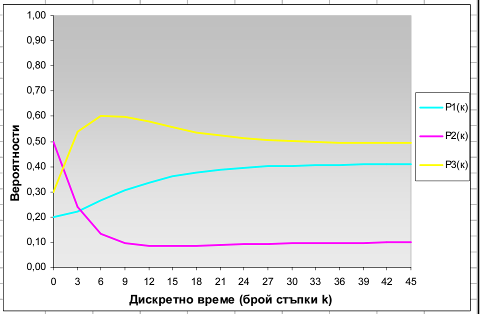
Брой точки за графиката междинни

Начални вероятности

| | | |
|---|---|---|
| 0,2 | 0,5 | 0,3 |

Матрица на преходните вероятности

| | | |
|---|---|---|
| 0,94 | 0,06 | 0 |
| 0 | 0,75 | 0,25 |
| 0,05 | 0 | 0,95 |




| | **Начални вероят-ности** | **Вероятностен преходен процес** | | | | | | | | | | | | | | | **Стацио-нарни вероят-ности** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **k** | **0** | **3** | **6** | **9** | **12** | **15** | **18** | **21** | **24** | **27** | **30** | **33** | **36** | **39** | **42** | **45** | **∞** |
| P1(к) | 0,2 | 0,223 | 0,2653 | 0,3054 | 0,3373 | 0,3606 | 0,377 | 0,3881 | 0,3956 | 0,4005 | 0,4038 | 0,4059 | 0,4073 | 0,4082 | 0,4088 | 0,4092 | 0,4098 |
| P2(к) | 0,5 | 0,2395 | 0,1343 | 0,0957 | 0,0846 | 0,0839 | 0,0864 | 0,0894 | 0,092 | 0,094 | 0,0954 | 0,0964 | 0,0971 | 0,0975 | 0,0978 | 0,098 | 0,0984 |
| P3(к) | 0,3 | 0,5375 | 0,6005 | 0,5989 | 0,5781 | 0,5555 | 0,5366 | 0,5225 | 0,5124 | 0,5054 | 0,5008 | 0,4977 | 0,4956 | 0,4943 | 0,4934 | 0,4928 | 0,4918 |

Фиг. 2. Моделиране на дискретна марковска верига

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Използването на създадения с помощта на MS Excel програмен модул позволява непосредствено да се определят числените стойности за вероятностите на състоянията на марковски вериги в преходен и в стационарен режим. Потребителят има възможност лесно да прецени как влияе промяната на входните данни върху тези числени стойности и да анализира характера на веригата.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Вентцель, Е. С., Л. А. Овчаров. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения, второе издание. М., Высшая школа, 2000.

[2] Георгиев, Г. Ст. Ръководство за решаване на задачи по дискретни структури, втора част. Марковски вериги и системи за масово обслужване. Русе, 1998.

[3] Kleinrock, L. Queueing Systems, Vol. I: Theory. New York, John Wiley & Sons, 1975.

**За контакти:**

Гл. ас. инж. Георги Стефанов Георгиев, Катедра "Компютърни системи и технологии", Русенски университет "Ангел Кънчев", Тел. (082) 888-681, E-mail: gstefanov@ecs.ru.acad.bg.

**Докладът е рецензиран.**