Определяне обема на работните камери на трироторна, хидравлична машина с двустранно цевно зацепване

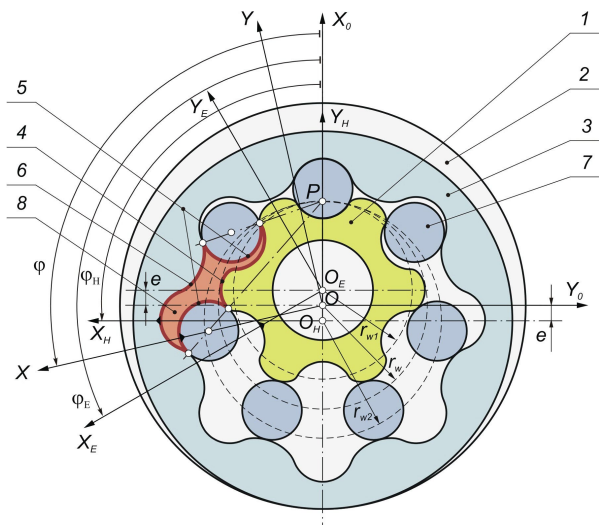
Ивайло Николаев Огнян Алипиев Генчо Попов
Красимир Тужаров Климент Климентов

Determination of the working cameras volume of a three-rotor hydraulic machine with bilateral lantern meshing: *The geometry connected with the variation of working chambers volume in hydraulic machinery has been clarified. It has been formed from three together meshing gears (epicycloidal, lantern and hypocycloidal). A method for determination of the working chamber volume as a function of the rotational angle of the lantern gear at different independent geometry parameters has been proposed. Results of digital examples have been presented.*

Key words: *Three-rotor Gear Pump, Bilateral Lantern Meshing, Lantern Gear, Epicycloidal Gear, Hypocycloidal Gear, Working Camera Volume.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Известно е, че един от основните показатели на всяка обемна хидравлична машина е работният й обем, който зависи от изменението на обема на работните камери. Целта на настоящата работа е разработване на метод за определяне обема на работните камери на трироторна хидравлична машина с двустранно цевно зацепване [2] при различни ъгли на завъртане (зацепване) на цевното колело.



Фиг. 1. Геометрия на трироторна хидравлична машина с цевно зацепване

Примерна конструкция на такава машина е показана на фиг.1. Машината се състои от три ексцентрично разположени зъбни колела, явяващи се съответно вътрешен ротор *1* (*епициклоидно колело*), междинен ротор *2* (*цевно колело*) и външен ротор *3* (*хипоциклоидно колело*). Между зъбните повърхнини *4* и *6* на колелата *1* и *3*, и повърхнините *5* на две съседни цеви *7* от колелото *2* във всеки момент между контактуващите зъби и челните равнини на разпределителния диск и фланеца от междинния ротор *2* се образуват херметично, затворени, работни камери *8* с изменящ се обем $V_{K\varphi}$ при промяна ъгъла на завъртане φ на цевното колело *2*, като броят камери е равен на броя на цевите *7*.

Независимите геометрични параметри на машината [1] са: модул – m; брой цеви (зъби) на цевното колело – z; коефициент на скъсеност на епи- и хипоциклоидата – λ; коефициент на радиуса на формообразуващата окръжност – $r_ц^*$.

При така въведените параметри, профилът на епициклоидното колело *1* в подвижната координатна система $X_E O_E Y_E$, свързана с него, се описва с параметричните уравнения:

$$X_E = \frac{m}{2}\left[z\,\sin\left(\frac{\alpha_E}{z-1}\right) - \lambda\,\sin\left(\frac{z}{z-1}\alpha_E\right) + \frac{2r_ц^*\left[\lambda\,\sin\left(\frac{z}{z-1}\alpha_E\right) - \sin\left(\frac{\alpha_E}{z-1}\right)\right]}{\sqrt{1-2\lambda\,\cos\,\alpha_E + \lambda^2}}\right],$$

$$Y_E = \frac{m}{2}\left[z\,\cos\left(\frac{\alpha_E}{z-1}\right) - \lambda\,\cos\left(\frac{z}{z-1}\alpha_E\right) + \frac{2r_ц^*\left[\lambda\,\cos\left(\frac{z}{z-1}\alpha_E\right) - \cos\left(\frac{\alpha_E}{z-1}\right)\right]}{\sqrt{1-2\lambda\,\cos\,\alpha_E + \lambda^2}}\right], \quad (1)$$

където α_E е параметричен ъгъл на епициклоидното колело и се изменя в границите $\alpha_E = \alpha_{Eн} \div \alpha_{Eк}$ за описване на епициклоидния профил *4* на една камера, като тук $\alpha_{Eн} = \varphi$ и $\alpha_{Eк} = \varphi + 2\pi\left(\frac{z-1}{z}\right)$.

Уравненията на същия профил в неподвижната координатна система $X_0 O Y_0$ при завъртане на епициклоидното колело на ъгъл $\varphi_E = \varphi\frac{z}{z-1}$, респективно и на неговата координатна система $X_E O_E Y_E$ спрямо неподвижната, имат вида:

$$X_{E0} = X_E\cos\left(\varphi\frac{z}{z-1}\right) - Y_E\sin\left(\varphi\frac{z}{z-1}\right), \quad Y_{E0} = X_E\sin\left(\varphi\frac{z}{z-1}\right) + Y_E\cos\left(\varphi\frac{z}{z-1}\right) + m\frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

Аналогично – профилът на хипоциклоидното колело *2* в подвижната координатна система $X_H O_H Y_H$, свързана с него, се описва с параметричните уравнения:

$$X_H = \frac{m}{2}\left[-z\,\sin\left(\frac{\alpha_H}{z+1}\right) + \lambda\,\sin\left(\frac{z}{z+1}\alpha_H\right) + \frac{2r_ц^*\left[-\lambda\,\sin\left(\frac{z}{z+1}\alpha_H\right) - \sin\left(\frac{\alpha_H}{z+1}\right)\right]}{\sqrt{1-2\lambda\,\cos\,\alpha_H + \lambda^2}}\right],$$

$$Y_H = \frac{m}{2}\left[z\,\cos\left(\frac{\alpha_H}{z+1}\right) + \lambda\,\cos\left(\frac{z}{z+1}\alpha_H\right) - \frac{2r_ц^*\left[\lambda\,\cos\left(\frac{z}{z+1}\alpha_H\right) - \cos\left(\frac{\alpha_H}{z+1}\right)\right]}{\sqrt{1-2\lambda\,\cos\,\alpha_H + \lambda^2}}\right], \quad (3)$$

където α_H е параметричен ъгъл на хипоциклоидното колело и се изменя в границите $\alpha_H = \alpha_{Hн} \div \alpha_{Hк}$ за описване на неговия профил *6* от една камера, като $\alpha_{Hн} = \varphi - 2\pi\left(\frac{z+1}{z}\right)$ и $\alpha_{Hк} = \varphi$.

Уравненията на същия профил в неподвижната координатна система $X_0 O Y_0$ при завъртане на хипоциклоидното колело на ъгъл $\varphi_H = \frac{z}{z+1}\varphi$, респективно и на неговата координатна система $X_H O_H Y_H$, се записват във вида:

$$X_{H0} = X_H\cos\left(\varphi\frac{z}{z+1}\right) - Y_H\sin\left(\varphi\frac{z}{z+1}\right), \quad Y_{H0} = X_H\sin\left(\varphi\frac{z}{z+1}\right) + Y_H\cos\left(\varphi\frac{z}{z+1}\right) - m\frac{\lambda}{2}. \quad (4)$$

ИЗЛОЖЕНИЕ

За да се определи обемът на една камера $V_к(\varphi)$ при всеки ъгъл на завъртане на цевното колело φ трябва да се избере подходящ числен метод, който да дава възможност това да става за различни независими геометрични параметри на машината.

Като се има предвид, че ширината на работните камери *B* е постоянна, то:

$$V_K(\varphi) = B \cdot S_K(\varphi), \tag{5}$$

където $S_K(\varphi)$ е лицето (площта) на една работна камера в напречното сечение във функция от ъгъла на завъртане φ.

Съгласно фиг. 2 (а), при ъгъл $\varphi = 0 \div 2\pi/z$ лицето на камерата $S_K(\varphi)$ се определя по зависимостта:

$$S_K(\varphi) = S_{OH_1H_2}(\varphi) - S_{1Tp}(\varphi) - S_{2Tp}(\varphi) - S_{OE_1E_2}(\varphi) - \pi\left(r_ц^* m\right)^2, \tag{6}$$

където $S_{OE_1E_2}(\varphi)$ е лицето на криволинеен сектор OE_1E_2 от епициклоидното колело *1*; $S_{OH_1H_2}(\varphi)$ - лицето на криволинеен сектор OH_1H_2 от хипоциклоидното колело *3*; $\pi\left(r_ц^* m\right)^2$ - лицето на една цев, получено като сума от лицата на две полуцеви; $S_{1TP}(\varphi)$ и $S_{2TP}(\varphi)$ - съответно ориентираните по посока на часовниковата стрелка лица на триъгълниците ΔOH_1E_1 и ΔOE_2H_2 [4].

От фиг. 2. (б) се вижда, че при $\varphi = 2\pi/z \div \pi$ за образуването на лицето на камерата $S_K(\varphi)$ е необходимо към лицето на криволинейния сектор $S_{OH_1H_2}(\varphi)$ да се прибави ориентираното $S_{2TP}(\varphi)$ на втория триъгълник ΔOE_2H_2 и от полученото да се извадят лицата $S_{OE_1E_2}(\varphi)$, $S_{1TP}(\varphi)$ и $\pi\left(r_ц^* m\right)^2$. В същото време триъгълникът ΔOE_2H_2 е ориентиран обратно на часовниковата стрелка и ориентираното му лице се получава с отрицателен знак, като равенство (6) остава в сила и за този случай. Ако ориентацията на съответния триъгълник ΔOH_1E_1 или ΔOE_2H_2 е по часовата стрелка, лицето му има положителен знак.

Равенство (6) е валидно и за случаите при ъгъл на завъртане $\varphi = \pi \div (\pi + 2\pi/z)$ (фиг. 2. в) и $\varphi = (\pi + 2\pi/z) \div 2\pi$ (фиг. 2. г), тъй като триъгълниците, които трябва да се прибавят за получаване на лицето на камерата $S_K(\varphi)$ за съответния случай, са ориентирани обратно на часовниковата стрелка и се получават с отрицателен знак. Вижда се, че благодарение използването на ориентираните лица това равенство е в сила при кой да е ъгъл на завъртане φ.

1. Ориентирани лица $S_{1TP}(\varphi)$ и $S_{2TP}(\varphi)$ на триъгълниците ΔOH_1E_1 и ΔOE_2H_2

Контактните точки E_1 и E_2 на епициклоидното колело *1* с две съседни цеви *7* от цевното колело *2* лежат на *вътрешната линия на зацепване* на епициклоидното колело с цевното, която в неподвижната координатна система X_0OY_0 се описва с параметричните уравнения [2]:

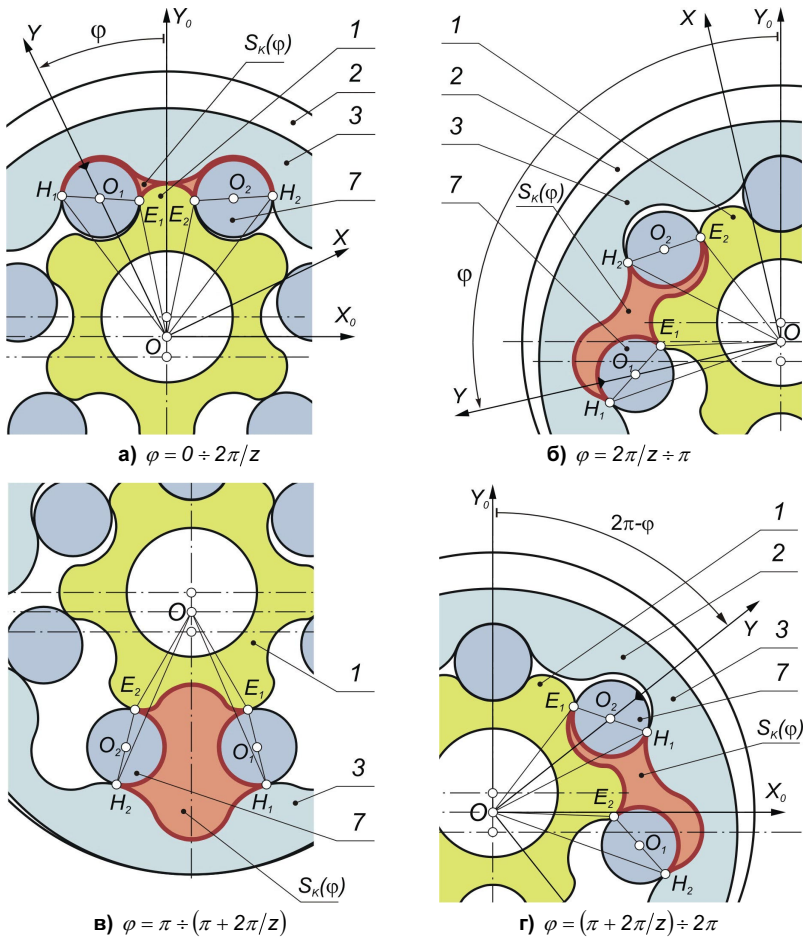
$$\begin{aligned} X_{E3}(\varphi) &= -\frac{m}{2}\left[z - \frac{2r_ц^*}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}}\right]\sin\varphi, \\ Y_{E3}(\varphi) &= \frac{m}{2}\left[\lambda z + \left(z - \frac{2r_ц^*}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}}\right)(\cos\varphi - \lambda)\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Като използваме (7), точките E_1 и E_2 имат координати:

$$\text{т. } E_1\ [X_{E3}(\alpha_{Eн}),\ Y_{E3}(\alpha_{Eн})]; \quad \text{т. } E_2\ [X_{E3}(\alpha_{Eк}),\ Y_{E3}(\alpha_{Eк})]\ . \tag{8}$$

Контактните точки H_1 и H_2 на хипоциклоидното колело *1* с две съседни цеви *7* от цевното колело *2* съответно лежат на *външната линия на зацепване* на хипоциклоидното колело с цевното, която в X_0OY_0 се описва с параметричните уравнения:

$$X_{H3}(\varphi) = -\frac{m}{2}\left[z + \frac{2r_ц^*}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}}\right]\sin\varphi,$$
$$Y_{H3}(\varphi) = \frac{m}{2}\left[\lambda z + \left(z + \frac{2r_ц^*}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}}\right)(\cos\varphi - \lambda)\right]. \qquad (9)$$



а) $\varphi = 0 \div 2\pi/z$ **б)** $\varphi = 2\pi/z \div \pi$

в) $\varphi = \pi \div (\pi + 2\pi/z)$ **г)** $\varphi = (\pi + 2\pi/z) \div 2\pi$

Фиг. 2. Лице на работните камери в напречното сечение

От (9) за координатите на точките H_1 и H_2 следва:

$$\text{т. } H_1\ [X_{H3}(\alpha_{Hн}),\ Y_{H3}(\alpha_{Hн})]; \qquad \text{т. } H_2[X_{H3}(\alpha_{Hк}),\ Y_{H3}(\alpha_{Hк})]. \qquad (10)$$

Като се използват Хероновата формула [4] и зависимостите (8) и (10) за съответните координати на върховете на триъгълниците $S_{1TP}(\varphi)$ и $S_{2TP}(\varphi)$ за техните ориентирани лица се получава:

$$S_{1TP}(\varphi) = 0{,}5\left[X_{E3}(\varphi)\cdot Y_{H3}(\varphi) - X_{H3}(\varphi)\cdot Y_{E3}(\varphi)\right]$$

$$S_{2TP}(\varphi) = 0{,}5\left[X_{H3}\left(\varphi + 2\pi\frac{z-1}{z}\right)\cdot Y_{E3}\left(\varphi + 2\pi\frac{z-1}{z}\right) - X_{E3}\left(\varphi + 2\pi\frac{z-1}{z}\right)\cdot Y_{H3}\left(\varphi + 2\pi\frac{z-1}{z}\right)\right] \quad (11)$$

2. Лица на криволинейните сектори OE_1E_2 от епициклоидното колело и OH_1H_2 от хипоциклоидното колело

Като се използват равенства (1) и (2), за параметричните уравнения, описващи профила на епициклоидното колело в $X_0 0 Y_0$ във функция от ъгъла φ и параметричния ъгъл α_E се получава:

$$X_{E0}(\varphi;\alpha_E) = \frac{m}{2}\left[z\sin\left(\frac{\alpha_E - \varphi z}{z-1}\right) - \lambda\sin\left(\frac{z(\alpha_E-\varphi)}{z-1}\right) + \frac{2r_ц^*\left[\lambda\sin\left(\frac{z(\alpha_E-\varphi)}{z-1}\right) - \sin\left(\frac{\alpha_E-\varphi z}{z-1}\right)\right]}{\sqrt{1-2\lambda\cos\alpha_E+\lambda^2}}\right],$$

$$Y_{E0}(\varphi;\alpha_E) = \frac{m}{2}\left[z\cos\left(\frac{\alpha_E - \varphi z}{z-1}\right) - \lambda\cos\left(\frac{z(\alpha_E-\varphi)}{z-1}\right) + \frac{2r_ц^*\left[\lambda\cos\left(\frac{z(\alpha_E-\varphi)}{z-1}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_E-\varphi z}{z-1}\right)\right]}{\sqrt{1-2\lambda\cos\alpha_E+\lambda^2}} + \lambda\right] \quad (12)$$

и тогава лицето $S_{OE_1E_2}(\varphi)$ може да бъде пресметнато като лице на криволинеен сектор в полярна координатна система [3] с интеграла

$$S_{OE_1E_2}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\theta_E(\alpha_{EH})}^{\theta_E(\alpha_{EK})}\left(\left[X_{E0}(\varphi,\alpha_E)\right]^2 + \left[Y_{E0}(\varphi,\alpha_E)\right]^2\right)d\theta_E(\varphi,\alpha_E), \quad (13)$$

където $\theta_E(\varphi,\alpha_E) = arctg\left(\frac{Y_{E0}(\varphi,\alpha_E)}{X_{E0}(\varphi,\alpha_E)}\right)$.

Аналогично от (3) и (4) намираме параметричните уравнения на хипоциклоидното колело:

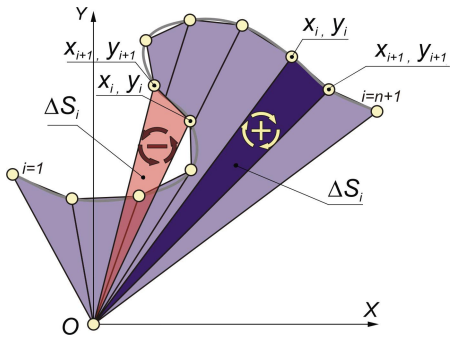
$$X_{H0}(\varphi;\alpha_H) = \frac{m}{2}\left[-z\sin\left(\frac{\alpha_H + \varphi z}{z+1}\right) + \lambda\sin\left(\frac{z(\alpha_H-\varphi)}{z+1}\right) - \frac{2r_ц^*\left[\lambda\sin\left(\frac{z(\alpha_H-\varphi)}{z+1}\right) + \sin\left(\frac{\alpha_H-\varphi z}{z+1}\right)\right]}{\sqrt{1-2\lambda\cos\alpha_H+\lambda^2}}\right]$$

$$Y_{H0}(\varphi;\alpha_H) = \frac{m}{2}\left[z\cos\left(\frac{\alpha_H + \varphi z}{z+1}\right) + \lambda\cos\left(\frac{z(\alpha_H-\varphi)}{z+1}\right) - \frac{2r_ц^*\left[\lambda\cos\left(\frac{z(\alpha_H-\varphi)}{z+1}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_H-\varphi z}{z+1}\right)\right]}{\sqrt{1-2\lambda\cos\alpha_H+\lambda^2}} - \lambda\right], \quad (14)$$

а $S_{OH_1H_2}(\varphi)$ може да бъде пресметнато с интеграла:

$$S_{OH_1H_2}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\theta_H(\alpha_{HH})}^{\theta_H(\alpha_{HK})}\left(\left[X_{H0}(\varphi,\alpha_H)\right]^2 + \left[Y_{H0}(\varphi,\alpha_H)\right]^2\right)d\theta(\varphi,\alpha_H), \quad (15)$$

където $\theta_H(\varphi,\alpha_H) = arctg\left(\frac{Y_{H0}(\varphi,\alpha_H)}{X_{H0}(\varphi,\alpha_H)}\right)$.



Фиг. 3. Метод на трапеците приложен в полярна координатна система

3. Числен метод за решаване на интегралите (13) и (15)

Интегралите (13) и (15) могат да бъдат решени числено, като се използва метод аналогичен на метода на трапеците [3], но приложен в полярна координатна система с пресмятане на ориентираните лица на елементарни триъгълници ΔS_i (фиг. 3). Численото определяне лицето S на криволинейния сектор при изменение на координатите на точките от $i = 1$ до $i = n + 1$, се определя от равенството:

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{X_{i+1}Y_i - X_i Y_{i+1}}{2}, \tag{16}$$

където n е броя на подинтервалите (броя на елементарните триъгълници).

Изхождайки от (16), лицето на сектора $S_{OE_1E_2}(\varphi)$ е

$$S_{OE_1E_2}(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{X_{E0}(\varphi, \alpha_{E(i+1)}) \cdot Y_{E0}(\varphi, \alpha_{Ei}) - X_{E0}(\varphi, \alpha_{Ei}) \cdot Y_{E0}(\varphi, \alpha_{E(i+1)})}{2}, \tag{17}$$

където $\alpha_{E(i+1)} = \alpha_{Ei} + \Delta\alpha_E = \alpha_{Ei} + \dfrac{\alpha_{E1} - \alpha_{E(n+1)}}{n}$, а $\alpha_{E1} = \alpha_{Eн}$ и $\alpha_{E(n+1)} = \alpha_{Eк}$.

По същия начин лицето на сектора $S_{OH_1H_2}(\varphi)$ е

$$S_{OH_1H_2}(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{X_{H0}(\varphi, \alpha_{H(i+1)}) \cdot Y_{H0}(\varphi, \alpha_{Hi}) - X_{H0}(\varphi, \alpha_{Hi}) \cdot Y_{H0}(\varphi, \alpha_{H(i+1)})}{2}, \tag{18}$$

където $\alpha_{H(i+1)} = \alpha_{Hi} + \Delta\alpha_H = \alpha_{Hi} + \dfrac{\alpha_{H1} - \alpha_{H(n+1)}}{n}$, а $\alpha_{H1} = \alpha_{Hн}$ и $\alpha_{H(n+1)} = \alpha_{Hк}$.

4. Алгоритъм и числен пример

Численото определяне обема на работната камера $V_k(\varphi)$ при определен ъгъл на завъртане φ на цевното колело се пресмята с помощта на персонален компютър по алгоритъма, представен на фиг. 4.

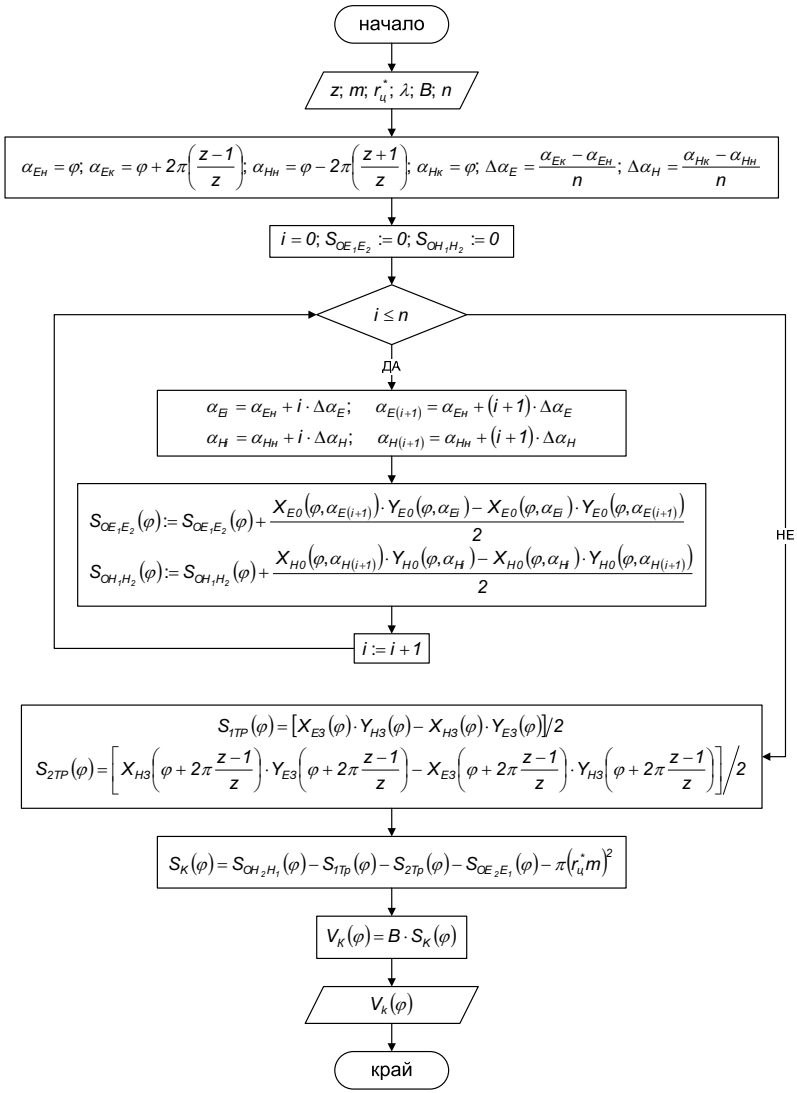
На фиг. 5 графично са представени резултатите на $V_k(\varphi)$ в границите $\varphi = \pi/z \div \pi + \pi/z$ от три числени примера за помпи с независими геометрични параметри $z = 7; m = 6\,mm; r_ц^* = 0{,}833; B = 10\,mm$ и три стойности на коефициента на скъсеност на хипо- епициклоидната крива: $\lambda_1 = 0{,}575$; $\lambda_2 = 0{,}7$; $\lambda_3 = 0{,}817$. Вижда се, че с намаляване на λ амплитудата на изменението на обема на работната камера също намалява. Това се обяснява с факта, че с намаляване на λ намалява и височината на зъбите на епи- и хипоциклоидните колела.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основните резултати, получени при работа, са:

– Показано е, че работната камера на разглеждания вид хидравлични машини при всяко текущо положение е заградена от четири криви в челно сечение: профилът на вътрешните зъби от хипоциклоидното колело; профилът на външните

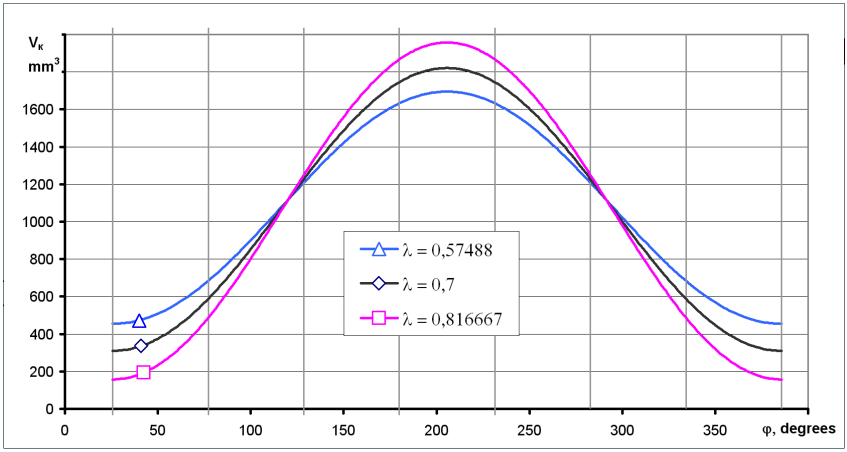
зъби от епициклоидното колело; кръговите профили на два съседни зъба от цевното колело.



Фиг. 4. Алгоритъм за числено определяне обема на една работна камера

– При познати параметрични уравнения, описващи профилите на зъбите от хипоциклоидното и епициклоидното колело, е изяснена геометрията, свързана с образуването и изменението на обема на работните камери в хидравличната машина.

– Предложен е числен метод за определяне площта на работната камера във функция от ъгъла на завъртане на цевното колело при различни независими геометрични параметри



Фиг. 5. Обем на една работна камера за помпа

с $z = 7;\ m = 6\,mm;\ r_{ц}^{*} = 0{,}833333; B = 10\,mm$

– Представени са резултати от числени примери, които демонстрират работоспособността на разработения модел.

Разработеният метод за определяне обема на работните камери дава възможност за изследване кинематиката на този вид хидравлични машини - дебит и геометрична неравномерност на дебита на трироторни хидромашини с цевно зацепване.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Алипиев О., Ив. Николаев, Г. Попов. Геометрично проектиране на зъбни помпи с двустранно цевно зацепване. Механика на машините, ISSN 0861-9727, №80, Варна 2009, книга 1, стр. 86-92.

[2] Алипиев О., Ив. Николаев, Г. Попов. Трироторна, хидравлична машина с двустранно, цевно зацепване. Научни трудове на РУ "А. Кънчев", том 47, сер. 1.2, Русе 2008, стр. 18-25.

[3] Дочев Д., Д. Пантелеев, П. Павлов, И. Иванов. Лекции по математичен анализ – I част. Печатна база при ВТУ „Ангел Кънчев”, Русе, 1985.

[4] Хитов Х. Геометрия на триъгълници. Изд. „Народна просвета”, София, 1990.

За контакти:

Ст. ас. инж. Ивайло Николаев, катедра “Топлотехника, хидро и пневмотехника”, Русенски университет, Тел.: 082 / 888 -582, E-mail: nikolaev@ru.acad.bg;

Доц. д-р инж. Огнян Алипиев, катедра “Теория на механизмите и машините, и подемно-транспортна техника и технологии”, Русенски университет Тел.: 082 / 888 - 593, E-mail: oalipiev@ru.acad.bg;

Доц. д-р инж. Генчо Попов, катедра “Топлотехника, хидро и пневмотехника”, Русенски университет, Тел.: 082 / 888 -580, E-mail: gspopov@ru.acad.bg;

Гл. ас. д-р инж. Красимир Тужаров, “Топлотехника, хидро и пневмотехника”, Русенски университет, Тел.: 082 / 888 -581, E-mail: tujarov@ru.acad.bg;

Гл. ас. инж. Климент Климентов, “Топлотехника, хидро и пневмотехника”, Русенски университет, Тел.: 082 / 888 -581, E-mail: kklimentov@ru.acad.bg.

Докладът е рецензиран.