Използване на самостоятелната работа при студентите за привличането им към научно-изследователска работа

Маргарита Якимова, Антоанета Михова

Using the Working Independently of the Students for Attracting them to Research Work: *In the paper a teacher experience in attracting students to research work is described*
Key words: *Methods, Independent work, Grassmann algebra.*

„Познанията трябва да се достигнат в процеса на собствено разсъждение, чрез самостоятелно мислене и самостоятелна работа"

Д.И.Писарев

Към основните задачи на даден университет се отнасят подготовката на високо квалифицирани специалисти с висше образование и провеждането на научни изследвания. Научно- изследователската дейност е важна част от дейността на всеки университет. Важен е и въпросът за приобщаване на студентите към научно-изследователския процес.

Приобщаването може се осъществи чрез задаване на студентите на самостоятелна работа по предварително обявени теми, които съдържат изследователски елементи. Това ще спомогне за обогатяване уменията им за извършване на анализ на съществуващи решения по определен въпрос, прилагане на вече придобити знания за решаване на даден въпрос, получаване на нови знания по теоретичен или експериментален начин.

В дидактиката съществуват четири различни типа самостоятелна работа:

а) Самостоятелна работа от възпроизвеждащ тип.

б) Самостоятелна работа от познавателен тип, в хода на която обучаваният придобива нови знания.

в) Самостоятелна работа от творчески тип, при която се създава нещо ново, оригинално (курсови и дипломни работи).

г) Самостоятелна работа от познавателно – критически тип, работа, която е свързана с разширяването на връзката на обучавания с практиката.

Съвременната образователна система може да бъде в полза на учебно - изследователската работа, прилагайки последните два типа самостоятелна работа.

В статията е описан опита на преподавател по Методика на обучението по математика да насочи вниманието на студентите към понятието Грасмановата алгебра, възлагайки им самостоятелна работа.

Ето и някои факти, основни понятия и твърдения, които се отнасят за разглежданата алгебра [1],[2]:

Грасмановата алгебра (още наричана Външна алгебра) е важна алгебрическа структура, която възниква от линейната алгебра и геометрията. Тя намира приложения в много области на математиката и теоретичната физика, предлага методи за изясняването на различни теми от геометрията, алгебрата и анализа. Грасманова алгебра по един естествен начин обобщава двумерното и тримерното векторни пространства.

Понятието "Външната алгебра" е въведено от Херман Грасман през 1844 година в неговия труд *Ausdehnungslehre* или *Теория на разширението,* където той за първи път представя идеи си. Терминът *Ausdehnungslehre* отразява факта, че един елемент може да бъде "разширен" чрез (външното) умножение с друг елемент. Например две различни точки могат да бъдат "разширени" до нов елемент, определящ права линия, чрез тяхното външно произведение. Този елемент може да бъде “разширен” до елемент, определящ равнина, умножавайки го с точка, външна за линията и т.н., продължавайки към по-голяма размерност. Тук “външността” е геометрически еквивалентна на “линейна независимост”. Ако два елемента не са външни един за друг (не са независими), то тяхното произведение е нула.

За втори път Грасман представя идеите си през 1862 година. Но и двата пъти идеите му се посрещат с мълчание от математическото общество. Едва през втората половина на шестдесетте години на 19-век бавно започва преоткриването на идеите на Грасман от съвременниците му.

В предговора към второто издание на *Ausdehnungslehre* Грасман пише: Аз знам, че тази теория, която давам на науката е несъвършена, но ще мине време и тези идеи, може би в нов вид ще се възродят и ще навлязат в науката в по-усъвършенстван вид.

Нека K е поле с характеристика 0.

Определение 1: Алгебра се нарича векторно пространство R , в което е въведена бинарна операция “**.**” , наречена умножение , така че $\forall a,b,c \in R$ и $\forall \alpha \in K$ да е изпълнено $(a+b).c = a.c + b.c$, $c.(a+b) = c.a + c.b$, $\alpha(a.b) = (\alpha a).b = a.(\alpha b)$. Обикновена точката не се пише. Ако $\forall a,b,c \in R$ е изпълнено условието $(ab)c = a(bc)$, то алгебрата се нарича асоциативна.

Определение 2: Нека V е векторно пространство с нареден базис $\{e_i, i \in I\}$. Грасманова (или външна) алгебра $G(V)$ върху V се нарича асоциативна алгебра, породена от елементите $\{e_i, i \in I\}$ с определящи съотношения съотношения $e_i e_j + e_j e_i = 0, i, j \in I$. Базисните елементи $\{e_i, i \in I\}$ на векторното пространство V ще наричаме образуващи за грасмановата алгебра $G(V)$.

С $F\langle X \rangle$ е означена асоциативната алгебра с елементи $x_1, x_2, ..., x_m, ...$ $, x_i \in X$, където X е изброимо множество.

Определение 3: Полиномът $f(x_1,...,x_n) \in F\langle X \rangle$ се нарича полиномно тъждество в алгебрата R , ако за всеки $r_1,...,r_n \in R$ е изпълнено $f(r_1,...,r_n) = 0$.

Означаваме с G_n Грасманова алгебра над линейно пространство с размерност *n* и $G_n^* = G_n \setminus \{1\}$. Грасманова алгебра G_n ,породена от елементите $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ и разглеждана като векторно пространство има за базис множеството $\{1, e_1, e_2, e_1e_2, e_3, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3, ..., e_1e_2...e_n\}$, което се състои от 2^n елемента.

Определение 4: Изразът $[a,b] = ab - ba$ се нарича комутатор на елементите a и b.

Твърдение 1: Ако a и b са елементи от G_2^* то $ab = -ba$ и $a^2 = 0$.

Твърдение 2 [2]: Грасмановата алгебра $G(V)$ удовлетворява полиномното тъждество $[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3] = 0$.

Доказателство:

Тъй като полиномът $[x_1, x_2, x_3]$ е линеен относно всяка една от променливите x_1, x_2, x_3, то е достатъчно да проверим, че $[r_1, r_2, r_3] = 0$ за базисните елементи от $G(V)$.

В сила е съотношението $\left(e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_n}\right)\left(e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_m}\right)= \quad (-1)^{m.n}\left(e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_m}\right)\left(e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_n}\right)$, тогава $\left[e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_n}, e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_m}\right]=\left(1-(-1)^{m.n}\right)e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_n}e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_m}$. Това означава, че $[r_1,r_2]\neq 0$, когато r_1 *и* r_2 са от нечетна дължина (m и n са нечетни). От $[r_1,r_2]\neq 0$ следва, че $[r_1,r_2]=2e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_n}e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_m}$ и е с дължина $m+n=s$ - четно число. Тогава $[[r_1,r_2],r_3]=[r_1,r_2]r_3-r_3[r_1,r_2]$ и $[r_1,r_2]=2e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_s}$. Ако $r_3=e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_p}$, то $[[r_1,r_2],r_3]=\left(1-(-1)^{s.p}\right)e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_s}e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_p}=0$ ($s.p$-четно число).

Ето и последователността на проведения опит за въвеждане на студентите от специалност Математика и Информатика, трети курс в новата за тях област ”Грасманова алгебра”, използвайки знанията им от линейната алгебра и аналитичната геометрия.

I. Първи етап. *Предварителна подготовка*.

1. В час за упражнение по Методика на обучението по математиката се поставя темата за следващото семинарно занятие -Грасманова алгебра. Преподавателят запознава накратко студентите с основната идея на алгебрата.
2. Определяне на задачите за следващия час и разпределянето им между студентите:
   а) Припомняне на придобити знания от линейната алгебра и аналитичната геометрия.
   б) Запознаване с основни характеристики на Грасмановата алгебра.
   в) Задачи за самостоятелна работа.

Подготовката по а) и б) е възложена на конкретни групи студенти. Препоръчана е литература за получаване на информация. Задачите от в) са възложени на всички студенти от групата.

II. Втори етап. *Изпълнение.*

1. Студент от първата група припомня основни понятия от линейната алгебра и от аналитичната геометрия. Дадени са определения и свойства на понятията вектори, скаларно, векторно и смесено произведения, векторно пространство, линейно пространство, базис и размерност на линейното пространство. Свойствата са онагледени с подходящи примери. От студентите се изисква, като бъдещи учители, да представят материала синтезирано, достъпно и съобразявайки се с предоставеното им (малко) време.
2. Студент от втората група запознава аудиторията с кратка биография на Херман Грасман и с основни характеристики на Грасмановата алгебра. Материалът е представен чрез слайдове.
3. Разгледани са решенията на задачите, зададени за самостоятелна работа и са поставени допълнителни задачи.

За самостоятелна работа на студентите са зададени следните задачи:

Задача1. Нека a и b са елементи от G_2^* , $a=e_1-e_2+e_2$ и $b=2e_1+e_2-e_3$. Да се намерят произведенията ab и ba .

Решение:

$$ab=e_1e_2-e_1e_3+2e_1e_2+e_2e_3-2e_1e_3-e_2e_3=3e_1e_2-3e_1e_3$$

$$ba=-2e_1e_2+2e_1e_3-e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3-e_2e_3=-3e_1e_2+3e_1e_3.$$

От получените резултати следва, че $ab=-ba$. (Демонстрация на Твърдение 1.)

Задача2. Нека a , b и c са елементи от G_3 .

$a = 1 + 2e_1 - 3e_2$, $b = e_2 + 2e_3$ и $c = e_1 - 3e_2 + e_3$. Да се намерят произведенията ab и ba.

Решение:

$$ab = e_2 + 2e_3 + 2e_1e_2 + 4e_1e_3 - 6e_2e_3$$
$$ba = e_2 - 2e_1e_2 + 2e_3 - 4e_1e_3 + 6e_2e_3.$$

(Направен е изводът, че в G_3 не е в сила Твърдение 1.)

Допълнителна задача 1. Да се намери комутаторът на елементите a, b и c.

Решение:

$$[a,b,c] = [ab,c] = (ab - ba)c - c(ab - ba) =$$
$$= (4e_1e_2 + 8e_1e_2 - 12e_2e_3)(e_1 - 2e_2 + e_3) - (e_1 - 2e_2 + e_3)(4e_1e_2 + 8e_1e_2 - 12e_2e_3) =$$
$$= 4e_1e_2e_3 + 8e_1e_2e_3 + 12e_1e_2e_3 - 4e_1e_2e_3 - 8e_1e_2e_3 - 12e_1e_2e_3 = 0.$$

(Онагледяване на Твърдение 2.)

Задача3. Нека $a = 1 + 2e_1 - 3e_2$, $b = e_2 + 2e_3$ и $c = e_1 - 3e_2 + e_3$ са елементи от G_3. Да се намерят произведенията ab и ba.

Решение:

$ab = 2 + 7e_1 - 3e_2 - 10e_1e_2$, $ba = 2 + 7e_1 - 3e_2 + 20e_1e_2$.

Допълнителна задача 2. Да се намери комутаторът на елементите a, b и c.

Решение:

$$[a,b,c] = (ab - ba)c - c(ab - ba) =$$
$$-10e_1e_2(1 + e_1 + e_2 + e_1e_2) - (1 + e_1 + e_2 + e_1e_2)(-10e_1e_2) = 0.$$

(Очакван резултат от Твърдение 2.)

Накрая можем направим извода: Проведеният експеримент съдейства за формиране у студентите на изследователски умения и навици, помага им да анализират получените резултати и им дава необходимите умения за самостоятелно справяне с проблеми, свързани с бъдещото им научно израстване.

Студентите проявиха интерес към представената им тема. Да се надяваме някои да тях проявят по- задълбочено любопитство към областта на Грасмановата алгебра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вергасов, В. Активизация познавательной деятельности студентов в высшей школе, Вища школа, Киев, 1985.

[2] Drensky,V. Free Algebras and PI Algebras, Springer, Singapore,1999.

[3] Krakowski,D.,A.Regev, The polynomial identities of the Grassmann algebra,Trans. Amer. Math. Sos., 181(1973),429-438.

За контакти:

Ст.ас. Маргарита Якимова, Катедра “Математичен анализ”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, Тел.: 082 888727, E-mail: mjakimova@.ru.acad.bg.

Гл.ас. Антоанета Михова, Катедра “Математичен анализ”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, Тел.: 082 888727, E-mail: amihova@.ru.acad.bg.

Докладът е рецензиран.