Тригонометрични функции от матрици

Георги Георгиев, Цветелина Динкова, Милена Михайлова, Иван Иванов

Trigonometric Functions of Matrices: *The work presents a practical way for studying of trigonometric functions of matrices by the use of MATLAB. This area of matrix calculus is useful for the students in Economics and Engineering.*

Key words: *Functions of Matrices, Minimal Polynomial of a Matrix, Lagrange-Sylvester polynomial.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Изучаването на матричното смятане се улеснява чрез използване на системата MATLAB. Това е особено подходящо при обучение на студенти от икономически и инженерни специалности. В частност, тригонометричните функции от матрици могат да се разглеждат в курса по Линейна алгебра и аналитична геометрия. Един начин за реализиране на тази възможност е и основната цел на настоящата работа. Функциите от матрици се разглеждат от много автори (виж например [2] и [3]).

ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Определение за функция от матрица. Нека е дадена квадратна матрица A от ред *n* и $f(t)$ е функция на скаларен аргумент *t*. Следвайки [1] определяме матрицата $f(A)$ в две последователни стъпк**и:**

1.1 Нека $f(t)=\gamma_0 t^l+\gamma_1 t^{l-1}+...+\gamma_l$ е произволен полином на *t*, тогава матрицата $f(A)=\gamma_0 A^l+\gamma_1 A^{l-1}+...+\gamma_l E$ се получава като заместим в $f(t)$ скаларния аргумент t с матричен *A* и означим с E единичната матрица от ред n. Пресмятането на матрицата $f(A)$ със системата MATLAB става чрез вградените функции polyvalm и sym2poly .

Пример 1. Да се намери матрицата $f(A)$, където $f(t)=2t^2-3t+1$ и

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 3 & 2 & -2\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

```
>> syms t
>> f=2*t^2-3*t+1;  A=[-1 4 2;3 2 -2;1 -1 5]; FA=polyvalm(sym2poly(f),A)
FA =
        34   -8   -6
        -7   31  -10
        -1   -3   44
```

1.2 Нека $f(t)$ е произволна функция на t. Да определим матрицата *f(A)* с равенството *f(A)=r(A)* по следния начин : ако $t_1,t_2,...,t_s$ са всички различни собствени стойности на A съответно с кратности $m_1, m_2, ..., m_s$ и $m(t)=(t-t_1)^{m_1}(t-t_2)^{m_2}...(t-t_s)^{m_s}$ е минималният полином на A от степен $m=\sum_{k=1}^{s} m_k$, то $r(t)=\sum_{k=1}^{s}[\alpha_{k_1}+\alpha_{k_2}(t-t_k)+...+\alpha_{k_{m_k}}(t-t_k)^{m_k-1}]g_k(t)$ е интерполационния полином на Лагранж–Силвестър , $g_k(t)=\dfrac{m(t)}{(t-t_k)^{m_k}}$,

$\alpha_{k_j} = \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{f(t)}{g_k(t)}\right]^{(j-1)}_{t=t_k}, (j=1,2,...,m_k; k=1,2,...,s)$. Необходимо е функцията $f(t)$ да е определена върху спектъра на матрицата A.

Пример 2. Да се пресметнат матриците sin(Ax), cos(Ax), arcsin(Ax), arccos(Ax), sin(2Ax), cos(2Ax), sin(3Ax), cos(3Ax), arcsin($\sqrt{Ax}$) за произволно $x \in R$, където $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Намираме минималния полином на матрицата Ax чрез вградената в *Matlab* функция *minpoly* и пресмятаме *r(t)* интерполационния полином на Лагранж–Силвестър за произволна функция *f(t)*, определена в точките *2x*, *5x*, *8x* (собствените стойности на матрицата Ax).

```
>> syms t x
>> A=[5 -2 -2;-2 6 0;-2 0 4];  Ax=A.*x;

function m=minpoly(Ax)            %пресмята минималния полином на матрицата Ax
syms x t
m=maple('minpoly',Ax,t);
m=factor(m);                      %представя m като произведение от прости множители

>> m=minpoly(Ax)
m =
(t-8*x)*(t-5*x)*(t-2*x)

>> v=eig(Ax)
 v =
[ 5*x]
[ 2*x]
[ 8*x]

>> t1=v(1); t2=v(2); t3=v(3);
```

function g=gk(m,tk,mk) %пресмятя полинома $g_k(t) = \frac{m(t)}{(t-t_k)^{m_k}}$

```
syms x t
g=factor(simple(m/(t-tk)^mk));

>> g1=gk(m,t1,1)
 g1 =
(-t+8*x)*(-t+2*x)

>> g2=gk(m,t2,1)
 g2 =
 (-t+8*x)*(-t+5*x)

>> g3=gk(m,t3,1)
g3 =
 (-t+2*x)*(-t+5*x)
>> f=sym('f(t)');
```

```
>> a11=subs(f/g1,t,5*x);  a21=subs(f/g2,t,2*x);  a31=subs(f/g3,t,8*x);
>> r=collect(a11*g1+a21*g2+a31*g3,t); r=simple(r)
r =
     5/9*f(8*x)+20/9*f(2*x)-16/9*f(5*x)+(-7/18*f(8*x)+10/9*f(5*x)-13/18*f(2*x))*t/x+(-
1/9*f(5*x)+1/18*f(8*x)+1/18*f(2*x))*t^2/x^2

>> E=sym(eye(3));  f2=subs(f,t,2*x);  f5=subs(f,t,5*x);  f8=subs(f,t,8*x);
```

2) След заместване в $r(t)$ $t \to Ax$ получаваме матрицата $f(Ax)$.

```
>>fA=(5/9*f8+20/9*f2-16/9*f5).*E+((-7/18*f8+10/9*f5-13/18*f2)/x).*Ax+((-
1/9*f5+1/18*f8+1/18*f2)/x^2).*Ax^2;  fA=simple(fA)
fA =
     [   4/9*f(8*x)+4/9*f(2*x)+1/9*f(5*x),    -4/9*f(8*x)+2/9*f(5*x)+2/9*f(2*x),   -2/9*f(8*x)-
2/9*f(5*x)+4/9*f(2*x)          ]
     [    -4/9*f(8*x)+2/9*f(5*x)+2/9*f(2*x),          4/9*f(8*x)+1/9*f(2*x)+4/9*f(5*x),    -
4/9*f(5*x)+2/9*f(8*x)+2/9*f(2*x)]
     [         -2/9*f(8*x)-2/9*f(5*x)+4/9*f(2*x),          -4/9*f(5*x)+2/9*f(8*x)+2/9*f(2*x),
1/9*f(8*x)+4/9*f(2*x)+4/9*f(5*x)]
```

3)Последователно в fA полагаме $f(t)=\sin(t)$, $f(t)=\cos(t)$, $f(t)=\arcsin(t)$, , $f(t)=\sin(2t)$, $f(t)=\arccos(t)$ $f(t)=\cos(2t)$, $f(t)=\sin(3t)$, $f(t)=\cos(3t)$, $f(t)=\arcsin\sqrt{t}$ получаваме матриците sin(Ax)=sinA, cos(Ax)=cosA, arcsin(Ax)=arcsinA, arccos(Ax)=arccosA , sin(2Ax)=sin2A, cos(2Ax)=cos2A, sin(3Ax)=sin3A, cos(3Ax)=cos3A, arcsin($\sqrt{Ax}$)=arcsinsqrtA.

```
>> sinA=subs(fA,{f2,f5,f8},{sin(2*x),sin(5*x),sin(8*x)})
sinA =
[       4/9*sin(8*x)+4/9*sin(2*x)+1/9*sin(5*x),    -4/9*sin(8*x)+2/9*sin(5*x)+2/9*sin(2*x),    -
2/9*sin(8*x)-2/9*sin(5*x)+4/9*sin(2*x)]
[   -4/9*sin(8*x)+2/9*sin(5*x)+2/9*sin(2*x),        4/9*sin(8*x)+1/9*sin(2*x)+4/9*sin(5*x),    -
4/9*sin(5*x)+2/9*sin(8*x)+2/9*sin(2*x)]
[       -2/9*sin(8*x)-2/9*sin(5*x)+4/9*sin(2*x),        -4/9*sin(5*x)+2/9*sin(8*x)+2/9*sin(2*x),
1/9*sin(8*x)+4/9*sin(2*x)+4/9*sin(5*x)]

>>  cosA=subs(fA,{f2,f5,f8},{cos(2*x),cos(5*x),cos(8*x)})
cosA =
[     4/9*cos(8*x)+4/9*cos(2*x)+1/9*cos(5*x),   -4/9*cos(8*x)+2/9*cos(5*x)+2/9*cos(2*x),   -
2/9*cos(8*x)-2/9*cos(5*x)+4/9*cos(2*x)]
[   -4/9*cos(8*x)+2/9*cos(5*x)+2/9*cos(2*x),      4/9*cos(8*x)+1/9*cos(2*x)+4/9*cos(5*x),   -
4/9*cos(5*x)+2/9*cos(8*x)+2/9*cos(2*x)]
[      -2/9*cos(8*x)-2/9*cos(5*x)+4/9*cos(2*x),      -4/9*cos(5*x)+2/9*cos(8*x)+2/9*cos(2*x),
1/9*cos(8*x)+4/9*cos(2*x)+4/9*cos(5*x)]

>>  arcsinA=subs(fA,{f2,f5,f8},{asin(2*x),asin(5*x),asin(8*x)}) ;

>> arccosA=subs(fA,{f2,f5,f8},{acos(2*x),acos(5*x),acos(8*x)});

>> sin2A=subs(fA,{f2,f5,f8},{sin(2*2*x),sin(2*5*x),sin(2*8*x)}) ;

>> cos2A=subs(fA,{f2,f5,f8},{cos(2*2*x),cos(2*5*x),cos(2*8*x)}) ;

>> sin3A=subs(fA,{f2,f5,f8},{sin(3*2*x),sin(3*5*x),sin(3*8*x)}) ;
```

```
>> cos3A=subs(fA,{f2,f5,f8},{cos(3*2*x),cos(3*5*x),cos(3*8*x)});

>> arcsinsqrtA=subs(fA,{f2,f5,f8},{asin(sqrt(2*x)),asin(sqrt(5*x)),asin(sqrt(8*x))})
arcsinsqrtA =
[ 4/9*asin(2*2^(1/2)*x^(1/2))+4/9*asin(2^(1/2)*x^(1/2))+1/9*asin(5^(1/2)*x^(1/2)), -4/9*asin(2*2^(1/2)*x^(1/2))+2/9*asin(5^(1/2)*x^(1/2))+2/9*asin(2^(1/2)*x^(1/2)), -2/9*asin(2*2^(1/2)*x^(1/2))-2/9*asin(5^(1/2)*x^(1/2))+4/9*asin(2^(1/2)*x^(1/2))]
[ -4/9*asin(2*2^(1/2)*x^(1/2))+2/9*asin(5^(1/2)*x^(1/2))+2/9*asin(2^(1/2)*x^(1/2)), 4/9*asin(2*2^(1/2)*x^(1/2))+1/9*asin(2^(1/2)*x^(1/2))+4/9*asin(5^(1/2)*x^(1/2)), -4/9*asin(5^(1/2)*x^(1/2))+2/9*asin(2*2^(1/2)*x^(1/2))+2/9*asin(2^(1/2)*x^(1/2))]
[ -2/9*asin(2*2^(1/2)*x^(1/2))-2/9*asin(5^(1/2)*x^(1/2))+4/9*asin(2^(1/2)*x^(1/2)), -4/9*asin(5^(1/2)*x^(1/2))+2/9*asin(2*2^(1/2)*x^(1/2))+2/9*asin(2^(1/2)*x^(1/2)), 1/9*asin(2*2^(1/2)*x^(1/2))+4/9*asin(2^(1/2)*x^(1/2))+4/9*asin(5^(1/2)*x^(1/2))]
```

2. Основни свойства на функция от матрица.

Следващите свойства са от [1].

Свойство 1. Нека $G(u_1,u_2,...,u_s)$ е полином на променливите $u_1,u_2,...,u_s$ и функциите $f_1(t)$, $f_2(t)$,…, $f_s(t)$ са определени върху спектъра на матрицата A. Ако функцията $g(t)=G\ (f_1(t),\ f_2(t),\dots,\ f_s(t))$ е нула върху спектъра на A и B_j= $f_j(A)$, $j\in${1, 2, …, s}, то $G(B_1,\ B_2,...,\ B_s)=0$.

Свойство 2. Ако съставната функция $g(t)=h[f(t)]$ е определена върху спектъра на матрицата A, то $g(A)=h[f(A)]$ т.е. $g(A)=h(B)$, където $B=f(A)$.

Доказателствата на тези свойства са дадени в Глава V на книгата [1] . Същите свойства са формулирани и използвани в [2] .

Пример 3. Ще проверим че за получените в Пример 2, матрици са в сила следните тригонометрични матрични равенства:

$\sin^2(Ax)+\cos^2(Ax)=E$, $\sin(2Ax)=2\sin(Ax)\cos(Ax)$, $\cos(2Ax)=\cos^2(Ax)-\sin^2(Ax)$,

$\sin(3Ax)=3\sin(Ax)-4\sin^3(Ax)$, $\cos(3Ax)=4\cos^3(Ax)-3\cos(Ax)$

Резултатите в примера са илюстрация на свойство1:

```
>> O=simple(sinA^2+cosA^2-E);              където  O=
>> O=simple(2.*sinA*cosA-sin2A) ;                     [ 0, 0, 0]
>> O=simple(cosA^2-sinA^2-cos2A);                     [ 0, 0, 0]
>> O=simple(sin3A-3.*sinA+4.*sinA^3);                 [ 0, 0, 0]
>> O=simple(cos3A-4.*cosA^3+3.*cosA);
```

3.Пресмятане на sin(A) , cos(A), arcsin(A), arccos(A) със системата MATLAB.

Функцията funm(A,@fun) пресмята матричната версия на функцията fun от квадратна матрица A. В скобите fun се замества с конкретната функция, например sin, cos, arcsin,… . Името на функцията се предхожда от "@". За матрицата A от Пример 2 последователно получаваме

```
>>  sinA_=funm(A,@sin);  cosA_=funm(A,@cos);
>> B=funm(sinA_,@asin)

B =
    0.9980   -0.6647    0.4759
   -0.6647    0.1898    1.1406
    0.4759    1.1406    0.0954
```

Но $\arcsin(\sin(A)) = B \neq A$, т.е. вградените в MATLAB функции не дават точни резултати.

4. Тригонометрични уравнения.

Естествено възниква въпросите: можем ли да намерим решение на матричното уравнение $\sin^2(X) = A$ и дали матрицата $X = \arcsin\sqrt{A}$ е негово решение? Свойство 2 дава положителен отговор и на двата въпроса. За матрицата A от Пример 2 последователността от команди извежда като резултат матрицата A :

>> X=arcsin sqrtA; X1=subs(X,'x',1); sinX=funm(X1,@sin); sinX^2 .

По аналогичен начин можем да намерим решение на матричните уравнения :

$$-4\sin^3(X) + 3\sin(X) = A,\ X = \frac{\arcsin(A)}{3}\ ;\ 4\cos^3(X) - 3\cos(X) = A,\ X = \frac{\arccos(A)}{3}\ .$$

Отново извършвайки проверка с помощта на вгадените в MATLAB функции получаваме като резултат матрицата A :

>> X=arcsinA./3; X1=subs(3.*X,'x',1); sinX1=funm(X1,@sin) .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вградения програмен език на MATLAB дава възможност на всеки потребител да създава свои собствени програми и функции , които да работят с необходимата за целта точност. Веднъж написани, тези програми и функции се изпълняват по същия начин както и останалите.

От получените в изложението резултати може да се направи следния извод: вградената в MATLAB функция $\mathrm{funm}(\mathrm{A}, @\mathrm{fun})$ за пресмятане на функция от числена матрица A , е основана на Жордановата канонична форма и не е подходяща за целочислени пресмятания. Причината за това са закръглянията които системата прави, независимо от входните числени данни. Така и най-малките грешки променят жордановата структура на дадената матрица. Описания в Пример 2 метод работи със символни матрици без закръгляния, което води до точност на резултатите.

Благодарности. Работата е частично финансирана по проекти РД-05-474/07.05.2008 и РД-05-475/07.05.2008 на Шуменски Университет

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Р. Грантахер. Теория матриц . 5 изд. ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2004.

[2] М. Л. Маринов. Пресмятане на функция от матрица с *Mathematica.* Математика и математическо образование, 34 пролетна конференция на СМБ, 2008, 374-380.

[3] N. J. Higham. Functions of Matrices. Theory and Computation. SIAM, Philadelphia,PA, 2008.

За контакти:

Доц. д-р Георги Христов Георгиев, ас. Цветелина Лъчезарова Динкова, ас. Милена Николова Михайлова, ас. Иван Славейков Иванов, Катедра “Алгебра и геометрия”, ФМИ, Шуменски университет “Епископ Константин Преславски”, e-mails: g.georgiev@fmi.shu-bg.net; cvetelina_d@abv.bg; nicolova_m@abv.bg; slaveicov@abv.bg.

Докладът е рецензиран.