Разбивания на множествата от думите с фиксирани дължини

Михаил К. Кирилов

Splitting on sets of words with fixed length: *The paper considers some subsets of the words with fixed length we got by finite automaton of Mili such as fixed, periodical, possibly fixed, possibly periodical etc.*
Key words: *automaton, fixed word, periodical word, possibly fixed, possibly periodical.*

ВЪВЕДЕНИЕ

На основата на единния подход към динамичните системи и крайните автомати [7,8] и на разгледаните в [2,3,4,6,10] обобщения в тази работа се разглежда дискретна обща динамична система, породена от еднозначен краен автомат. За откриването на множествата на неподвижните,периодичните, евентуално неподвижните и евентуално периодичните думи е изпозлван програмен продукт[3].

Крайният автомат е абстрактен математически обект, определен [1,3,8,9] като наредена шесторка $(Q, V, W, q_0, \delta, \lambda)$. Q е множеството на вътрешните състояния, V е входната азбука, W е изходната азбука, $\delta : Q \times V \to Q$ е функцията на преходите, $\lambda : Q \times V \to W$ е функцията на изходите, $q_0 \in Q$ е начално вътрешно състояние.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Дефиниция 1

Казва се, че думата $\alpha \in V^*$ е неподвижна дума за изображението φ породено от автомат на Мили, ако $\varphi(\alpha) = \alpha$. Множеството от всички неподвижни думи с дължина m се означава с F^m.

Дефиниция 2

Казва се, че числото $T \in N$ е период за изображението φ и думата α, ако $\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{T-пъти}(\alpha) = \alpha$ (T е най – малкото възможно естествено число)

За α се казва, че е периодична дума с период T. С P_i^m се означава множеството на периодичните думи с период i и дължина *m* $(T = i)$; $\left|P_i^m\right|$ - брой на периодичните думи с период i и дължина *m*. Така P_1^m е множеството на периодичните думи с период 1 (T=1) и дължина *m*, т.е. неподвижните думи ($P_1^m = F^m$); $\left|P_1^m\right|$ - брой на периодичните думи с период 1 и дължина *m* (T=1) (брой на неподвижните думи $|F| = |P_1|$); Използвано е още означението $P_{i,k}^{m,j}$ - множеството $\varphi^{-j}(\alpha_{i,k})$, където k е поредността на думата от множеството P_i^m, а *j* е броят на обратните итерации.

Дефиниция 3

Казва се, че думата $\alpha \in V^*$, която не е неподвижна, е евентуално неподвижна за изображението φ, породено от автомата на Мили, свързана с думата β, ако $\exists k \in N$, така че $\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k}(\alpha) = \beta$. Множеството от всички евентуално неподвижни думи с дължина m, свързани с думата β, се означава с $F_\beta{}^m$.

Дефиниция 4

Казва се, че думата $\alpha \in V^*$, която не е периодична, е евентуално периодична, относно периодичната дума β, ако $\exists k \in N$, така че $\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k}(\alpha) = \beta$.

Множеството от всички евентуално периодични думи с дължина m, относно периодичната дума β с период *T*, се означава с $P^m_{\beta,T}$.

Лема 1 (За обратните автоматни изображения)

Нека $M = (Q, V, V, q_0, \delta, \lambda)$ е автомат на Мили с входна азбука *V*, $|V| = n$, а $\alpha_i \ (i = 1,2,...,m), |\alpha_i| = p$ са всички периодични думи с период T (за автоматното изображение $\varphi : V^* \to V^*$, породено от *M*).

Твърди се, че:

1) $\exists k \in N, \exists i \in \Delta m = \{1,2,...,m\}$ така, че $\varphi^{-kT}(\alpha_i) \neq \varnothing$, но $\varphi^{-sT}(\alpha_i) = \varnothing$ за $\forall i \in \Delta m, \forall s > k$.

2) $\varphi^{-sT}(\alpha_i) \cap \varphi^{-qT}(\alpha_j) = \begin{cases} \varnothing, & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ \alpha_i, & i = j \end{cases}$, където $i, j \in \Delta m$

3) $\left| \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{s=1}^{k} \varphi^{-sT}(\alpha_i) \right) \right| = p^n - (k-1)m$

Доказателство

1) Тъй като всички множества $\varphi^{-sT}(\alpha_i), (i \in \Delta m)$ са краен брой и всеки две имат най-много един общ елемент, то $\exists k \in N$ така, че поне едно $\varphi^{-kT}(\alpha_i) \neq \varnothing$ и за $\forall i \in \Delta m, \forall s > k \ \ \varphi^{-sT}(\alpha_i) = \varnothing$

2) Нека $\alpha_i \in V^*, |\alpha_i| = n$ е *T*-периодична дума за φ. Сега $\varphi^{sT}(\alpha_i) = \alpha_i$ $\Rightarrow \alpha_i \in \varphi^{-sT}(\alpha_i)$.

Да допуснем, че $\alpha \in V^*, \alpha \in \varphi^{-sT}(\alpha_i) \cap \varphi^{-qT}(\alpha_j), i \neq j$ и $s < q$.

Сега $\varphi^{sT}(\alpha) = \alpha_i$ и $\varphi^{(s+1)T}(\alpha) = \varphi^{T}(\alpha_i) = \alpha_i$. Така $\varphi^{qT}(\alpha) = \alpha_i$ и $\varphi^{qT}(\alpha) = \alpha_j$, което противоречи на $\alpha_i \neq \alpha_j$.

Следователно при $i \neq j$ е изпълнено 2).

Да допуснем, че $\varphi^{-sT}(\alpha_i)$ и $\varphi^{-qT}(\alpha_i)$, при фиксирано $i \in \Delta m$, имат друг общ елемент β освен α_i. Сега β е *T*-периодична дума, различна от α_i, т.е. $\exists i \neq j, \beta = \alpha_j$ и $\forall \lambda : \varphi^{\lambda T}(\beta) = \alpha_j \neq \alpha_i$, но това е противоречие $\Rightarrow$ 2) е изпълнено и за $i = j$.

3) Тъй като броят на всички *p*-буквени думи α от *n*-буквената азбука *V* е p^n, а думите $\alpha_i, i \in \Delta m$ се срещат *m.k* пъти (по една във всяко от множествата $\varphi^{-sT}(\alpha_i)$), то броят на елементите на обединението е $p^n - (k-1)m$, т.е. $\left| \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{s=1}^{k} \varphi^{-sT}(\alpha_i) \right) \right| = p^n - (k-1)m$.

С това лемата е доказана.

Теорема 1(за биективност) Автоматното изображение е биективно точно тогава, когато всеки стълб $(b_1, b_2, ..., b_n), b_i \in V$ от таблицата на изходите е пермутация (без повторение) на буквите от *V* - $(a_1, a_2, ..., a_n)$, т.е. всички букви от произволен стълб са различни.

Доказателство

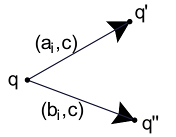
Необходимост

Нека имаме азбуката $V = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $a_i, i = 1, ..., n$ са букви от нея, $|V| = n$, $q_i \in Q, |Q| = m+1$ на брой вътрешни състояния.

Фиг.1 Биективност на автоматното изображение

M	q_0	q_1	**...**	q_j	**...**	q_m
a_1	(q_{01}, a_{01})	(q_{11}, a_{11})	**...**	(q_{j1}, a_{j1})	**...**	(q_{m1}, a_{m1})
a_2	(q_{02}, a_{02})	(q_{12}, a_{12})	**...**	(q_{j2}, a_{j2})	**...**	(q_{m2}, a_{m2})
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	**...**	$\vdots$	**...**	$\vdots$
a_k	(q_{0k}, a_{0k})	(q_{1k}, a_{1k})	**...**	(q_{jk}, a_{jk})	**...**	(q_{mk}, a_{mk})
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	**...**	$\vdots$	**...**	$\vdots$
a_n	(q_{0n}, a_{0n})	(q_{1n}, a_{1n})	**...**	(q_{jn}, a_{jn})	**...**	(q_{mn}, a_{mn})

Имаме $\delta(q_i, a_j) = q_{ij}$; $\lambda(q_i, a_j) = a_{ij}$; $\lambda(q, a_i) = \lambda(q, b_i)$.



$a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{is} \xrightarrow{\varphi^{-1}} a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{js}$???

q' : $\delta(q_0, a_{j1}) = q_{j1}$; $\delta(q_{j1}, a_{j2}) = q_{j2}$; $\delta(q_{j2}, a_{j3}) = q_{j3}$

q'': $\lambda(q_0, a_{j1}) = a_{i1}$; $\lambda(q_{j1}, a_{j2}) = a_{i_2}$; $\lambda(q_{j2}, a_{j3}) = a_{i3}$

Но $(a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn})$ е пермутация на $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Достатъчността се установява по подобен начин.

С това теоремата е доказана.

Следствие 1. Ако съществува евентуално неподвижна (периодична) дума $\alpha \in V_n^*$, то *f* не е биективно автоматно изображение.

Очевидно е, че от $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) \neq f(f(x_2))$.

Следствие 2. Ако *f* е биективно, то f^2 е също биективно (f^k също е биективно).

Доказателство

Ако $x \neq y$, то $x_1 = f(x) \neq f(y) = y_1$ и $f^2(x) = f(x_1) \neq f(y_1) = f^2(y)$.

Освен това $\forall x, \exists y_1$ такова, че $f(y_1) = x$, но $\forall y_1, \exists y$ такова, че $f(y) = y_1$.

Тогава $f(y_1) = f(f(y)) = f^2(y) = x \Rightarrow$ За $\forall x, \exists y$ такова, че $f^2(y) = x$. От тук следва, че f^2 е биекция. Аналогично получаваме, че f^k е биекция.

С това следствието е доказано.

Лема 2 Ако автоматното изображение f е биективно и α е периодична дума с период *T*, то множеството от евентуално периодични думи, свързани с α, е празно.

Доказателство

Нека множеството от евентуално периодични думи, свързани с α, не е празно. Тогава имаме $x_1, f(x_1) = x_2, f^2(x_1) = x_3, ..., f^{m-1}(x_1) = x_m, f^m(x_1) = x_1, ...$

Нека $f^k(x) = x_1; f^{pm}(x_1) = x_1$, $k = mp + q, 0 \le q \le m-1$.

Тогава $f^k(x) = f^q\left(f^{pm}(x)\right)$.

Имаме, че $f(x_{m-q}) = x_{m+1-q}$, $f^2(x_{m-q}) = x_{m+2-q}, ..., f^q(x_{m-q}) = x_{m+q-q} = x_m$.

$\Rightarrow f^{q+1}(x_{m-q}) = x_1$ и $f^q(x_{m-q+1}) = x_1$,

т.е. $\left| \begin{array}{l} f^k(x_{m-q+1}) = f^{mp}\left(f^q(x_{m-q+1})\right) = f^{mp}(x_1) = x_1 \\ f^q(x_{m-q+1}) = x_1 \end{array} \right.$,

така получаваме

$\left| \begin{array}{l} f^k(x_{m-q+1}) = x_1 \\ f^k(x) = x_1 \end{array} \right. \Rightarrow f^k$ не е биективно, което е противоречие.

С това лемата е доказана.

Следствие 3. Всяка дума от V^* (с фиксирана дължина) е периодична (или неподвижна).

Теорема 2. Ако за $\forall j \in \Delta(m+1)$ $\exists i \in \Delta n$ така, че $\lambda(q_i, a_i) = a_i$, то множеството *F* за автомата на Мили *M* не е празно.

Доказателство:

При $j = 0$ $\exists i_0 \in \Delta n$ такова, че $\lambda(q_0, a_{i0}) = a_{i0}$. Нека $\delta(q_0, a_{i0}) = q_{j1}$, $j_1 \in \Delta m$.

Щом $j_1 \in \Delta(m+1)$, $\exists i_1 \in \Delta n$ такова, че $\lambda(q_{j1}, a_{i_1}) = a_{i_1}$, $\delta(q_{j1}, a_{i_1}) = q_{j2}$ ... $\lambda(q_{i_s}, a_{i_s}) = a_{i_s}$. Думата $\alpha = a_{i_0} a_{i_1} ... a_{i_s}$ е неподвижна за φ, т.е. $\alpha \in F$ и $F \ne$ Ø.

С това теоремата е доказана.

Теорема 3. Нека V_n^* е множеството от всички думи с дължина $n\left(V_n^* \subset V^*\right)$; *F* е множеството от неподвижни думи $(F = P_1)$; $P_{i,j}$ - *j*-тия елемент от множеството от периодични думи с период *i*; $\left|P_{i,j}\right| = i, i = 1, ..., m_2$, $j = 1, 2, ..., m_1$

Ако f е биективно автоматно изображение, то $V_n^* = F \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^{m_1} \left\{ \bigcup_{i=1}^{m_2} P_{i,j} \right\} \right\}$

Следствие 4. Условие за съществуване на евентуално периодични думи е поне едно $P_{i,j} \ne$ Ø.

Теорема 4: Нека $P_{T_1}, P_{T_2}, ..., P_{T_{m_1}}$ са множествата от периодични думи с периоди съответно $T_1, T_2, ..., T_{m_1}$, където $T_i, i = 1, 2, ..., m_1$ са някои измежду числата 2,3,...,T такива, че множествата P_i не са празни. Сега $n - \sum_{i=1}^{m_1} T_i - |F| > 0$ (ако $n = |F| + \left|\cup P_i\right|$, тогава не съществуват евентуакно периодични думи).

Нека $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m_1}$ са базовите думи за $P_{T_1}, P_{T_2}, ..., P_{T_{m_1}}$.

Твърди се, че за $\forall i\left(1 \le i \le m_1\right)$ е изпълнено:

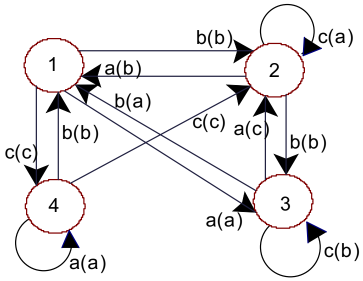
$\varphi(\alpha_i)=\alpha_{i_1}; \varphi(\alpha_{i_1})=\alpha_{i_2};...;\varphi(\alpha_{i_{T_i}})=\alpha_i$ (възможно е $T_k = T_l$, но всички думи $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m_1}$ са различни и $P_k \cap P_l = \varnothing$.

Пример: Нека крайния автомат M е дефиниран както следва:

$Q = \{1,2,3,4\}$, $V = \{a, b, c\}$, $W = \{a, b, c\}$, $q_0 = 1$ и функциите на преходите и изходите са дадени на Фиг.2., а ориентирания граф е даден на Фиг.3.

Фиг. 2. Таблица на преходите и изходите за автомата M

M_1	1	2	3	4
a	3, a	1, b	2, c	4, a
b	2, b	3, b	1, a	1, b
c	4, c	2, a	3, b	2, c



Фиг. 3. Ориентиран граф на автомата M

Разглеждат се думи с различна дължина и период и за някои от тях се дават образите на думата с няколко обратни итерации.

1) За $\alpha \in V^*$ и $|\alpha| = 3$ са разгледани множествата от неподвижните думи и думи с период $T = 3$.

$F^3 = \{caa, cab, cac, cba.cbb, cbc, ccb\}$ $\quad P_{1,1}^{3,1} = \varphi^{-1}(caa) = \{caa\}$

$P_3^3 = \{aaa, aac, aba, abc, aca, acb, bba, bbb, bbc\}$ $\quad P_{3,2}^{3,1} = \varphi^{-1}(aac) = \{abc\}$

$P_{3,2}^{3,2} = \varphi^{-2}(aac) = \{aca\}$ $\quad P_{3,2}^{3,3} = \varphi^{-3}(aac) = \{aac\}$

2) За $\alpha \in V^*$ и $|\alpha| = 4$ са разгледани множествата от периодичните думи с период $T = 3$ и период $T = 9$.

$A^3 = \{aacb, abcb, acab, bbaa, bbac, bbba, bbbc, bbca, bbcb, cbaa, cbab, cbac, ccba, ccbb,$

$ccbc\}$

$$P_3^4 = \left\{\begin{matrix} aacb, abcb, acab, bbaa, bbac, bbba, bbbc, bbca, bbcb, cbaa, cbab, cbac, \\ ccba, ccbb, ccbc \end{matrix}\right\}$$

За единадесетата дума от P_3^4 е изпълнено:

$P_{3,11}^{4,1} = \varphi^{-1}(cbab) = \{cbac\}$ $\quad P_{3,11}^{4,2} = \varphi^{-2}(cbab) = \{cbaa\}$ $\quad P_{3,11}^{4,3} = \varphi^{-3}(cbab) = \{cbab\}$

$P_9^4 = \{aaaa, aaab, aaac, abaa, abab, abac, acba, acbb, acbc\}$

За петата дума от P_9^4 е изпълнено:

$P_{9,5}^{4,1} = \varphi^{-1}(abab) = \{acbb\}$ $\quad$ $P_{9,5}^{4,2} = \varphi^{-2}(abab) = \{aaab, aabc\}$

$P_{9,5}^{4,3} = \varphi^{-3}(abab) = \{abac\}$ $\quad$ $P_{9,5}^{4,4} = \varphi^{-4}(abab) = \{acbc\}$

$P_{9,5}^{4,5} = \varphi^{-5}(abab) = \{aaac, aaba\}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статията са дадени 4 дефиниции. Доказани се 4 теореми, 2 леми и 4 следствия. Направено е подробно разбиване на множествата от думи с фиксирани дължини за автомата на Мили M.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Manev K., Introduction to discrete mathematics, KLMN, Sofia, 2003.

[2] Saperstone S. H.,Semidynamical systems in infinite dimensional spaces, Springer-Verlag, 1981 (Applied mathematical sciences, 37).

[3] Dochev D. Tr., Kirilov M. K., Fundamental properties of discrete semidynamical systems defined by finite automatons, Proceedings, volume 46, book 6 (23-30, Rousse, 2007).

[4] Dochev D. Tr., Kirilov M. K., One and two dimensional regular sets and countable unions of finite sets, Proceedings, volume 46, book 6 (31-38, Rousse, 2007).

[5] Pelczar A., Stability of motions in pseudo-dynamical systems, Bull. Acad. Polon, Ser. Sci. Math. Astr et Phis., Vol.XXV, 1975.

[6] Kalman, R., P. Falb, M. Arbib, Ocherki po matematicheskoj teorii system, Mir, 1971

[7] Clushkov V., Sintez cifrovih automatov, Fismatgiz, Moscow, 1962.

[8] Minskiy M., Vichislenija i avtomati, Mir. Moskva, 1971

[9] Hopcroft J., and Ullman J., Intoduction to automat theory, languages and computation, Addison-Wesley, Reading MA, 1979.

[10] Hopcroft J., Aho A., and Ullman J., Data structures and algorithms, Addison-Wesley, Reading MA, 1983

[11] Sibirskiy K., Introduction to topological dynamics, Kishenw, AN MSSP, 1970.

За контакти:

Михаил Кирилов Кирилов, Катедра “Алгебра и Геометрия”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, Тел.: 082 839 950, E-mail: michael_kirilov@mail.bg;