Физика и математика

Метод на променливите направления за числено решаване на уравненията на Навие-Стокс в цилиндрична координатна система

Иванка Желева, Анна Лечева

***Abstract**: In the paper an effective numerical method for solving Navier-Stokes equations, which equations describe the motion of uncompressible viscous flow in a cylindrical tank with a mixer is presented. An ADI method (Alternating Direction Implicit Method) is used for obtaining steady state solution. ADI scheme is presented in detail.*

***Key words:** ADI method, Navier-Stokes equations*

ВЪВЕДЕНИЕ

Уравненията на Навие-Стокс описват движението на вискозните флуиди. Тези уравнения изразяват от математическа гледна точка основните закони за съхранение в механиката на непрекъснатите среди – закона за запазване на масата и на количеството на движение. Записани в цилидрични координати, те могат да се използват за описание на движението на несвиваем флуид в цилиндричен съд с механично разбъркване. В безразмерна форма, след въвеждане на функция на тока ψ, вихър на скоростта ω и момент на тангенциалната скорост *M,* тези уравнения, записани в цилиндрични координати, изглеждат така [3,4]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)=-\omega \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rUM}{\partial r}+\frac{\partial WM}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial M}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial U\omega}{\partial r}+\frac{\partial W\omega}{\partial z}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial M^2}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\omega}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right]. \tag{3}$$

Връзката между първата *U* и третата *W* компонента на вектора на скоростта и функцията на тока ψ в цилиндрична координатна система е следната [3,6]:

$$U=-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad W=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{4}$$

Тук **V***(U,V,W)* е векторът на скоростта с неговите компоненти във въведената цилиндрична координатна система в безразмерен вид, *M = Vr* е моментът на тангенциалната скорост в безразмерен вид, $\mathrm{Re}=\frac{\Omega R^2}{\nu}$ е числото на Рейнолдс, ν е кинематичният вискозитет на флуида.

Уравнения (1) – (4) са записани при предположението, че движението на флуида в цилиндричния съд е въртеливо и осисиметрично. Те представляват система от пет уравнения с пет неизвестни функции: функцията на тока ψ, големината на момента на тангенциалната скорост *M*, втората компонента ω на вектора – вихър на скоростта $\vec{\omega}$, първата *U* и третата *W* компонента на вектора на скоростта **V***(U,V,W)*. Това са основните уравнения на модела, описващ движението на несвиваем вискозен флуид. Те представляват пълна система за съответните неизвестни функции.

ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Метод на установяването

Един от методите за решаване на стационарни задачи се състои в решаването на фиктивна нестационарна задача, решението на която клони към решението на изходната стационарна задача след достатъчно дълъг период от време, когато граничните условия на нестационарната задача не зависят от времето [7,8]. Този метод се нарича метод на установяването. Фактически той представлява итерационен процес, при който на всяка итерация стойностите на неизвестните функции се получават чрез числено решаване на спомагателната нестационарна задача. Ако съществува стационарно решение, то този итерационен процес е сходящ към решението на изходната стационарна задача [8].

Уравненията за момента на тангенциалната скорост (2) и за вихъра на скоростта (3) са елиптични частни диференциални уравнения [7,8]. За да се приложи методът на установяването, в тези уравнения се въвежда фиктивно време *t* [7,8]. По този начин, уравненията за момента и вихъра на скоростта стават параболични частни диференциални уравнения:

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial rUM}{\partial r}+\frac{\partial WM}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial M}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right], \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial U\omega}{\partial r}+\frac{\partial W\omega}{\partial z}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial M^2}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\omega}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right]. \qquad (6)$$

Уравнение (1) за функцията на тока може да бъде решено по различни начини. Например, в него също може да бъде въведено собствено фиктивно време t_1 и също да се решава по метода на установяването:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_1}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)+\omega\,. \qquad (7)$$

Стационарното решение на (7) трябва да се получава на всяка стъпка по времето, с която се провежда интегрирането на уравнения (5) и (6) [8].

2. Метод на променливите направления – неявна схема

Неявните схеми на метода на променливите направления са били предложени от Писмен, Рекфорд и Дъглас[6]. Това са така наречените ADI (Alternating Direction Implicit Method) схеми. Този метод е един от най-предпочитаните методи за решаване на задачи за вискозни флуиди. Основава се на разцепване на стъпката по времето с цел да се построи многомерна неявна схема, матриците на която са тридиагонални. Схемата на метода на променливите направления е икономична схема, т.е. тя съчетава в себе си качествата на неявна схема, която е безусловно устойчива и тези на явна схема, при която броят на аритметичните действия е пропорционален на броя на възлите в мрежата $O(1/h^p)$, където *p* е размерността на задачата [6].

Нека *f* е всяка от неизвестните функции вихър на скоростта ω, големина на момента на тангенциалната скорост *M*, функция на тока ψ. Тогава производната по времето се апроксимира по следния начин:

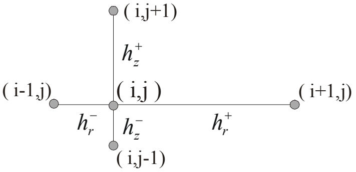
$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i,j}^{k+1}\approx\frac{f_{i,j}^{k+1}-f_{i,j}^{k}}{\tau}, \qquad (8)$$

където τ е стъпката по фиктивното време *t*; *k* е текущият временен слой; *(i,j)* е текущата точка от мрежата.

Друго предимство на схемата на променливите направления е, че тя позволява пресмятанията да се извършват с големи стъпки τ по фиктивното време *t*.

Използването на консервативния вид на нелинейните членове в уравнението за момента на тангенциалната скорост (5) и уравнението за вихъра на скоростта (6), позволява прилагането на схемата на метода на променливите направления към задачата за изследване на хидродинамиката в цилиндрични съдове с разбъркване. Конвективните членове и в двете уравнения се вземат на долния слой *k* по времето. Тъй като в тях участват старите значения на компонентите на скоростта, т.е. U^k и W^k, то точността на схемата по времето за всяко от уравненията е $O(\tau)$ [6].

Уравненията за вихъра на скоростта ω, големината на момента на тангенциалната скорост *M* и функцията на тока ψ, заедно със съответните гранични условия [2] се апроксимират с крайни разлики върху неравномерна мрежа. За целта се използва петточков неравномерен шаблон от типа кръст [7], който е показан на Фиг.1. За удобство е прието точката с координати $\left(r_i, z_j\right)$ да се бележи с (*i,j*).



Фиг. 1 Неравномерен шаблон от типа кръст

Стъпките на мрежата по оста *r* са съответно:

$$h_r^+ = r_{i+1} - r_i \qquad h_r^- = r_i - r_{i-1},$$

а по оста *z* са:

$$h_z^+ = z_{j+1} - z_j \qquad h_z^- = z_j - z_{j-1}.$$

Осреднените стойности на стъпките са следните:

$$\hbar_r = \frac{1}{2}\left(h_r^+ + h_r^-\right) \qquad \hbar_z = \frac{1}{2}\left(h_z^+ + h_z^-\right).$$

Схемата на метода, приложена към уравнението за вихъра на скоростта (6) изглежда по следния начин:

$$\frac{\omega_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \omega_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} = -\frac{U_{i+1,j}^k \omega_{i+1,j}^k - U_{i-1,j}^k \omega_{i-1,j}^k}{2\hbar_r} - \frac{W_{i,j+1}^k \omega_{i,j+1}^k - W_{i,j-1}^k \omega_{i,j-1}^k}{2\hbar_z} + \frac{1}{r_i^3}\frac{\left(M_{i,j+1}^2\right)^k - \left(M_{i,j-1}^2\right)^k}{2\hbar_z} +$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{r_i}\frac{1}{\hbar_r}\left(\frac{2}{r_{i+1}+r_i}\frac{r_{i+1}\omega_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - r_i\omega_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_r^+} - \frac{2}{r_i + r_{i-1}}\frac{r_i\omega_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - r_{i-1}\omega_{-1i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_r^-}\right)+\right. \tag{9.а}$$

$$\left.+\frac{1}{\hbar_z}\left(\frac{\omega_{i,j+1}^k - \omega_{i,j}^k}{h_z^+} - \frac{\omega_{i,j}^k - \omega_{i,j-1}^k}{h_z^-}\right)\right];$$

$$\frac{\omega_{i,j}^{k+1} - \omega_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = -\frac{U_{i+1,j}^k \omega_{i+1,j}^k - U_{i-1,j}^k \omega_{i-1,j}^k}{2\hbar_r} - \frac{W_{i,j+1}^k \omega_{i,j+1}^k - W_{i,j-1}^k \omega_{i,j-1}^k}{2\hbar_z} + \frac{1}{r_i^3}\frac{\left(M_{i,j+1}^2\right)^k - \left(M_{i,j-1}^2\right)^k}{2\hbar_z} +$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{r_i}\frac{1}{\hbar_r}\left(\frac{2}{r_{i+1}+r_i}\frac{r_{i+1}\omega_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - r_i\omega_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_r^+} - \frac{2}{r_i + r_{i-1}}\frac{r_i\omega_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - r_{i-1}\omega_{-1i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_r^-}\right)+\right. \tag{9.б}$$

$$+\frac{1}{\hbar_z}\left(\frac{\omega_{i+1,j}^{k+1}-\omega_{i,j}^{k+1}}{h_z^+}-\frac{\omega_{i,j}^{k+1}-\omega_{i-1,j}^{k+1}}{h_z^-}\right)\Bigg].$$

Неявните схеми имат тридиагонални матрици обикновено само в едномерния случаи. Предимството на метода на променливите направления е, че образуваната чрез него двуслойна схема има също тридиагонална матрица по всяко от направленията *r* и *z*. По този начин, първото уравнение (9.а) съдържа неизвестните стойности $\omega_{i,j+1}^{k+1/2},\omega_{i,j}^{k+1/2},\omega_{i,j-1}^{k+1/2}$, които са на полуслоя по фиктивното време, а второто уравнение (9.б) съдържа неизвестните стойности $\omega_{i+1,j}^{k+1},\omega_{i,j}^{k+1},\omega_{i-1,j}^{k+1}$, които са на горния слой по фиктивното време τ. Така първото уравнение на схемата (9.а) е неявно по променливата *r* и явно по *z*, а второто уравнение на схемата (9.б) е неявно по *z* и явно по *r*. Схемата на този метод е ефективна и устойчива [6].

Схемата на метода на променливите уравнения, приложен към уравнението на момента на тангенциалната скорост (5), е следната:

$$\frac{M_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}-M_{i,j}^{k}}{\frac{\tau}{2}}=-\frac{1}{r_i}\frac{r_{i+1}U_{i+1,j}^{k}M_{i+1,j}^{k}-r_{i-1}U_{i-1,j}^{k}M_{i-1,j}^{k}}{2\hbar_r}-\frac{W_{i,j+1}^{k}M_{i,j+1}^{k}-W_{i,j-1}^{k}M_{i,j-1}^{k}}{2\hbar_z}+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{r_i}{\hbar_r}\left(\frac{2}{r_{i+1}+r_i}\frac{M_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}-M_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_r^+}-\frac{2}{r_i+r_{i-1}}\frac{M_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}-M_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_r^-}\right)+\right. \tag{10.а}$$
$$\left.+\frac{1}{\hbar_z}\left(\frac{M_{i,j+1}^{k}-M_{i,j}^{k}}{h_z^+}-\frac{M_{i,j}^{k}-M_{i,j-1}^{k}}{h_z^-}\right)\right];$$

$$\frac{M_{i,j}^{k+1}-M_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}}=-\frac{1}{r_i}\frac{r_{i+1}U_{i+1,j}^{k}M_{i+1,j}^{k}-r_{i-1}U_{i-1,j}^{k}M_{i-1,j}^{k}}{2\hbar_r}-\frac{W_{i,j+1}^{k}M_{i,j+1}^{k}-W_{i,j-1}^{k}M_{i,j-1}^{k}}{2\hbar_z}+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{r_i}{\hbar_r}\left(\frac{2}{r_{i+1}+r_i}\frac{M_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}-M_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_r^+}-\frac{2}{r_i+r_{i-1}}\frac{M_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}-M_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_r^-}\right)+\right. \tag{10.б}$$
$$\left.+\frac{1}{\hbar_z}\left(\frac{M_{i,j+1}^{k+1}-M_{i,j}^{k+1}}{h_z^+}-\frac{M_{i,j}^{k+1}-M_{i,j-1}^{k+1}}{h_z^-}\right)\right].$$

Уравненията на схемата на метода на променливите направления за уравнението на функцията на тока (7) са следните:

$$\frac{\psi_{i,j}^{p+\frac{1}{2}}-\psi_{i,j}^{p}}{\frac{\tau_1}{2}}=\frac{1}{\hbar_r}\left(\frac{2}{r_{i+1}+r_i}\frac{\psi_{i+1,j}^{p+\frac{1}{2}}-\psi_{i,j}^{p+\frac{1}{2}}}{h_r^+}-\frac{2}{r_i+r_{i-1}}\frac{\psi_{i,j}^{p+\frac{1}{2}}-\psi_{i-1,j}^{p+\frac{1}{2}}}{h_r^+}\right)+ \tag{11.а}$$
$$+\frac{1}{r_i\hbar_z}\left(\frac{\psi_{i,j+1}^{p}-\psi_{i,j}^{p}}{h_z^+}-\frac{\psi_{i,j}^{p}-\psi_{i,j-1}^{p}}{h_z^-}\right)+\omega_{i,j}^{k+1}$$

$$\frac{\psi_{i,j}^{p+1}-\psi_{i,j}^{p+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau_1}{2}}=\frac{1}{\hbar_r}\left(\frac{2}{r_{i+1}+r_i}\frac{\psi_{i+1,j}^{p+\frac{1}{2}}-\psi_{i,j}^{p+\frac{1}{2}}}{h_r^+}-\frac{2}{r_i+r_{i-1}}\frac{\psi_{i,j}^{p+\frac{1}{2}}-\psi_{i-1,j}^{p+\frac{1}{2}}}{h_r^+}\right)+ \tag{11.б}$$

$$+\frac{1}{r_i\hbar_z}\left(\frac{\psi_{i,j+1}^{p+1}-\psi_{i,j}^{p+1}}{h_z^+}-\frac{\psi_{i,j}^{p+1}-\psi_{i,j-1}^{p+1}}{h_z^-}\right)+\omega_{i,j}^{k+1},$$

където τ_1 е стъпката по фиктивното време t_1.

Най-удобен за намиране решението на системи с тридиагонални матрици е методът на прогонката, който е приложен за намиране числените стойности на неизвестните функции във възлите на мрежата за разглежданата задача.

Численият алгоритъм за решаване на предложената тук диференчна схема е представен подробно в [4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен е ефективен числен метод за решаване на уравненията на Навие-Стокс, описващи движението на несвиваем вискозен нютонов флуид в цилиндличен съд с механично разбъркване. Този метод е основан на метода на променливите направления при въвеждане на фиктивно време за разцепване на схемата диференчни уравнения за неизвестните функции: вихър на скоростта, момент на тангенциалната скорост и функция на тока. Той служи за изследване на хидродинамиката и е в основата на допълнителни параметрични анализи по отношение на геометрията на областта, в която се решава задачата и на динамичните характеристики на изследваните флуиди [1,5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Лечева, Изследване на влиянието на геометричните характеристики върху хидродинамиката в реактори с бъркалка, Научни трудове РУ ”А. Кънчев” 2004, Том 41, серия 7.2, Майски научни четения, стр. 192-197

[2] А. Лечева, Поставяне на граничните условия за ненулевата компонента на вектора-вихър на скоростта при хидродинамични задачи с изпъкнал в потока ъгъл, Научни трудове РУ ”А. Кънчев” 2004, Том 41, серия 7.2, Майски научни четения, стр. 176-183

[3] Герасимов Б., Вислов В.и др., Математическое моделирование дискового смесителя, Институт прикладной математики, Москва, 1987.

[4] Желева И., Лечева А., Алгоритъм за числено изследване на въртящо се вискозно течение в цилиндричен съд с бъркалка, Научни трудове РУ ”А. Кънчев” 2002, Том 39, Серия 2.2, стр. 128 – 133

[5] Желева И., Лечева А., Числен алгоритъм за изследване на хидродинамиката в реактор с три бъркалки, Научни трудове РУ ”А. Кънчев” 2001, Том 38, Серия 10, стр. 250 – 256

[6] Роуч П., Вычислительная гидродинамика, Мир, Москва, 1980.

[7] Самарский А. Теория разностных схем, Наука, Москва, 1977.

[8] Турчак Л., Основы численных методов, Наука, Москва, 1987.

За контакти

доц. д-р Иванка Желева, Филиал Разград, РУ “А.Кънчев”, e-mail: vzh@abv.vg

ст.ас. Анна Лечева-Неделчева, Филиал Силистра, РУ “Ангел Кънчев”, e-mail: anna.lecheva@mbox.contact.bg

Докладът е рецензиран.