Дългосрочна зависимост при индекса SOFIX на Българската фондова борса[1]

Боян Ломев, Иван Иванов, Елена Туйова

Long range dependence in SOFIX index of the Bulgarian Stock Exchange: *The sustainability of equity returns affect investors' attitude towards financial markets and securities. In order to estimate how predictable they are in the future, we decided to examine whether a long-range dependence exists in SOFIX (Bulgarian Stock Exchange main index), as well as in six major world indices: DAX, DJIA, Hang Seng, NASDAQ, FTSE100 u NIKKEI. We evaluated the fractional differencing operator via three different methods: the Whittle approach, the local method of Whittle, and the method based on periodogram. We found a long-range dependence in SOFIX, while in the other indices it is mostly short-range.*

Key words*: financial markets, long-range dependence.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Основна цел на настоящия доклад е да изследват за наличие на дългосрочна зависимост български и световни борсови индекси. Използват се няколко съвременни метода, изведени чрез честотен анализ на времевите редове.

ИЗЛОЖЕНИЕ

ДРОБНО ДИФЕРЕНЦИРАНЕ

Класическите ARIMA процеси много добре могат да моделират наличието на краткосрочна зависимост в данните, но ковариацията между наблюденията X_i и X_{i+h} при нарастване на *h* бързо намалява.

Клас от модели, при които ковариацията между отдалечени наблюдения намалява като степенна функция, са предложени едновременно от Хоскинг 1981 в [1] и Грангер и Йоекс 1980 [2]. Основна тяхна особеност е въвеждането на дробно диференциране. Формално операторът за дробно диференциране се въвежда посредством биномното разлагане:

$$\nabla^d = (1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-B)^j = 1 - dB - \frac{1}{2} d(1-d)B^2 - \frac{1}{6} d(1-d)(2-d)B^3 - \dots$$

където *B* е лаговия оператор $Bx_i = x_{i-1}$, а *d* заема дробни стойности. Технически по-удобно е да се използва гама функцията *Г*(.) за изчисляване на биномните коефициенти:

$$\nabla^d = (1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j,$$

където

$$\pi_j = \prod_{0<k\le j} \frac{k-1-d}{k} = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)}, \quad j = 0,1,2,\dots,.$$

Като използваме оператора за дробно диференциране, можем да дефинираме ARIMA(0,d,0) процес (в случая на Гаусови иновации): $\nabla^d X_t = Z_t$, където Z_t е процес на дискретен бял шум - за простота приемаме, че е с дисперсия единица, а *d* заема стойности в интервала (-0.5,0.5).

ОСНОВНИ СВОЙСТВА НА ARIMA(0,d,0) ПРОЦЕС

- Когато *d*<1/2, $\{X_t\}$ е стационарен процес и има безкрайно пълзящо средно представяне;

[1] Тази статия е финансово подпомогната от научноизследователски проект 5/2008 на Фонд научни изследвания на СУ"Св.Кл. Охридски".

- При *d*>-1/2 {X_t} е обратим процес и има безкрайно авторегресионно представяне;

- При -1/2<*d*<1/2 спектралната плътност на {X_t} е $s(\omega)=\left(2\sin\frac{1}{2}\omega\right)^{-2d}$, $0<\omega\le\pi$,

като при $\omega\to\infty$ имаме $s(\omega)\to\omega^{-2d}$.

От изброените свойства виждаме, че при -1/2<*d*<1/2 процесът ARIMA(0,d,0) е стационарен и обратим, като коефициентите ψ_j,π_j намаляват като степенна функция с увеличаване на *j*. При *d*>0 имаме дългосрочна зависимост.

Въз основа на получените за ARIMA(0,d,0) резултати може да се дефинира значително по-широк клас от ARIMA(p,d,q) процеси с дробно *d* .

Процесът {X_t} е дробен ARIMA(p,d,q) процес с -1/2<*d*<1/2 ако е стационарен и удовлетворява диференчното уравнение:

$$\Phi(B)\nabla^d X_t=\Theta(B)Z_t,$$

където

$$\Phi(B)=1-\phi_1B-\phi_2B^2-\ldots-\phi_pB^p,$$
$$\Theta(B)=1+\theta_1B+\theta_2B^2+\ldots+\theta_qB^q,$$

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НА FARIMA МОДЕЛИ

Най-общо можем да разделим методите за оценяване на FARIMA модели с тежки опашки на два класа :

Едновременно оценяване на параметрите на полиномите $\Phi(B),\Theta(B)$ и на показателя за дробно диференциране *d* - познатия в литературата метод на Уитъл.

Първоначално определяне на показателя за дробно диференциране *d*, филтриране на дългосрочната зависимост от данните и последващо оценяване на параметрите на полиномите $\Phi(B),\Theta(B)$ посредством методи, работещи в случая на иновации с тежки опашки. Тук влиза и модификация на метода да Уитъл, при която предварително се определя и фиксира показателя за дробно диференциране d.

ПОДХОД НА УИТЪЛ

Нека разглеждаме дробен ARIMA(p,d,q) процес $\{X_t\}$, дефиниран чрез уравнението $\Phi(B)X_n=\Theta(B)\nabla^{-d}Z_t$, където иновациите Z_t са н.е.р.сл.в. със математическо очакване нула и са от областта на привличане на устойчиво разпределение с параметър $1<\alpha<2$, а *d* е дробно число.

Задачата е да се оцени (*p*+*q*+1) мерен вектор от параметри $\beta=(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q,d)$, където $\phi_1,\ldots,\phi_p$ и $\theta_1,\ldots,\theta_q$ са коефициенти съответно на полиномите $\Phi(B),\Theta(B)$ и отговарят на условията за съществуване и обратимост на FARIMA(p,d,q), а за коефициента на дробно диференциране *d* се предполага, че принадлежи на областта $(0,1-1/\alpha)$.

Въвеждаме нормализирана периодограма

$$\widetilde{I}_n(\omega)=\left(\sum_{t=1}^{n}X_t^2\right)^{-1}\left|\sum_{t=1}^{n}X_te^{-i\omega t}\right|^2,\quad -\pi\le\omega\le\pi$$

и "пренасяща енергията" функция (power transfer function), която зависи от вектора β:

$$g(\omega,\beta)=\left|\frac{\Theta\left(e^{-i\omega},\beta\right)}{\Theta\left(e^{-i\omega},\beta\right)\left(1-e^{-i\omega}\right)^{d(\beta)}}\right|^2,\quad -\pi\le\omega\le\pi\ .$$

Оценката $\hat{\beta}$ на вектора от параметрите β се намира посредством минимизиране на функцията

$$\sigma_n^2(\beta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\widetilde{I}_n(\omega)}{g(\omega,\beta)} d\omega ,$$

МЕТОД, БАЗИРАН НА ПЕРИОДОГРАМАТА

Периодограмата, дефинирана посредством (6) е оценка на спектралната плътност на процеса X_t. В случая на процес с крайна дисперсия, периодограмата ще бъде пропорционална на $|\omega|^{-2d}$ при $\omega \to 0$. При наличието на тежки опашки, все още не е получен точен теоретичен резултат, но емпирични изследвания потвърждават запазване на пропорционалността с показател *-2d* при $\omega \to 0$.

За практически приложения се използва бързото преобразуване на Фурие и се вземат пред вид около 10% от ниските честоти.

ЛОКАЛЕН МЕТОД НА УИТЪЛ

Този подход е предложен от Робинсон 1995 в [3]. Както при метода на периодограмата, основното предположение е, че спектралната плътност е пропорционална на $|\omega|^{-2d}$ при $\omega \to 0$. Оценка на d се получава чрез минимизиране на функцията

$$R(d) = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\widetilde{I}_n(\omega)}{\omega_j^{-2d}}\right) - 2d\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\log\omega_j ,$$

като се вземат фуриерови честоти $2\pi n/N$ близки до нула. В [4] Тагу и Теверовски 1998 препоръчват използването на около 10% от ниските честоти.

ПРИМЕРИ И ЕКСПЕРИМЕНТИ

Разглеждаме периода 02.01.2002г. до 21.03.2008г. и следните 7 борсови индекса: Sofix, DAX, DJIA, Hang Seng, NASDAQ, FTSE100 и NIKKEI. За всички модели разглеждаме първите разлики на данните за борсовите индекси или възвръщаемостта. За изчисления бе използван програмния продукт Matlab 6.5

Получени модели посредством метода на Уитъл

Както се вижда от Таблица 1, получените оценки на показателя за дробно диференциране *d* показват, че при българския борсов индекс наблюдаваме дългосрочна зависимост, докато при останалите борсови индекси зависимостта е краткосрочна (с изключение на FARIMA(2,d,2) за NIKKEI).

Таблица 1.

Получени оценки на FARIMA(p,d,q) по метода на Уитъл.

Модел	SOFIX	DAX	DJIA	Hang Seng	NASDAQ	FTSE100	NIKKEI
FARIMA(0,d,0) зависимост	d=0.0987 дългосрочна	d=-0.0355 краткосрочна	d=-0.0579 Краткосрочна	d=-0.017 краткосрочна	d=-0.0613 краткосрочна	d=-0.0824 краткосрочна	d=-0.0096 краткосрочна
FARIMA(1,d,1) зависимост	d=0.0019 дългосрочна	d=-0.0131 краткосрочна	d=-0.0477 Краткосрочна	d=-0.0257 краткосрочна	d=-0.0552 краткосрочна	d=-0.0414 краткосрочна	d=-0.0187 краткосрочна
FARIMA(2,d,2) зависимост	d=0.0243 дългосрочна	d=-0.0299 краткосрочна	d=-0.1048 Краткосрочна	d=-0.0189 краткосрочна		d=-0.0532 краткосрочна	d=0.3503 дългосрочна
FARIMA(1,d,0) зависимост	d=0.093 дългосрочна	d=-0.0055 краткосрочна	d=-0.033 Краткосрочна	d=-0.0225 краткосрочна	d=-0.05 краткосрочна	d=-0.0426 краткосрочна	d=-0.0185 краткосрочна
FARIMA(0,d,1) зависимост	d=0.092 дългосрочна	d=-0.0036 краткосрочна	d=-0.0309 Краткосрочна	d=-0.0083 краткосрочна	d=-0.0506 краткосрочна	d=-0.0366 краткосрочна	d=-0.0186 краткосрочна

Получени резултати посредством метода на периодограмата и Локален метод на Уитъл

Таблица 2.

Получени оценки за показателя за дробно диференциране по метода на периодограмата и по локалния метод на Уитъл.

МЕТОД	SOFIX	DAX	DJIA	Hang Seng	NASDAQ	FTSE100	NIKKEI
Метод на периодограмата	d=0.0946	d=-0.0474	D=-0.0262	d=-0.0377	d=-0.0592	d=-0.1055	d=-0.0248
зависимост	дългосрочна	краткосрочна	краткосрочна	краткосрочна	краткосрочна	краткосрочна	краткосрочна
Локален метод на Уитъл	d=0.0927	d=-0.0194	D=-0.0443	d=-0.0114	d=-0.0702	d=-0.0706	d=-0.0115
зависимост	дългосрочна	краткосрочна	Краткосрочна	краткосрочна	краткосрочна	краткосрочна	краткосрочна

От резултатите в Таблица 2 се вижда, че получените оценки на показателя за дробно диференциране *d* показват, че при българския борсов индекс наблюдаваме дългосрочна зависимост, докато при останалите борсови индекси зависимостта е краткосрочна. Този извод се отнася и за двата използвани метода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В тази разработка приложихме метод на Уитъл, метод, базиран на периодограмата и локален метод на Уитъл, за да проверим за наличие на зависимост на българския борсов индекс SOFIX и да сравним неговото поведение с това на други 6: DAX, DJIA, Hang Seng, NASDAQ, FTSE100 и NIKKEI. Резултатите показват, че само при SOFIX има дългосрочна зависимост, а при останалите 6 борсови индекса зависимостта е краткосрочна.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Granger,C.W., R.Joyeux. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing" J.Time Series Analysis,1,15-29, 1980.

[2]. Hosking,J.R.M. Fractional differencing, Biometrika, 68,165-176, 1981.

[3]. Robinson,P.M. Gaussian semiparametric estimation of long-range dependance, Ann. Statist, 23,1630-1661, 1995.

[4]. Taqqu,M., V.Teverovsky On Estimating the Intensity of Long-Range Dependance in Finite and Infinite Variance Time Series,A practical Guide to Heavy Tails, ed. Adler,R., M.Taqqu, Birkhauser, Boston,177-217, 1998.

За контакти:

Гл. ас. д-р Боян Михайлов Ломев, Стопански факултет, СУ "Св. Климент Охридски", e-mail lomev@feb.uni-sofia.bg

Доц. дмн Иван Ганчев Иванов, Стопански факултет, СУ "Св. Климент Охридски", e-mail i_ivanov@feb.uni-sofia.bg

Елена Димитрова Туйова, Българска Агенция за Кредитен Рейтинг, 0888/433 896, elena.touyova@gmail.com и Стопански факултет, СУ "Св. Климент Охридски".

Докладът е рецензиран.