Уравнение на дилатация - основни свойства

Васил Колев

A dilation equation: *In this paper dilation equation important properties for wavelet construction and signal processing are represented.*
Key words: *Dilation equation, wavelet, Fourier transform, support function*

ВЪВЕДЕНИЕ

Уравнението на дилатацията (УД) $\phi(t): R^n \to R$ е решение в L^1 с компактна основа. Използва се за построяване на ортонормални уейвлети или мултиуейвлети в $L^2(R^n)$.

В дискретната уейвлетна трансформация (ДУТ) [1] е въведена УД, т.е. функция чрез която се изчислява ДУТ.

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\phi(t-k) \tag{1}$$

При реализация и за по-добра гладкост на филтрите изчисленията започват от най-финната резолюция към по-грубите резолюции. С това получаваме ***УД*** или ***двумащабното разликово уравнение***:

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\phi(2t-k) \tag{2}$$

Уравнението (2) се състои от мащабиращата функция $\phi(t)$, нейната компресирана $\phi(2t-k)$ с множител 2 преместена на разстояние k, и филтърни коефициенти $h_0(k)$. Например [2]:

- УД за делта функция - $\phi(t) = \sum_{k=0} h_0(k)\phi(2t-k) = h_0(0)\phi(2t) = 2\phi(2t)$;

- УД от функция на Хаар D_2 - $\phi(t) = \sum_{k=0}^{1} h_0(k)\phi(2t-k) = h_0(0)\phi(2t) + h_0(1)\phi(2t-1)$;

- УД на Дъбеши D_4 -

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{3} h_0(k)\phi(2t-k) = h_0(0)\phi(2t) + h_0(1)\phi(2t-1) + h_0(2)\phi(2t-2) + h_0(3)\phi(2t-3)$$

УСЛОВИЕ ЗА СЪЩЕСТВУВАНЕ НА РЕШЕНИЕ НА УД

Нека интегрираме от двете страни УД (2):

$$\int\phi(t)dt = \sqrt{2}\int\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\phi(2t-k)dt = \sqrt{2}\int\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\phi(2t)d(2t)$$

Извършваме субституцията $y = 2t-k$:

$$\int\phi(t)dt = \sqrt{2}\int\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\phi(2t)d(2t) = \sqrt{2}\left(\int\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\right)\frac{1}{2}\int\phi(t)d(t)$$

Въвеждаме нормализацията $\int\phi(t)dt = 1$ и получаваме:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k),$$

Следователно **условието за съществуване на УД** е сумата от коефициентите $h_0(k)$ да бъде:

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k) = \sqrt{2}\,. \tag{3}$$

ФУРИЕ ТРАНСФОРМАЦИЯ НА УД

След прилагане Фурие трансформация на УД $\hat{\phi}(\omega)$ получаваме

$$\hat{\phi}(\omega) = \int \phi(t) e^{-j\omega t} = \sqrt{2} \int \sum_{k=0}^{N-1} h_0(k) \phi(2t-k) e^{-j\omega t}\,.$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N} h_0(k) \phi(2t-k) e^{-j\omega t} dt = \left(\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k) \right) \left(\sqrt{2} \hat{\phi}(2t-k) \right)$$

Разглеждаме втората част на уранението:

$$\sqrt{2}\hat{\phi}(2t-k) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2t-k) e^{-j\omega t} d(2t)$$

$$\sqrt{2}\hat{\phi}(2t-k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2t-k) e^{-j\omega t} d(2t-k) \qquad (2t-k=y)$$

$$\sqrt{2}\hat{\phi}(2t-k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) e^{-j\frac{\omega}{2}(y+k)} d(y)$$

$$\sqrt{2}\hat{\phi}(2t-k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}k} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) e^{-j\frac{\omega}{2}y} d(y)$$

$$\sqrt{2}\hat{\phi}(2t-k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}k} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$$

Следователно $\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\, e^{-j\frac{\omega}{2}k} \right) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$. Отбелязваме дискретно-времевата трансформация на Фурие за коефициентите на филтъра:

$$H\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\, e^{-j\frac{\omega}{2}k}$$

и получаваме **трансформация на Фурие за УД**:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{4}$$

При $\omega = 0$ от $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(0) \hat{\phi}(0)$ и $\hat{\phi}(0) = 1$ получаваме трансформация на Фурие за (3) и следователно $\sqrt{2} = H(0)$.

При $\omega \to \frac{\omega}{2}$ от уравнение (4) получаваме:

$$\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\omega}{4}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right) \text{ или } \hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\omega}{4}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

Ако продължим итеративно получаваме:

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{J} \frac{1}{\sqrt{2}} H(\frac{\omega}{2^j}) \right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right). \tag{5}$$

Уравнението е сходящо за всяко ω. Решението на $\hat{\phi}(\omega)$ намираме чрез (5) при $J \to \infty$:

$$\hat{\phi}(\omega) = \lim_{J\to\infty} \left\{ \prod_{j=1}^{J} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} H(\frac{\omega}{2^j}) \right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right\}$$

където дробта $\frac{\omega}{2^J} \approx 0$ и $\hat{\phi}(0) = 1$. Това е и трансформацията на Фурие за УД

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right). \tag{6}$$

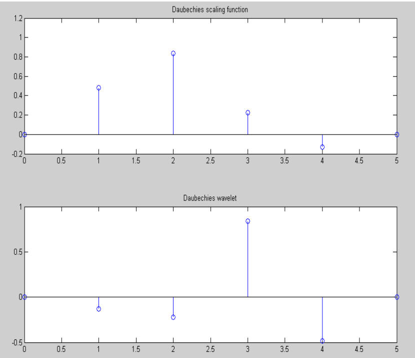
От (6), чрез извършване на обратна Фурие трансформация, получаваме връзката между нискочестотните филтърни коефициенти и УД (1)(Фиг. 1). По този начин от полученото УД с промяна само на филтърни коефициенти с високочестотни получаваме функцията на уейвлета:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_1(k)\phi(t-k) \tag{7}$$

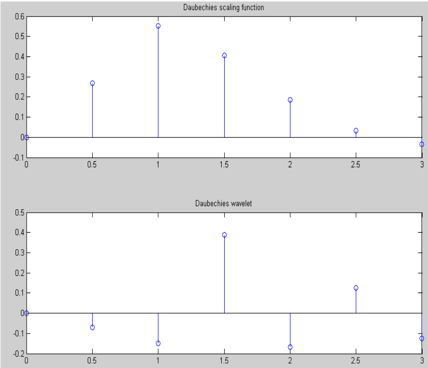
Подхода с безкрайното произведение е полезен при определяне **съществуване** и **гладкост** на решенията, но това е практически метод за намиране на $\phi(t)$ при много прости случай. По-добър начин е чрез каккаден алгоритъм който използва опрделен брой итерации, примерно 5, (Фиг.1). Затова избираме начална функция:

$$\phi^n(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\phi^{n-1}(t-k) \tag{8}$$

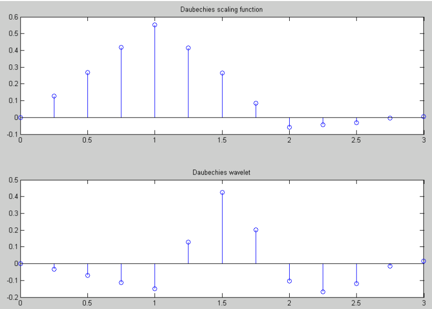
с която са получени и изобразени на Фиг.1.



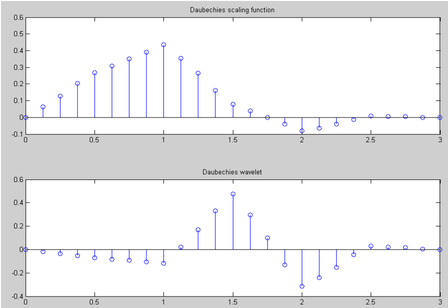
j=0



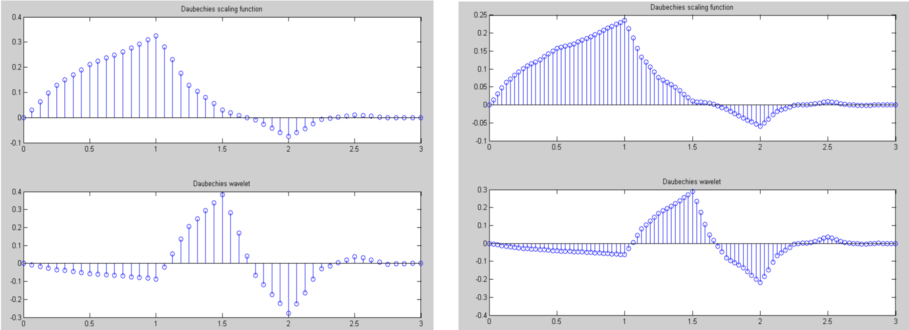
j=1



j=2



j=3



j=4 j=5

Фиг. 1 Дъбеши УД (горна графика) и уейвлет (долна графика) за j=0,1,2,3,4,5

ОСНОВА НА УД

Предполагаме, че коефициентите на филтъра $h_0(k)$ и $h_1(k)$ са $0<k<N-1$ и основата на $\phi(t)$ е $[a,b]$. Продължаваме с дилатация и получаваме:

$\phi(2t)$ със основа $\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]$:

$\phi(2t-1)$ със основа $\left[\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right]$

$\vdots$

$\phi(2t-k)$ със основа $\left[\frac{a+k}{2},\frac{b+k}{2}\right]$

$\vdots$

$\phi(2t-(N-1))$ със основа $\left[\frac{a+N-1}{2},\frac{b+N-1}{2}\right]$.

Приравняване основите отляво и в дясно. Лявата страна на $\phi(t)$ е с основа $[a,b]$ и дясната страна с основа $\left[\frac{a}{2},\frac{b+N-1}{2}\right]$. Тъй като $a=\frac{a}{2}$; $b=\frac{b+N-1}{2}$ получаваме, че $a=0$; $b=N-1$. Следователно $\phi(t)$ е с основа $[0,N-1]$. Тя остава същата и за уейвлета.

Пример: За Дъбеши УД и уейвлет е показана $\mathrm{supp}[0,3]$, Фиг.1.

ИНТЕГРАЛ НА УД

Интеграла на УД за $\forall j, j\geq 1$: $\left(S_j=\frac{1}{2^j}\sum_l \phi\left(\frac{l}{2^j}\right)\right)$ е:

$$\int \phi(t)\,dt=\lim_{j\to\infty} S_j \ . \tag{9}$$

От УД правим субтитуцията $t\to\frac{l}{2^j}$. При $j\geq 1$ получаваме

$$\phi\left(\frac{l}{2^j}\right)=\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\phi\left(2\frac{l}{2^j}-k\right)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\phi\left(\frac{l}{2^{j-1}}-k\right)$$

Извършваме сумиране от двете страни по l:

$$\sum_l \phi\left(\frac{l}{2^j}\right) = \sum_l \left(\sqrt{2}\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)\,\phi\left(\frac{l}{2^{j-1}} - k\right)\right)$$

$$\sum_l \phi\left(\frac{l}{2^j}\right) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(h_0(k)\sum_l \phi\left(\frac{l}{2^{j-1}} - k\right)\right)$$

$$\sum_l \phi\left(\frac{l}{2^j}\right) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(h_0(k)\sum_l \phi\left(\frac{l}{2^{j-1}}\right)\right)$$

$$\sum_l \phi\left(\frac{l}{2^j}\right) = 2\sum_l \phi\left(\frac{l}{2^{j-1}}\right)$$

Умножаваме двете страни с $\frac{1}{2^j}$:

$$\frac{1}{2^j}\sum_l \phi\left(\frac{l}{2^j}\right) = \frac{1}{2^{j-1}}\sum_l \phi\left(\frac{l}{2^{j-1}}\right)$$

Очевидно $S_j = S_{j-1}$ и $\forall j, j \geq 1$ S_j са едни и същи и $\lim_{j\to\infty} S_j = S_0$. Следователно $\int \phi(t)\,dt = \lim_{j\to\infty} S_j = S_0$. От своя страна $S_0 = \sum_l \phi(l)$. Следователно, получаваме че **интеграла на УД** е:

$$\int \phi(t)\,dt = \sum_l \phi(l). \tag{10}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнението на дилатация изразява мащабиращата функция като линейна комбинация от k варианта на самите себе си действащи, в частен случай, два пъти по-бързо.

Решението на $\phi(t)$ съществува при $\sum_{k=0}^{N-1} h_k = \sqrt{2}$. Това означава имаме крайни брой степени на свобода за описание на мащабиращи функции с крайна основа .

От (6) е очевидно, че за да бъде сходящо в L^2, безкрайното произведение при $j \to \infty$, трябва да се клони към 1. Това означава $H_0(0) = 1$. С това се определят стойностите на нискочестотните филтърни коефициенти, $h_0(k)$. Даден е явен вид на уейвлета с високочистотните филтърни коефициенти, $h_1(k)$. С така получените функции си построяват банки за получаване на УД и уейвлет.

Разгледана е връзката с интеграл на УД $\int \phi(t)\,dt = \sum_l \phi(l)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колев В., “Обобщена синтез процедура на оптимални филтърни коефициенти за ортогонални уейвлитни матрици”, Русе, Научни трудове, т.40, серия 3, pp.7-11, 2003

[2] Strang G., Nguyen T., Wavelet and filter banks, Wellesley Cambridge Press, MA, 1996

За контакти:
Васил Колев, ИККС, БАН, E-mail: kolev_acad@abv.bg

Докладът е рецензиран.