Относно изучаването на темата „Определен интеграл” при студентите първокурсници*

Лиляна Каракашева

Teaching the Concept of Definite Integral to First Year University Students*: The article proposes sample collection of tasks to activate university students' development of skills to apply the Fundamental Theorem of Integral Calculus.*

Key words*: Newton-Leibnitz Theorem, Definite Integral.*

ВЪВЕДЕНИЕ

И до днес семинарното упражнение е специфично занятие, което логически продължава работата започната от лектора. Но има възможности за активно включване на студентите в дейности, които подпомагат задълбоченото осмисляне на основните твърдения доказани на лекции, чрез разглеждане на конкретни приложения.

Предложеният примерен набор от достъпни задачи от темата „Определен интеграл” стимулира и насочва студентите да използват теоремата на Нютон-Лайбниц.

За яснота на изложението ще припомним тази

Теорема. Нека функцията $f:\Delta\to\Re$ е дефинирана в интервала Δ и интегрируема във всеки ограничен и затворен подинтервал на Δ и нека $a\in\Delta$. Тогава функцията $F:\Delta\to\Re$, дефинирана с равенството $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ е диференцируема във всяка точка $x_0\in\Delta$, в която f е непрекъсната и е в сила равенството $F^{'}(x_0)=f(x_0)$.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Задача 1.

а) Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a,b]$ и функцията φ: $[c,d]\to[a,b]$ е диференцируема. Да се докаже, че функцията $F:[c,d]\to\Re$, дефинирана чрез равенството $F(x)=\int\limits_r^{\varphi(x)} f(t)dt$, $r\in[a,b]$ е диференцируема и $F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

б) Нека функцията f е непрекъсната в $[-1,1]$. Покажете, че функцията F дефинирана чрез равенството $F(x)=\int\limits_0^{\sin x} f(t)dt$ е диференцируема и $F'(x)=\cos x\ f(\sin x)$.

в) Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a,b]$ и функцията $\psi:[c,d]\to[a,b]$ е диференцируема. Да се докаже, че функцията $F:[c,d]\to\Re$, дефинирана чрез равенството $F(x)=\int\limits_{\psi(x)}^{r} f(t)dt$, $r\in[a,b]$ е диференцируема и $F'(x)=-f(\psi(x))\psi'(x)$.

***Изследването е частично финансирано от проект РД-05-476/07.05.2008.**

г) Намерете производната на функцията $F(x)=\int\limits_{\ln x}^{1}\frac{e^t}{t}dt$.

д) Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a,b]$ и функциите $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ и $\psi:[c,d]\to[a,b]$ са диференцируеми. Да се докаже, че функцията $F:[c,d]\to\Re$, дефинирана чрез равенството $F(x)=\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt$ е диференцируема. Намерете $F'(x)$.

е) Намерете производната на функцията $F(x)=\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\frac{\cos t}{t}dt$.

Решение.

а) Нека $F(u)=\int\limits_{r}^{u}f(t)dt$. Тогава от цитираната по-горе теорема следва, че F е диференцируема и $F'(u)=f(u)\quad \forall u\in[a,b]$. Но $F(x)=F(\varphi(x))$ и понеже φ е диференцируема, то по правилото за диференциране на съставна функция намираме, че $F'(x)=F'(\varphi(x)).\varphi'(x)=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.

б) Понеже функцията f е непрекъсната в интервала $[-1,1]$, то функцията F е диференцируема и $F'(x)=f(\sin x).(\sin x)'=\cos x\ f(\sin x)$.

в) Чрез представянето $F(x)=-\int\limits_{r}^{\psi(x)}f(t)dt$, $r\in[a,b]$ е възможно директно да се приложи извода от подточка а) и да се заключи, че F е диференцируема и $F'(x)=-f(\psi(x))\psi'(x)$.

г) Прилагайки получените резултати от подточка в) можем да запишем, че

$$F'(x)=-\frac{e^{\ln x}}{\ln x}(\ln x)'=-\frac{1}{\ln x}.$$

д) Нека $p\in[a,b]$. Тогава $F(x)=\int\limits_{\psi(x)}^{p}f(t)dt+\int\limits_{p}^{\varphi(x)}f(t)dt$ и използвайки изводите от подточки а) и в) получаваме, че F е диференцируема и $F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$.

е) Полученият резултат използваме за намирането на F' от тази подточка. И така

$$F'(x)=-\frac{\cos(\cos x)}{\cos x}\sin x-\frac{\cos(\sin x)}{\sin x}\cos x=-\cos(\cos x)tgx-\cos(\sin x)ctgx.$$

Друго приложение на доказаните твърдения от задача 1 е следната задача, в която се използва изучената през първия семестър теорема на Лопитал.

Задача 2. Намерете

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_{0}^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\int\limits_{0}^{\sin x}\sqrt{tgt}\,dt}{\int\limits_{0}^{tgx}\sqrt{\sin t}\,dt}$.

Задача 3 . Нека $k\in\Re$ и $k>0$. За всяко $x>0$ да разгледаме функцията

$$F(x)=\int\limits_{0}^{1}s^k\sin(sx)ds.$$

а) Покажете, че е изпълнено $F(x)=\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x t^k \sin t \, dt$;

б) Докажете, че функцията F е диференцируема за $x>0$ и удовлетворява уравнението $xF'(x)+(k+1)F(x)=\sin x$ за $\forall x>0$ $(x\in\Re)$.

Решение.

а) Полагаме $t=sx$ и получаваме, че $\int_0^1 s^k \sin(sx)ds=\int_0^x \frac{t^k}{x^{k+1}}\sin t dt=\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x t^k \sin t dt$

Следователно $F(x)=\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x t^k \sin t \, dt$.

б) Понеже функцията $t^k \sin t$ е дефинирана и непрекъсната върху интервала $[0,x]$, то функцията $\int_0^x t^k \sin t \, dt$ е диференцируема и нейната производна е $x^k \sin x$. Но функцията F е произведение на две диференцируеми функции и следователно тя също е диференцируема и нейната производна е $F'(x)=\frac{1}{x^{k+1}}x^k \sin x-\frac{k+1}{x^{k+2}}\int_0^x t^k \sin t \, dt$.

От тук получаваме, че $F'(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{k+1}{x}F(x)$.

Следователно $xF'(x)+(k+1)F(x)=\sin x$.

Този примерен набор от задачи може да бъде продължен със задачи от [1] и [2].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разглеждането на подобен набор от задачи способства за неформално овладяване на теоретичния материал, подпомага формирането на умения за извършване на математически дейности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Каракашева, Л., Система от задачи за активиране самостоятелната работа на студентите, Научно- приложна конференция с международно участие, Ямбол, 2004, стр. 172-176.

[2] Проданов, Ив. и др., Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане, С., 1976.

За контакти:

гл. ас. Лиляна Методиева Каракашева, кат. „Математически анализ”, Факултет по математика и информатика, ШУ „Еп. Константин Преславски”,тел. 054 830495
e-mail: lkarakasheva@mail.bg

Докладът е рецензиран.