Анализ на устойчивостта на параметрите на икономико-математическия модел по планиране на производството и снабдяването със стоки

Веселина Евтимова

Analysis of the stability of the economic-mathematical model parameters on planning of the production and supply of goods: *Analysis has been performed on the steadiness of the parameters of the economic-mathematical model of planning of the production and supply of goods. The cases of objective function coefficient change, the simultaneous change of several parameters, the different constraints and technologies, change in the structure of the model on the way to adding new constraints and variables, have been examined*.

Key words: *Economic-mathematical Modelling*, *Operation Research*.

ВЪВЕДЕНИЕ

Динамично изменящата се международна икономическа обстановка, свързана основно с повишение цените на горивата и храните, обуславя голямата инфлация във всички страни по света в настоящия момент.

Планирането на производството на стоки или услуги е свързано с промяната на цените на величините, участващи в целевата функция и ограничителните условия на съответния икономически модел. Тази ситуация обуславя необходимостта от изследване влиянието на изменението на параметрите в задачата на линейното оптимиране върху оптималния план.

Анализът на параметрите на модела при известен оптимален план се състои в това, че се определят горните и долните граници на изменениятa на всеки коефициент от целевата функция, десните страни на ограничителните условия и коефициентите на разходите (при условие, че останалите параметри са фиксирани) в интервали, в които оптималният базис и свързаната с него система на оценки в индексния ред не се изменя. Аналогичен анализ може да се направи и при едновременно изменение на няколко параметъра, на отделни ограничения и технологии, а също при изменение структурата на модела по пътя на добавянето на нови ограничения и променливи. По-дълбокият анализ на модела в широк диапазон на изменение на изходните параметри се осъществява на основата на параметричното оптимиране [1].

На получените резултати от изследването е необходимо да се направи икономически анализ, разкриващ аналитичните възможности на модела.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Анализът на математическия модел при изменение на коефициентите на целевата функция по променливите, които не са включени в оптималния план не са необходими, защото в резултат от получаването на оптималното решение за небазисните променливи е в сила неравенството $z_j - c_j \geq 0$. Този израз трябва да е в сила при всяко положително нарастване на c_j, т.е. $z_j^0 - (c_j + \Delta c_j) \geq 0$, откъдето следва $\max c_j = z_j^0 - c_j$; c_j е коефициентът от целевата функция на променлива, която не е включена в базиса; z_j^0 показва колко трябва да е стойността на коефициента от целевата функция, съответстващ на дадената променлива, за да може тя да бъде включена в базиса; $\max \Delta c_j$ е максимално допустимо изменение на коефициента от целевата функция на *j*- тата променлива, което не води до изменение базиса на съответния план.

Включването на дадената променлива в плана е свързано с усъвършенстване на технологичния процес.

За определяне границите на вариация на коефициентите в целевата функция, съответстващи на базисните променливи, е необходимо да се направят допълнителни изследвания.

Нека коефициентът от целевата функция, съответстващ на *i*-тата базисна променлива се изменя с Δc_i. Съгласно алгоритъма на симплекс метода това нарастване изменя стойността на оценката $z_j^0 - c_j$ на всички небазисни ($j \notin Б$) променливи с $\Delta z_j = a_{ij}^0.\Delta c_j$, където a_{ij}^0 е коефициентът на заместване, характеризиращ величината на намалението (a_{ij}^0>0) или увеличението (a_{ij}^0<0) на *i*-тата небазисна променлива. Това означава, че новите стойности на оценка на небазисните променливи се определят от израза $z_j^0 + \Delta z_j^0 - c_j$. За да може планът да остане оптимален е необходимо да е изпълнено неравенството $z_j^0 + \Delta z_j^0 - c_j \geq 0$. Но тъй като $\Delta z_j^0 = a_{ij}^0.\Delta c_i$, то $z_j^0 - c_j \geq -a_{ij}^0.\Delta c_i$, т.е. $c_j - z_j^0 \leq a_{ij}^0.\Delta c_i$. ....(1)

Коефициентите a_{ij} могат да бъдат както положителни, така и отрицателни. Като се разделят на a_{ij}^0 двете страни на неравенство (1), се получава следната система неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{c_j - z_j^0}{a_{ij}^0} \leq \Delta c_i \; при \; a_{ij}^0 > 0; \\ \dfrac{c_j - z_j^0}{a_{ij}^0} \geq \Delta c_i \; при \; a_{ij}^0 < 0. \end{cases} \qquad \text{.......................(2)}$$

Като се реши системата неравенства (2), се намират търсените граници на вариация на коефициента c_i:

$$\underset{a_{ij}^0 > 0;\, j \notin Б}{\max} \left\{ \frac{c_j - z_j^0}{a_{ij}^0} \right\} \leq \Delta c_i \leq \underset{a_{ij}^0 < 0;\, j \notin Б}{\min} \left\{ \frac{c_j - z_j^0}{a_{ij}^0} \right\} \qquad \text{.......................(3)}$$

Ако стойността на Δc_i излезе извън границите на интервала (3), то както базисът на оптималния план, така и съответстващата му система от оценки в индексния ред на симплекс таблицата ще се изменят.

До този момент в нашите изследвания предполагахме, че има нарастване само на един от коефициентите в целевата функция при неизменност на всички останали.

Допускаме, че едновременно всички коефициенти на целевата функция получават нарастване без да се изменят всички останали параметри на икономико-математическия модел. В този случай признакът за неизменност на оптималния план се записва по следния начин:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} (c_i + \Delta c_i).a_{ij}^0 - (c_j + \Delta c_j) \leq 0, \; \forall \, j \notin Б^0. \quad \textit{Тъй като} \\ a_{ij}^0.\Delta c_i = \Delta z_i \quad \textit{и} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^0.\Delta c_i = z_j, \quad \textit{то} \sum_{i=1}^{m} \Delta c_i.a_{ij}^0 - \Delta c_i \leq c_j - z_j, \forall \, j \notin Б^0 \end{array} \right\} \text{.......(4)}$$

По такъв начин намирането на допустимите интервали на изменение на коефициентите c_j при неизменност на всички останали параметри на модела се свежда към решение на системата неравенства (4). В този случай намирането на интервалите на изменение на коефициентите c_j се свежда към намиране на критичните стойности на параметъра от задачата на параметричното оптимиране, в резултат на което се определят интервалите на изменение на всяко *j=1*$\div$*m:*

$$\left\{-\frac{z_j^0-c_j}{\sum_{i=1}^{m}c_i^{'}a_{ij}^0-c_j^{'}}\right\} \leq \quad \Delta c_j \quad \leq \left\{-\frac{z_j^0-c_j}{\sum_{i=1}^{m}c_i^{'}a_{ij}^0-c_j^{'}}\right\}$$

$$c_j^{'}\ \max;\ \sum_{i=1}^{m}c_i^{'}a_{ij}^0<c_j^{'} \qquad\qquad c_j^{'}\ \min;\ \sum_{i=1}^{m}c_i^{'}a_{ij}^0>c_j^{'}$$

Интерес представлява изменението на десните страни в ограничителните условия на модела. Оптималният план, получен в резултат от решението на задачата, е най-добрият при зададения обем от ресурси. Изменението на обема на дефицитните ресурси влияе на изменение на плана. Степента на дефицитността на ресурсите и влиянието на тяхното изменение върху качеството на решение се отразява на системата от оценки в индексния ред при решение на задачата на линейното оптимиране. С тяхна помощ може лесно да се намерят най-тесните звена в съотношенията на ресурсите и първо да бъде решен този проблем. Оценката на ресурсите показва изменението на целевата функция при увеличение на неговия обем с единица. Но всяко изменение обема на кой да е ресурс води до изменение на оптималния план. Във връзка с това е необходимо да се определят интервалите на изменение на ресурсите, при които оптималният план остава неизменен.

Допускаме, че се изменя само една, например *j*-тата компонента на вектора $\vec{B}$ (при неизменност на всички останали). Тогава границите на изменение на компонентите на вектора $\vec{B}$ може да се определят като се вземе за изходно начало условието за неотрицателност на променливите в оптималния план. Винаги трябва да е изпълнено неравенството $x_i^0+\Delta x_i\geq 0,$ където $\{x_i^0\}$ е оптималният план на задачата, а Δx_i е нарастването на *i*-тата базисна променлива при изменение на вектора $\vec{B}$. Ако b_j се измени с Δb_j, то $\Delta x_i=\Delta b_j.a_{ij}^0$. При това условие устойчивостта на оптималния план се записва във вида $\Delta b_j a_{ij}^0\geq -x_i^0$. Като се разделят двете страни на последното неравенство на a_{ij}^0, се получава следната система неравенства:

$$\begin{cases}\Delta b_j \geq -\dfrac{x_i^0}{a_{ij}^0} \quad \textit{при} \quad a_{ij}^0>0;\\ \Delta b_j \leq -\dfrac{x_i^0}{a_{ij}^0} \quad \textit{при} \quad a_{ij}^0<0.\end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Като се реши системата неравенства (5) се получава

$$\left\{-\frac{x_i^0}{a_{ij}}\right\}\leq \quad \Delta b_j \quad \leq \left\{-\frac{x_i^0}{a_{ij}}\right\}$$

$$\max\ a_{ij}^0>0; i\in Б^0 \qquad \max\ a_{ij}^0<0; \quad i\in Б^0$$

При такова изменение на *i*- тия ресурс оптималният план остава неизменен.

Нека да предположим, че едновременно се изменят всички компоненти на вектора на десните страни на ограничителните условия (без да се изменят другите параметри на модела). Допустимото нарастване на коефициентите в десните страни на ограничителните условия се определя от системата неравенства:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^0 \Delta b_i \geq x_k^0 \; при \; к = 1, 2, ..., m.$$

В дадения случай, както и преди това, се задава вектора $\overrightarrow{B'}$, определящ предпологаемите пропорции на изменение $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ...$ на вектора $\vec{B}$. Като се приложи апарата на параметричното оптимиране се намират търсените интервали:

$$\left\{ -\frac{x_k^0}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^0 . \beta_i} \right\} \leq \Delta b_i \leq \left\{ -\frac{x_k^0}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^0 . \beta_i} \right\}$$

$$\beta_i \min; \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^0 . \beta_i > 0 \qquad \beta_i \max; \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^0 . \beta_i < 0$$

При анализ на оптималното решение понякога възниква въпросът: при какви условия в оптималния план могат да се включат променливи, които не участват в него? За да се отговори на този въпрос трябва да се определят интервалите на вариация на небазисните променливи, които целим да въведем в базиса.

От признака за оптималност [2] следва, че оптималният базис не се изменя, ако отрицателните коефициенти във вектора стълб на небазисна променлива ($a_{ij} < 0$) се намалят, а положителните ($a_{ij} > 0$) се увеличат.

При увеличаване на коефициента на разход на *i*-тия ресурс с Δa_{ij} косвеният ефект върху z_j^0 от включване в базиса на оптималния план на *j*- тата небазисна променлива е изменение на $\Delta z_j^0 = \Delta a_{ij} . z_i^0$. z_i^0 е оценката на *i*-тия ресурс в оптималния план. Следователно планът ще бъде оптимален при изпълнение на неравенството $c_j - (z_j^0 + \Delta z_j) \leq 0$, откъдето се получава $c_j - z_j^0 \leq \Delta z_j = \Delta a_{ij} . z_i^0$. Следователно $c_j - z_j^0 \leq \Delta a_{ij} . z_i^0$. Така се намира $-\infty \leq \Delta a_{ij} \leq \frac{(c_j - z_j)}{z_i^0}$. При едновременното изменение на стойността на няколко или всички коефициенти a_{ij} на кой да е вектор *j,* който не принадлежи на базиса на оптималния план, условието за неизменност (устойчивост) на оптималния базис се изразява по следния начин: $c_j - z_j \leq \sum_{j \in Б} \Delta a_{ij} z_i^0$ Търсените интервали отново се определят с апарата на параметричното оптимиране. Включването на дадената променлива в плана води до подобряване качеството на решението с $c_j - z_j^0$ единици.

Ако разходите на ресурсите по дадената променлива бъдат снижени в размер, равен на отношението на производствените единици от продукцията към добавката (прираста), получен от икономията на ресурси, то *j*-тата променлива ще бъде включена в плана.

При анализ на оптималния план може да възникне потребност за разглеждане на допълнителните ограничения след получаване на оптималното решение за първоначалния модел. В редица други случаи някои ограничения, имащи място в първоначалната формулировка на задачата, съзнателно се пропускат, за да се облекчат пресмятанията. Опитът показва, че обемът на изчисления при използване на симплекс метода нараства при грубо приближение пропорционално на куба на броя на ограниченията [3]. Следователно, когато се описват ограниченията на изходния модел, трябва много да се внимава. Някои от ограниченията влияят слабо (или въобще не влияят) на вида и стойността на целевата функция на оптимално решение. Такива ограничения обикновено се вземат под внимание като се имат предвид следващите етапи от анализа. Поради това последен етап от анализа на параметрите на икономико-математическия модел при известно оптимално решение е уточняването на целесъобразността от включване в задачата на нови технологии или елементи.

Допускаме, че в модела на задачата е въведена нова технология (допълнителен вектор-стълб $\vec{r}$). В този случай съгласно признака за оптималност, ако $c_r - z_r \leq 0$, то решението ще бъде оптимално.

По известните оценки в индексния ред се пресмята и косвеният ефект $z_r = \sum_{i \in Б} a_i z_i$. Като се замести намерената стойност в предишното неравенство се намира $c_r = \sum_{i \in Б^0} a_i z_i^0$. Ако новата технология удовлетворява това съотношение, то тя може да бъде включена в оптималния план. За тази цел е необходимо повторно решение на задачата. В противен случай новата технология остава извън плана.

При изменение коефициентите и десните страни на ограниченията от тип неравенство $\sum_j a_{ij} x_j < b_i$ не правим анализ на тяхното влияние върху модела, защото за прилагане алгоритъма на симплекс метода е необходимо всички ограничения да са във вид на равенства $\sum_j a_{ij} x_j = b_i^{'}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализът на параметрите на икономико-математическия модел при известно оптимално решение има голямо практическо значение. Тъй като създаденият модел може да не отразява напълно реалните условия за развитие на разглеждания обект, а и в изходните данни може да има неточност, то оптималното решение на задачата има приближена стойност. По тази причина заедно с оптималното решение е необходимо да имаме информация за поведението на разработвания модел в околността на оптималния план в диапазона на възможните изменения на параметрите и структурата на модела. Тази информация позволява:

-да се получи информация за поведението на технико-икономическите коефициенти на модела в околността на оптималния план;

-да се уточнят изискванията към точността на изходните данни;

-изменение в необходимото направление на тези икономически показатели, които се поддават на контрол;

-видоизменение на разработвания модел, да се окрупни по отношение на по-малко чувствителните параметри и ограничения и да се уточни областта на високата чувствителност.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бонев К., Н.Лалова, А.Иванов, Математическо моделиране, изд." Г.Бакалов", Варна, 1989.

[2] Frederick S. Hiller, Gerad J. Liberman, Introduction to Operation Research, McGraw- Hill Inc. Singapore, 1995.

[3] Кремер Н.Ш., Исследование операции в экономике, Москва, Юнити, 2004.

За контакти:

Гл.ас. д-р Веселина Евтимова, Катедра „Алгебра и геометрия", Русенски университет "Ангел Кънчев", Тел.: 082 888 453, E-mail: vevtimova@ru.acad.bg

Докладът е рецензиран.