Използване на *Mathematica* за пресмятания с грасманови числа

Антоанета Михова, Цецка Рашкова

Using Mathematica for Calculations with Grassmann numbers: *In the paper a 1-1 correspondence between the integer numbers from 0 to 2^n and the basic elements of a Grassmann algebra over a n-dimensional vector space is found. Using this correspondence a program for multiplying Grassmann numbers written in Mathematica 5.0 is done.*

Key words: *Grassmann Algebra, Grassmann numbers, Calculations with Grassmann numbers.*

В началото ще дадем определения на използваните понятия и техни свойства по [1] и [2].

Нека K е поле с характеристика 0.

Определение 1: Векторното пространство R, се нарича алгебра, ако е въведена бинарна операция "$*$"(т.е. изображение$(R,R)\to R$) , наречена умножение, така че $\forall a,b,c\in R$ и $\forall \alpha\in K$ да е изпълнено $(a+b)*c=a*c+b*c$, $c*(a+b)=c*a+c*b$, $\alpha(a*b)=(\alpha a)*b=a*(\alpha b)$. R се нарича алгебра над полето K.

Определение 2: Ако $\forall a,b,c\in R$ е изпълнено условието $(a*b)*c=a*(b*c)$, то алгебрата се нарича асоциативна.

Определение 3: Ако в алгебрата R, има единичен елемент (т.е. $\exists\, e\in R:\forall\, a\in R\Rightarrow a*e=e*a=a$), то R се нарича унитарна алгебра.

Определение 4: Изразът $[a,b]=ab-ba$ се нарича комутатор на елементите a и b.

Определение 5: Център на алгебрата R се нарича множеството $Z(R)=\{z\in R:[a,z]=0,\forall\, a\in R\}$.

Твърдение 1: Ако $char\,K=0$, то законите $a*a=0$ и $a*b=-b*a$, $a,\ b\in R$ са еквивалентни.

Доказателство:

Нека $a*a=0$, тогава $0=(a+b)*(a+b)=a*a+a*b+b*a+b*b=$ $=a*b+b*a=0\Rightarrow a*b=-b*a.$

Нека $a*b=-b*a$, ако $b=a\Rightarrow$ $a*a=-a*a$ $\Rightarrow 2a*a=0$ $\Rightarrow a*a=0$.

Определение 6: Нека V е векторно пространство с нареден базис $\{e_i, i\in I\}$. Грасманова (или външна) алгебра $G(V)$ върху V се нарича асоциативна алгебра, породена от елементите $\{e_i, i\in I\}$ с определящи съотношения $e_i*e_j+e_j*e_i=0,\ i,j\in I$. Базисните елементи $\{e_i, i\in I\}$ на векторното пространство V ще наричаме образуващи за Грасмановата алгебра $G(V)$.

Умножението в Грасмановата алгебра е известно като външно произведение (exterior product) и знакът, с който обичайно се означава е "$\wedge$" (wedge). Тогава определящите съотношения в Грасмановата алгебра можем да запишем по следния начин $e_i\wedge e_j+e_j\wedge e_i=0,\ i,j\in I$.

От Твърдение 1 и Определение 6 следва, че за образуващите на Грасмановата алгебра е в сила равенството $e_i \wedge e_i = e_i^2 = 0$.

По-нататък в работата ще изпускаме знака за умножение "$\wedge$" и вместо $e_i \wedge e_j$ ще пишем $e_i\, e_j$.

Базис на Грасмановата алгебра е множеството

$$B = \{1\} \cup \{e_{i_1}\, e_{i_2} ... e_{i_m} \,/\, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m\,,\ m = 1,2,3,\dots\}.$$

Ако a е базисен елемент и $1 \ne a = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m}$, то m се нарича дължина на елемента.

Непосредствено от горните определения следват твърденията[2]:

Твърдение 2: Ако елементът $a \in B$ (a е базисен елемент) има четна дължина, то $a \in Z(G(V))$.

Твърдение 3: Ако $a\,, b \in B$ са едновременно с нечетни дължини, то $a\,b = -b\,a$.

Твърдение 4: $\forall a,b,c \in G(V) \Rightarrow [[a\,,b\,],c] = [a\,,b\,,c] = 0$ (Това тъждество се нарича *Тъждество на Грасмановата алгебра*).

Ако V_n е крайномерно векторно пространство с размерност n, то базисът на Грасмановата алгебра $G(V_n)$ е с размерност 2^n.

Така например, ако V_2 е линейно векторно пространство с базис $\{e_1, e_2\}$, то базисът на $G(V_2)$ е множеството $B = \{1, e_1, e_2\,, e_1\, e_2\}$ и $\dim G(V_2) = 2^2 = 4$. Аналогично, ако V_3 е линейно векторно пространство с базис $\{e_1, e_2\,, e_3\}$, то базисът на $G(V_3)$ е множеството $B = \{1,\, e_1,\, e_2\,,\, e_1\, e_2\,,\, e_3\,,\, e_1\, e_3\,,\, e_2\, e_3\,,\, e_1\, e_2\, e_3\}$ и $\dim G(V_3) = 2^3 = 8$ и т. н.

Определение 7: Елементите на дадена Грасманова алгебра ще наричаме грасманови числа. Това е всяка линейна комбинация на базисни елементи от дадена Грасманова алгебра .

Поставихме си задача да напишем програма на *Mathematica ,* която да умножава грасманови числа. За целта потърсихме съответствие между целите неотрицателни числа и базисните елементи на Грасмановата алгебра. Много удобно се оказва използването на двоичния запис на целите числа. Ето и по-подробно описание на съответствието:

Нека i е цяло число, което удовлетворява условието $0 \le i \le 2^n - 1$ и $i = \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_{n(2)}$ е записът на числото в двоична бройна система, където $\alpha_i \in \{0,1\}, i = 1,\, 2, \dots,\, n.$

На всяко цяло число i, отговарящо на горното условие, съпоставяме базисния елемент $e_1^{\alpha_n}\, e_2^{\alpha_{n-1}} \dots e_{n-1}^{\alpha_2}\, e_n^{\alpha_1}$ от Грасмановата алгебра $G(V_n)$. Това съпоставяне е взаимно еднозначно определено, тъй като всяко цяло число се записва по единствен начин в двоична бройна система и всеки базисен елемент е единствен. Броят на *n*-цифрените числа , записани с цифрите 0 и 1 е 2^n, толкова е и броят на базисните елементи на Грасманова алгебра над векторно поле с размерност *n*.

Така на числото 0=$00\dots00_{(2)}$ съпоставяме елемента $e_1^0\, e_2^0 \dots\, e_{n-1}^0\, e_n^0 = 1$ и обратно на елемента $1 = e_1^0\, e_2^0 \dots\, e_{n-1}^0\, e_n^0$ съпоставяме числото $00\dots00_{(2)}$=0.

На 1=$00\ldots01_{(2)}$ съпоставяме $e_1^1\, e_2^0 \ldots e_{n-1}^0\, e_n^0 = e_1$ и обратно на $e_1 = e_1^1\, e_2^0 \ldots e_{n-1}^0\, e_n^0$ съпоставяме числото $00\ldots01_{(2)}$=1.

На 2=$00\ldots10_{(2)}$ съпоставяме $e_1^0\, e_2^1 \ldots e_{n-1}^0\, e_n^0 = e_2$ и обратно на $e_2 = e_1^0\, e_2^1 \ldots e_{n-1}^0\, e_n^0$ съпоставяме числото $00\ldots10_{(2)}$=2.

На 3=$00\ldots11_{(2)}$ съпоставяме $e_1^1\, e_2^1 \ldots e_{n-1}^0\, e_n^0 = e_1 e_2$ и обратно на $e_1 e_2 = e_1^1\, e_2^1 \ldots e_{n-1}^0\, e_n^0$ съпоставяме $00\ldots11_{(2)}$=3.

На 5=$00\ldots101_{(2)}$ съпоставяме $e_1^1\, e_2^0\, e_3^1 \ldots e_{n-1}^0\, e_n^0 = e_1\, e_3$ и обратно на $e_1\, e_3 = e_1^1\, e_2^0\, e_3^1 \ldots e_{n-1}^0\, e_n^0$ съпоставяме $00\ldots101_{(2)}$=5.

На $2^n - 1 = 11\ldots11_{(2)}$ съпоставяме елемента $e_1^1\, e_2^1 \ldots e_{n-1}^1\, e_n^1 = e_1 e_2 \ldots e_{n-1} e_n$. Обратно на елемента $e_1 e_2 \ldots e_{n-1} e_n = e_1^1\, e_2^1 \ldots e_{n-1}^1\, e_n^1$ съответства числото $11\ldots11_{(2)} = 2^n - 1$.

По този начин свързваме даден коефициент с индекс i с единствен базисен елемент. Така например коефициентът a_{12} с индекс $12 = 1100_{(2)}$ е коефициентът пред базисния елемент $e_1^0\, e_2^0\, e_3^1\, e_4^1 = e_3\, e_4$. А пред елемента $e_1\, e_5 = e_1^1\, e_2^0\, e_3^0\, e_4^0\, e_5^1$ стои коефициентът a_{17}, защото 17= $10001_{(2)}$.

Нека V_n е линейно пространство с размерност n и a е произволен елемент от Грасмановата алгебра $G(V_n)$. Тогава a се записва във вида

$$a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_1 e_2 + a_4 e_3 + a_5 e_1 e_3 + a_6 e_2 e_3 + a_7 e_1 e_2 e_3 + \cdots + a_{2^n-1} e_1 e_2 \ldots e_n,$$

$a_i \in K, i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1.$

Ще обърнем внимание на специалната наредба на събираемите. След подредените (както в множеството B) събираеми, съдържащи $e_1, e_2, \ldots, e_k$, се нарежда e_{k+1} и после следват подредените събираеми, съдържащи $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}$, след тях е e_{k+2} и т.н.

С $\widetilde{a}_i$ означаваме произведението на коефициента a_i със съответния базисен елемент. Тогава $\widetilde{a}_{12} = a_{12}\, e_3\, e_4$ и $\widetilde{a}_{17} = a_{17}\, e_1\, e_5$.

Описаното по-горе съответствие използваме при създаването на програма на продукта *Mathematica* за умножение на грасманови числа. Освен това използваме и логическата операция *BitAnd* [3], която намира приложение в много програмни езици.

Нека α и β са две цели неотрицателни числа.

Определение 8: $BitAnd[\alpha, \beta]$ е логическата операция, която извежда като резултат цяло число, което записано в двоична бройна система има 1 в позицията, където двете числа, записани в двоичен код имат единица и 0 в останалите случаи.

Примери: 1) $BitAnd[7, 13] = 5$, тъй като $7 = 0111_{(2)}$

$$13 = 1101_{(2)}$$

$$0101_{(2)} = 5.$$

2) $BitAnd[4, 5] = 4$, тъй като $4 = 100_{(2)}$

$$5 = 101_{(2)}$$

$$100_{(2)} = 4.$$

3) $BitAnd[6,9]=0$, защото $6=0110_{(2)}$

$$9=1001_{(2)}$$

$$0000_{(2)}=0.$$

Нека V_n е векторно пространство с размерност *n*. Разглеждаме два произволни елемента $a,b\in G(V_n)$ от Грасмановата алгебра над V_n.

$a=a_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_1e_2+a_4e_3+a_5e_1e_3+a_6e_2e_3+a_7e_1e_2e_3+\cdots+a_{2^n-1}e_1e_2\ldots e_n$,

$b=b_0+b_1e_1+b_2e_2+b_3e_1e_2+b_4e_3+b_5e_1e_3+b_6e_2e_3+b_7e_1e_2e_3+\cdots+b_{2^n-1}e_1e_2\ldots e_n$ и нека

$c=c_0+c_1e_1+c_2e_2+c_3e_1e_2+c_4e_3+c_5e_1e_3+c_6e_2e_3+c_7e_1e_2e_3+\cdots+c_{2^n-1}e_1e_2\ldots e_n$ е тяхното произведение.

Твърдение 5: Ако $BitAnd[i,\ j]\neq 0$, то $\widetilde{a}_i\,\widetilde{b}_j=0$.

Доказателство: От това, че $BitAnd[i,\ j]\neq 0$ и от направеното по-горе съответствие следва, че поне една образуваща ще се среща и в $\widetilde{a}_i$ и в $\widetilde{b}_j$, тогава от равенството за образуващите на Грасмановата алгебра $e_i^{\,2}=0$ следва $\widetilde{a}_i\,\widetilde{b}_j=0$.

Следствие: Ако $i+j>2^n-1$, то $BitAnd[i,\ j]\neq 0$.

В програмата, която сме направили, основно работим с индексите на коефициентите. Това е улеснението, което ни дава формулираното по-горе съответствие.

Целта ни е да пресметнем коефициентите c_k в произведението $\widetilde{c}_k$. Прилагаме Твърдение 5 и неговото следствие. Тогава $c_k=c_{i+j}=\sum\limits_{\substack{i+j=k\\ BitAnd[i,j]=0}}\left(\pm\, a_i\, b_j\right)$, където знакът е плюс, ако броят на необходимите размествания в произведението от образуващи до получаването на базисен елемент е четно число и минус, ако този брой е нечетно число.

Ето и основният модул на програмата *Mathematica*, с която се извършва умножението на грасманови числа:

```
For[i=0, i<2^n,i++,
 {   For[j=0,j < 2^n,j++,
    {  If[BitAnd[i,j]==0,
       {          counter = 0;
        flag = 0;
        For[k=0, k<n,k++,
         {              If[BitAnd[i,2^k] ≠ 0,   counter += flag,
            If[BitAnd[j,2^k] ≠ 0, flag = flag + 1]  ] }];
        If[Mod[counter,2] == 0,
          c[i+j] += a[i]*b[j],
          c[i+j] -= a[i]*b[j] ]; }] }] }]
    For[l=0, l<2^n, l++, Print["c[",l,"]=",c[l]]];
```

Примери: 1.) Разглеждаме умножението на две грасманови числа от алгебрата $G(V_2)$. Нека

$$a=2+3e_1+4e_2+5e_1e_2,\qquad b=1+3e_1+4e_2+7e_1e_2.$$

Задаваме стойности на $n=2$ и на съответните коефициенти
a[0]:=2; a[1]:=3; a[2]:=4; a[3]:=5; b[0]:=1; b[1]:=3; b[2]:=4; b[3]:=7.

След изпълнението на програмата, получаваме коефициентите на произведението c[0]:=2 ; c[1]:= 9; c[2]:= 12; c[3]:= 19. Тогава произведението на двете грасманови числа е грасмановото число

$$ab = c = 2+9e_1 + 12e_2 + 19e_1e_2.$$

2.) Разглеждаме умножението на две грасманови числа от алгебрата $G(V_3)$. Нека

$$a = 3 + e_1 - 2e_2 + 2e_1e_2 + 2e_3 + 3e_1e_3 - e_2e_3 + e_1e_2e_3$$

$$b = 3 + 3e_1 - 4e_2 + 3e_1e_2 + 2e_3 - e_1e_2e_3.$$

Задаваме стойности на $n = 3$ и на съответните коефициенти
a[0]:=3; a[1]:=1; a[2]:=-2; a[3]:=2; a[4]:=2; a[5]:=3; a[6]:=-1; a[7]:=1;
b[0]:=3; b[1]:=3; b[2]:=-4; b[3]:=3; b[4]:=2; b[5]:=0; b[6]:=0; b[7]:=-1.

След изпълнението на програмата, получаваме коефициентите на произведението c[0]= 9; c[1]= 12; c[2]= -18; c[3]= 17;
c[4]= 12; c[5]= 5; c[6]= 1; c[7]= 19.

Тогава произведението на двете грасманови числа е грасмановото число $ab = c = 9 + 12e_1 - 18e_2 + 17e_1e_2 + 12e_3 + 5e_1e_3 + e_2e_3 + 19e_1e_2e_3.$

Като продължение на направеното до тук предвиждаме умножението на грасманови числа да бъде използвано при създаването на програма на *Mathematica* за умножение на матрици с елементи от Грасманова алгебра. Тя от своя страна би улеснила проверката на тъждества в алгебрата на квадратните матрици от втори ред с елементи от Грасманова алгебра над крайномерно векторно пространство $M_2(G(V_n))$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Drensky,V. Free Algebras and PI Algebras, Springer, Singapore,1999.

[2] Krakowski,D.,A.Regev, The polynomial identities of the Grassmann algebra,Trans. Amer. Math. Sos., 181(1973),429-438.

[3] Wolfram,St.,"Mathematica", A System for Doing Mathematics by Computer, 2-nd ed., Addision-Wesley,1993.

За контакти:

Гл.ас. Антоанета Михова, Катедра "Математичен анализ", Русенски университет "Ангел Кънчев", Тел.: 082 888727, E-mail: amihova@.ru.acad.bg.

Доц.д-р Цецка Рашкова , Катедра "Алгебра и геометрия", Русенски университет "Ангел Кънчев", Тел.: 082 888489, E-mail: tsrashkova@.ru.acad.bg.

Докладът е рецензиран.
Докладът е награден с КРИСТАЛЕН ПРИЗ "The Best Paper".