Използване на *Mathematica* за пресмятания с 2×2 матрици над Грасманова алгебра

Антоанета Михова, Даниела Пеева

Using Mathematica for Calculations with 2×2 Matrices over the Grassmann algebra: *In the paper a program written in Mathematica 5.0 for multiplying Grassmann numbers from a n-dimensional Grassmann algebra is used and a program for multiplying matrices with entries from a Grassmann algebra is done. Some identities of matrix algebra $M_2(G_n)$ are verified.*

Key words: *Grassmann Algebra, Polynomial Identities with matrices over a Grassmann algebra, Calculations with Grassmann numbers.*

Важността на Грасмановата алгебра е свързана със структурната теория на *T* - идеалите на тъждества в асоциативните алгебри, развита от Кемер [2] и която играе важна роля в изследванията на *PI*-алгебрите през последните години. Кемер доказва, че всеки прост *T*- идеал може да бъде получен като *T*- идеал на една от следващите алгебри: $M_n(K)$, $M_n(G)$ и $M_{p,q}(G)$, където $M_n(K)$ е алгебрата на квадратните матрици от ред *n* над поле K , $M_n(G)$ е алгебрата на квадратните матрици от ред *n* с елементи от Грасманова алгебра *G* и $M_{p,q}(G)$ са блочни матрици от вида $M_{p,q}=\begin{pmatrix} M_{p\times p}(G_0) & M_{p\times q}(G_1) \\ M_{q\times p}(G_1) & M_{q\times q}(G_0)\end{pmatrix}$. Алгебрата на тези матрици е подалгебра на алгебрата $M_{p+q}(G)$, където G_0 и G_1 са линейни подпространства на *G*, породени от произведенията $e_{i_1}\dots e_{i_k}$, които са съответно с четна и нечетна дължина.

Ето някои основни определения и твърдения [1], [3].

Нека K е поле с характеристика 0.

Определение 1: Векторното пространство R , се нарича алгебра, ако е въведена бинарна операция “$*$”(т.е. изображение$(R,R)\to R$) , наречена умножение, така че $\forall a,b,c\in R$ *и* $\forall \alpha\in K$ да е изпълнено $(a+b)*c=a*c+b*c$, $c*(a+b)=c*a+c*b$, $\alpha(a*b)=(\alpha a)*b=a*(\alpha b)$. R се нарича алгебра над полето K. Ако $\forall a,b,c\in R$ е изпълнено условието $(a*b)*c=a*(b*c)$, то алгебрата се нарича асоциативна.

Определение 2: Нека V е векторно пространство с нареден базис $\{e_i, i\in I\}$. Грасманова (или външна) алгебра $G(V)$ върху V се нарича асоциативна алгебра, породена от елементите $\{e_i, i\in I\}$ с определящи съотношения $e_i*e_j+e_j*e_i=0,\ i,j\in I$. За умножението в Грасмановата алгебра се използва знакът “$\wedge$” (wedge). Тогава определящите съотношения в Грасмановата алгебра можем да запишем по следния начин $e_i\wedge e_j+e_j\wedge e_i=0,\ i,j\in I$. По-надолу, в част от работата, за улеснение ще изпускаме знака за умножение “$\wedge$” и вместо $e_i\wedge e_j$ ще пишем $e_i\, e_j$.

Определение 3: Базисните елементи $\{e_i, i\in I\}$ на векторното пространство V се наричат образуващи на алгебрата $G(V)$.

Базис на $G(V)$ е множеството

$$B=\{1\}\cup\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m}/1\le i_1<i_2<\dots<i_m,\ m=1,2,3,\dots\}.$$

Ако V_n е крайномерно векторно пространство с размерност n, то базисът на Грасмановата алгебра $G(V_n)$ е с размерност 2^n.

Определение 4: Ако a е базисен елемент и $1\neq a=e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m}$, то m се нарича дължина на елемента.

Определение 5: Елементите на дадена Грасманова алгебра ще наричаме грасманови числа.

Ако a е произволен елемент от Грасмановата алгебра $G(V_n)$, тогава се записва във вида

$$a=a_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_1e_2+a_4e_3+a_5e_1e_3+a_6e_2e_3+a_7e_1e_2e_3+\dots+a_{2^n-1}e_1e_2\dots e_n,$$

$a_i\in K, i=0,1,2,\dots,2^n-1.$

Нека $F\langle X\rangle$ е асоциативната алгебра с елементи $x_1,x_2,...,x_m,...\ ,x_i\in X$, където X е изброимо множество.

Определение 6: Полиномът $f(x_1,...,x_n)\in F\langle X\rangle$ се нарича полиномно тъждество в алгебрата R, ако за всеки $r_1,...,r_n\in R$ е изпълнено $f(r_1,...,r_n)=0$.

Определение 7: Ако асоциативната алгебра R удовлетворява полиномно тъждество, то R се нарича PI – алгебра (“PI”= “Polynomial Identity”).

Определение 8: Множеството $T(R)$ от всички полиномни тъждества, които се удовлетворяват от алгебрата R е идеал в свободната алгебра $F\langle X\rangle$, който се нарича *T*- идеал.

Определение 9: *T*- идеалът $T(R)$ се нарича прост, ако от $T(R_1)T(R_2)\subseteq T(R)$ следва, че $T(R_1)\subseteq T(R)$ или $T(R_2)\subseteq T(R)$.

Определение 10: Изразът $[a,b]=ab-ba$ се нарича комутатор на елементите a и b.

Пресмятанията, които се извършват за проверката на някои тъждества в матричната алгебра от втори ред с елементи от Грасманова алгебра са много дълги и отнемат много време. Нещата се усложняват многократно, когато грасмановите числа съдържат свободен коефициент или се работи в алгебра с повече образуващи. За това си поставихме задачата да направим програма на *Mathematica*, която умножава матрици с елементи грасманови числа. За целта е използвана програмата, която умножава грасманови числа.

Въведени са следните означения:

$a\wedge b$-външно умножение на грасмановите числа a и b,

$x\wedge_m y$-умножение на матриците x и y, елементите на които са грасманови числа и умножението на елементите е външното умножение.

Ето и самата програма, която умножава матрици с елементи от Грасмановата алгебра $G(V_2)$.

Започваме с подпрограма, която умножава грасманови числа.

```
BeginPackage["a∧b`"]
a∧b::usage="a∧b gives the grassmann product of a and b"
```

```
 Begin["`Private`"]
n=2
For[l=1,l≤2^n,l++,c[l]=0]
For[i=0, i<2^n,i++,
 {
   For[j=0,j < 2^n,j++,
     {
       If[BitAnd[i,j]==0,
         {
           counter = 0;
           flag = 0;
           For[k=0, k<n,k++,
             {
               If[BitAnd[i,2^k]≠0,
                 counter += flag,
                 If[BitAnd[j,2^k] ≠0, flag = flag + 1]
               ]
             }];
           If[Mod[counter,2] == 0,
             c[i+j+1]+= a[[i+1]]*b[[j+1]],
             c[i+j+1]-= a[[i+1]]*b[[j+1]]
             ];
            }]
       }]
     }];
a_∧b_=Array[c,2^n]
End[]
EndPackage[]
```

Следва подпрограмата, която умножава матрици, елементите на които са грасманови числа и умножението на елементите е външното умножение.

```
        BeginPackage["x∧m y`",{"a∧b`"}]
x∧m y::usage="x∧m y-multiplies matrices with entries grassmann numbers."

Begin["`Private`"]
x_∧m y_:={{x[[1,1]] ∧y[[1,1]]+x[[1,2]] ∧y[[2,1]],x[[1,1]] ∧y[[1,2]]+x[[1,2]] ∧y[[2,2]]},
          {x[[2,1]] ∧y[[1,1]]+x[[2,2]] ∧y[[2,1]],x[[2,1]] ∧y[[1,2]]+x[[2,2]] ∧y[[2,2]]}}
End[]
EndPackage[]
```

Ако искаме да работим в Грасманова алгебра с друг брой образуващи, достатъчно е да зададем съответната стойност на n.

Примери: I. Разглеждаме матриците

$$x = \begin{pmatrix} 1 + 2e_1 + 3e_2 + e_1 e_2 & 2 + 3e_1 + 4e_1 e_2 \\ 2 - 3e_1 + e_2 - 2e_1 e_2 & 3 + 4e_1 + 2e_2 + 6e_1 e_2 \end{pmatrix}$$ и

$y=\begin{pmatrix} 2e_1+3e_2+e_1e_2 & 3e_1+4e_1e_2 \\ -3e_1+e_2-2e_1e_2 & 4e_1+2e_2+6e_1e_2 \end{pmatrix}$. Матрицата y е с елементи, които нямат свободен коефициент.

За да приложим програмата разглеждаме елементите на x и y като наредени четворки, определени от коефициентите им.

x={{{1,2,3,1},{2,3,0,4}},{{2,-3,1,-2},{3,4,2,6}}}

y={{{0,2,3,1},{0,3,0,4}},{{0,-3,1,-2},{0,4,2,6}}}

Последователно намираме x^2; y^2; x^3; y^3; xy и yx.

1.) x^2=x $\wedge_m$ x= {{{5,4,8,9},{8,24,10,27}},{{8,0,14,5},{13,24,14,37}}}

$$\Rightarrow x^2=\begin{pmatrix} 5+4e_1+8e_2+9e_1e_2 & 8+24e_1+10e_2+27e_1e_2 \\ 8+14e_2+5e_1e_2 & 13+24e_1+14e_2+37e_1e_2 \end{pmatrix}.$$

2.) y^2= y $\wedge_m$ y= {{{0,0,0,3},{0,0,0,-3}},{{0,0,0,-1},{0,0,0,-3}}}

$$\Rightarrow y^2=\begin{pmatrix} 3e_1e_2 & -3e_1e_2 \\ -e_1e_2 & -3e_1e_2 \end{pmatrix}.$$

3.) x^3=(x $\wedge_m$ x) $\wedge_m$ x= {{{21,38,51,102},{34,127,62,151}}, {{34,25,79,99},{55,148,96,181}}}

$$\Rightarrow x^3=\begin{pmatrix} 21+38e_1+51e_2+102e_1e_2 & 34+127e_1+62e_2+151e_1e_2 \\ 34+25e_1+79e_2+99e_1e_2 & 55+148e_1+96e_2+181e_1e_2 \end{pmatrix}.$$

4.) y^3=(y $\wedge_m$ y) $\wedge_m$ y= {{0,0,0,0},{0,0,0,0}},{{0,0,0,0},{0,0,0,0}}}

$$\Rightarrow y^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.) xy=x $\wedge_m$ y= {{{0,-4,5,0},{0,11,4,13}},{{0,-5,9,-5}, {0,18,6,23}}}

$$\Rightarrow xy=\begin{pmatrix} -4e_1+5e_2 & 11e_1+4e_2+13e_1e_2 \\ -5e_1+9e_2-5e_1e_2 & 18e_1+6e_2+23e_1e_2 \end{pmatrix}$$

yx=y $\wedge_m$ x= {{0,8,3,12},{0,13,6,11}},{{0,5,5,9},{0,6,8,11}}}

$$\Rightarrow yx=\begin{pmatrix} 8e_1+3e_2+12e_1e_2 & 13e_1+6e_2+11e_1e_2 \\ 5e_1+5e_2+9e_1e_2 & 6e_1+8e_2+11e_1e_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow [x,y]=xy-yx\neq 0$. От тук можем да направим извода, че $[x,y]$ не е тъждество в алгебрата $G(V_2)$.

II. Разглеждаме матрицата

$z=\begin{pmatrix} a_1e_1+a_2e_2+a_3e_1e_2 & b_1e_1+b_2e_2+b_3e_1e_2 \\ c_1e_1+c_2e_2+c_3e_1e_2 & d_1e_1+d_2e_2+d_3e_1e_2 \end{pmatrix}$ с елементи от $G(V_2)$, но без свободен коефициент, но с произволни коефициенти от полето K.

Пресмятаме z^2; z^3; $(trz)z^2$; $z^2(trz)$; $z(trz)z$.

$z=\{\{\{0,a_1,a_2,a_3\},\{0,b_1,b_2,b_3\}\},\{\{0,c_1,c_2,c_3\},\{0,d_1,d_2,d_3\}\}\}$

Дефинираме следата на z

`trz=z[[1,1]]+z[[2,2]]` $\Rightarrow trz=\{0,\ a_1+d_1,\ a_2+d_2,\ a_3+d_3\}$.

1.) $z^2 = z\wedge_m z =$

$=\{\{\{0,0,0,-b_2c_1+b_1c_2\},\{0,0,0,-a_2b_1+a_1b_2-b_2d_1+b_1d_2\}\},\{\{0,0,0,a_2c_1-a_1c_2+c_2d_1+c_1d_2\},\{0,0,0,b_2c_1-b_1c_2\}\}\}$

.

2.) z^3 = (z $\wedge_m$ z) $\wedge_m$ z= {{{0,0,0,0},{0,0,0,0}},{{0,0,0,0},{0,0,0,0}}}.

3.) $(trz)z^2 = ((trz)z)\wedge_m z =$

={{trz $\wedge$ z[[1,1]],trz $\wedge$ z[[1,2]]},{trz $\wedge$ z[[2,1]],trz $\wedge$ z[[2,2]]}} $\wedge_m$ z=

={{{0,0,0,0},{0,0,0,0}},{{0,0,0,0},{0,0,0,0}}}.

4.) $z^2(trz) = z\wedge_m (z(trz)) =$

=z $\wedge_m$ {{z[[1,1]] $\wedge$ trz,z[[1,2]] $\wedge$ trz},{z[[2,1]] $\wedge$ trz,z[[2,2]] $\wedge$ trz}}=

= {{{0,0,0,0},{0,0,0,0}},{{0,0,0,0},{0,0,0,0}}}.

5.) $z(trz)z = z\wedge_m ((trz)z) =$

=z $\wedge_m$ {{trz $\wedge$ z[[1,1]],trz $\wedge$ z[[1,2]]},{trz $\wedge$ z[[2,1]],trz $\wedge$ z[[2,2]]}}=

= {{{0,0,0,0},{0,0,0,0}},{{0,0,0,0},{0,0,0,0}}}.

Можем да направим извода, че за произволна матрица z с елементи от $G(V_2)$, но без свободен коефициент са в сила равенствата z^3 = $trz\,z^2$ = $z^2 trz$ = $z\,trz\,z$ =0.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Drensky,V. Free Algebras and PI Algebras, Springer, Singapore,1999.

[2] Kemer,A. Ideals of Identities of Associative Algebras. Math.Monogr.vol 87, AMS, Rhode Island.

[3] Krakowski,D.,A.Regev, The polynomial identities of the Grassmann algebra,Trans. Amer. Math. Sos., 181(1973),429-438.

[4] Wolfram,St.,"Mathematica", A System for Doing Mathematics by Computer, 2-nd ed., Addision-Wesley,1993.

За контакти:

Гл.ас. Антоанета Михова, Катедра "Математичен анализ", Русенски университет "Ангел Кънчев", Тел.: 082 888727, E-mail: amihova@.ru.acad.bg.

Ст.ас. Даниела Пеева, Катедра "Математичен анализ", Русенски университет "Ангел Кънчев", Тел.: 082 888727, E-mail: dpeeva@.ru.acad.bg.

Докладът е рецинзиран.