

Дву - критериална оптимизация по Парето с допълнителни условия

Васил Колев, Николай Китанов

A two – criteria Pareto optimization with additional condition: Decision making problem on Pareto optimal solutions for two-criteria optimizations are considered. A usually numbers of Pareto solution are more than one. We are proposed method for decreasing optimal Pareto solutions by additionally conditions for good decision making choice on official decision making person.

Key words: Decision making, Pareto optimal solutions.

ВЪВЕДЕНИЕ

Многокритериалната (векторна) оптимизация разглежда оптимизационни задачи, в които се минимизират (максимизират) повече от една целеви функции. Тя е раздел от теорията на оптимизация. Към такива задачи водят проблеми от различни области на техниката, икономиката, транспорта др.

Векторната оптимизация е свързана със задачата за вземане на решения. Тя се състои в избор на такова решение от множеството на всевъзможните решения (наречени още варианти или планове), което се явява в определен смисъл най-доброто или с други думи оптимално решение. Счита се, че този избор на решение се извършва от някакво лице, което преследва определени цели в зависимост от конкретната ситуация. Лицето може да бъде отделен човек или цял колектив. Всяко възможно решение характеризира определена степен за достигане на целта или целите. Лицето вземащо решения има свои представи за предимствата и недостатъците на решенията въз основа на които едно решение се предпочита пред друго.

В многокритериалните задачи има цяло множество от целеви функции или критерии $f_1, f_2, \dots, f_m$, дефинирани върху множеството от решения X . Предполага се, че $m > 1$, тъй като при $m = 1$ получаваме еднокритериална задача. Множеството на целевите функции образуват вектор – функция, $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$. Наред с множеството от допустими решения X разглеждаме и множеството $Y = F(X) = \{y \in R^m, y = f(x), \text{ при } x \in X\}$ което се нарича **множество от оценки**, а самите негови елементи наричаме **оценки**. Често пространството R^n , в което се съдържа X се нарича **пространство на решенията**, а пространството R^m , в което се съдържа Y – **пространство на оценките** или **критериално пространство**.

На всяко решение, $x \in X$, съответства напълно определена оценка $y = f(x) \in Y$. За всяка оценка, $y \in Y$, отговарят решения $x \in X$ като $f(x) = y$. Между двете множества X и Y има тясна връзка. Избора на решения от X е равнозначен избор на съответстваща оценка от Y .

ОТНОШЕНИЕ НА СТРОГО ПРЕДПОЧИТАНЕ

Ако за две дадени решения x и y от множеството $X(Y)$ лицето е избрало решение x , то казваме че това решение е по-предпочитано от решение y . Всички двойки от вида (x, y) , където $x, y \in X$, за които решението x е по-предпочитано от решението y , образуват множество наречено **отношение на строго предпочитане** $\succ$. Това множество е отношение в множеството X . Отношението $x \succ y$ означава, че решението x е по-предпочитано от решението y .

Отношението на строго предпочитане $\succ$ е асиметрично, ирефлексивно, и транзитивно. То е инвариантно относно положително линейно преобразуване (ИопЛП), тоест за произволни два вектора $y \in R^m$ и $y' \in R^m$ от верността на отношението $y \succ y'$ следва верността на отношението $ky + c \succ ky' + c$ за всяко $k > 0$ и всяко $c \in R^m$.

Ще казваме че решението $x^0 \in X$ (оценката $y^0 \in Y$) е оптимално относно отношението на строго предпочитане ако не съществува друго решение $x \in X$ (оценка $y \in Y$), за което да е вярно $x \succ x^0$ ($y \succ y^0$). Множеството от всички оптимални решения отбелязваме с $\text{opt}^>X(Y)$.

Освен това отношението на строго предпочитане удовлетворява следната аксиома.

Аксиома на Парето [1]

За всеки два вектора $y, y' \in R^2$ от отношенията $y \geq y'$ следва отношението $y \succ y'$.

Забележка: За два вектора, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$, отношението $y \geq y'$, означава че

$$y_i \geq y'_i \quad \text{и} \quad y \neq y',$$

където $i = 1 : n$. Множеството от всички оптимални по Парето оценки ще отбелязваме с $P(Y)$.

Много често полученото оптимално по Парето множество, $P(Y)$, съдържа голям брой елементи, което затруднява взимането на решения. Ето защо се налага свиване или редуциране на това множество. Това е възможно само чрез използване на допълнителна информация за отношението строго предпочитане. В конкретните ситуации допълнителните сведения се задават по различен начин.

Въвеждаме следното:

Изискване за допълнителна информация на отношението строго предпочитане $\succ$ (ИДИ).

Нека разгледаме двойки вектори $u^{(i)}$ и $v^{(i)} \in R^2$, $i=1,2,\dots,l$, такива че $u^{(i)} \succ v^{(i)}$ за всяко $i \in N = \{1,2,\dots,l\}$, където $N \neq \emptyset$. Отбелязваме, че векторите не изпълняват нито едно от неравенствата

$$u^{(i)} \geq v^{(i)} \quad \text{и} \quad v^{(i)} \geq u^{(i)}. \quad (1)$$

След като не е изпълнено нито едно от горните неравенства, то това означава, че е получена допълнителна информация.

Забележка. Съгласно ИОПЛП винаги може да се приеме всички вектори $v^{(i)}$ да са нулеви. Ако е вярно отношението $u^{(i)} \succ v^{(i)}$ то съгласно ИОПЛП е в сила $u^{(i)} - v^{(i)} \succ O_2$. Ако лявата част на това отношение означим с $u^{(i)}$ получаваме допълнителна информация с нулеви вектори $v^{(i)}$.

Ако отношението строго предпочитано $\succ$ е добре дефинирано за решение се избира всяко решение от множеството $\text{opt}^>Y$. На практика рядко се знае всичко за отношението $\succ$. Непълната информация за отношението строго предпочитане води до непълно и неточно описание на множеството $\text{opt}^>Y$. Поражда се въпроса за оценка отгоре на неизвестното множество $\text{opt}^>Y$. В резултат на предварителните проучвания и анализи, лицето взимащо решение успява да определи няколко двойки оценки y, y' , за които не е вярно, нито неравенството $y \geq y'$, нито неравенството $y' \geq y$. Въпреки това лицето взимащо решение с увереност може да каже кое решение във всяка една от двойките е предпочетено. На базата на такава информация се построява оценката отгоре за търсеното множество $\text{opt}^>Y$. Това способствува за обоснован избор на оптимално решение.

ОБОСНОВКА НА АЛГОРИТЪМА

Алгоритъмът за дву-критериална оптимизация с допълнителни условия се основава на една теорема, която ще изложим по-долу. Нека въведем множества от индекси:

$$N_1 = \{i \in N / u_1^{(i)} < v_1^{(i)}, u_2^{(i)} > v_2^{(i)}\}, \quad N_2 = \{i \in N / u_1^{(i)} > v_1^{(i)}, u_2^{(i)} < v_2^{(i)}\}. \quad (2)$$

Въз основа на ИДИ са в сила равенствата $N_1 \cup N_2 = N$ и $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Възможно е $N_1 = \emptyset$ или $N_2 = \emptyset$, но едновременното изпълнение на тези неравенства не е възможно, тъй като $N \neq \emptyset$. Въвеждаме положителните константи:

$$K_i = \frac{u_2^{(i)} - v_2^{(i)}}{v_1^{(i)} - u_1^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

След преномериране на векторите $u^{(i)}, v^{(i)}$ (ако е необходимо), можем да считаме че са в сила равенствата:

$$K_1 = \min_{i \in N_1} K_i \quad \text{и} \quad K_2 = \max_{i \in N_2} K_i \quad (4)$$

Теорема 1. [2] (оптималност при наличие на допълнителни информация)

В сила е равенството

$$\text{opt } Y = P_F(Y), \quad (5)$$

където $P_F(Y)$ е множество от **оптимални по Парето** решения относно вектор-функцията F

$$F(y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 + (1 - \lambda_1) y_2 \\ \lambda_2 y_1 + (1 - \lambda_2) y_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

върху множеството $Y \subset R^2$. Тук λ_1, λ_2 са числа, определени в случая $N_1 \neq \emptyset, N_2 \neq \emptyset$ чрез равенствата

$$\lambda_i = \frac{u_2^{(i)} - v_2^{(i)}}{u_2^{(i)} - v_2^{(i)} + v_1^{(i)} - u_1^{(i)}} > 0. \quad (7)$$

При $N_1 = \emptyset$ коефициента λ_2 се определя от (7), а $\lambda_1 = 0$. При $N_2 \neq \emptyset, \lambda_2 = 0$, а коефициента λ_1 се намира от равенството (7).

ОПИСАНИЕ НА АЛГОРИТЪМА

Входни параметри:

N - броя на входните оптимални по Парето решения (оценки).
 M - брой на входните допълнителните условия

Изходни параметри:

Оптимални решения $\text{opt } Y$

Първа стъпка

Определяне множествата N_1 и N_2 съгласно (2).

Втора стъпка

Пресмятане на коефициентите K_1 и K_2 според (3) за множествата N_1 и N_2 , където $i = 1, 2, \dots, N$.

Трета стъпка

Пресмятане на коефициентите $K_1 = \min_{i \in N_1} K^{N_1}(i)$ и $K_2 = \max_{i \in N_2} K^{N_2}(i)$ от множество чрез (4).

Четвърта стъпка

Пресмятането на коефициентите $\lambda_i = \frac{u_2^{(i)} - v_2^{(i)}}{u_2^{(i)} - v_2^{(i)} + v_1^{(i)} - u_1^{(i)}}, \quad i = 1, 2,$ чрез (7) със стойности на функциите $u^{(i)}$ и $v^{(i)}$ с които са получени коефициентите K_1 и K_2 .

Пета стъпка

Следващата стъпка е пресмятане на вектор функцията за обновяване:

$$F(y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 + (1 - \lambda_1) y_2 \\ \lambda_2 y_1 + (1 - \lambda_2) y_2 \end{pmatrix}.$$

Шеста стъпка

С получената вектор функция обновяване обновяваме входните оптимални по Парето оценки (решения) $Y(X)$, $P_F(Y) = F(y) * Y$. От този резултат търсим оптималните решения $\text{opt } Y = P_F(Y)$.

Пример 1. (N = 4, M = 3)

Ще намерим оценка отгоре за множеството Y , където $Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \right\}$, при условие, че отношението строго предпочитане $\succ$ удовлетворява изискванията наложени по-горе, допълнителните условия са от вида $u^{(i)} \succ v^{(i)}$, за $i = 1, 2, 3$:

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ и } v^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ и } v^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Първо намираме множествата N_1 и N_2 :

$$N_1 = \left\{ i \in N \{1, 2, 3\} \mid u_1^{(i)} < v_1^{(i)}, u_2^{(i)} > v_2^{(i)} \right\} \text{ и } N_2 = \left\{ i \in N \{1, 2, 3\} \mid u_1^{(i)} > v_1^{(i)}, u_2^{(i)} < v_2^{(i)} \right\}$$

В нашия случай те са $N_1 = \{1, 3\}$ и $N_2 = \{2\}$. Чрез (3) и (4) пресмятаме коефициентите:

$$K_1 = \min_{i=1,3} \frac{u_2^{(i)} - v_2^{(i)}}{v_1^{(i)} - u_1^{(i)}} = \frac{u_2^{(1)} - v_2^{(1)}}{v_1^{(1)} - u_1^{(1)}} = \frac{3}{2} \text{ и } K_2 = \frac{u_2^{(2)} - v_2^{(2)}}{v_1^{(2)} - u_1^{(2)}} = \frac{1}{4}.$$

Както се вижда минимума за определяне на K_1 е получен при $i=1$, затова другите вектори съответстващи на останалите индекси от N_1 се изключват. Така условието $u^{(3)} \succ v^{(3)}$ може да бъде изключено като не съдържащо допълнителна информация в сравнение с отношенията $u^{(i)} \succ v^{(i)}$, $i = 1, 2$. Използвайки (6) и (7) определяме вектор-

функцията $F(y) = \left(\begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} y_2 \right)$, чрез която трансформираме множеството Y в

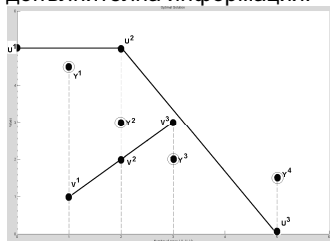
множеството $F(Y) = \frac{1}{5} \left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$, откъдето получаваме оптималните по

Парето решенията относно вектор функцията F , тоест $P_F(Y) = \frac{1}{5} \left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$. Тогава

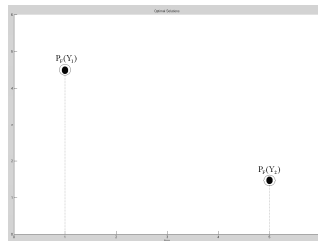
оптималното решение е $\text{opt } Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \right\}$. Следователно векторите $(2, 3)$ и $(3, 2)$

не са оптимални. Множеството $\text{opt } Y$ се състои от елементите $\begin{pmatrix} 1 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$, но

може да се състои и от двата елемента. За още по-конкретен извод се нуждаем от още допълнителна информация.



а) Парето решения $Y^{(i)}$ и доп. условия $u^{(i)}$ и $v^{(i)}$



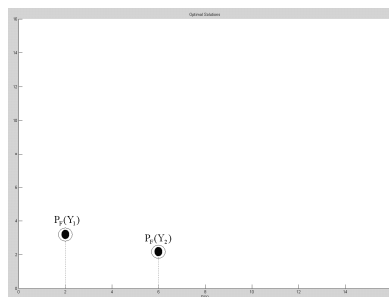
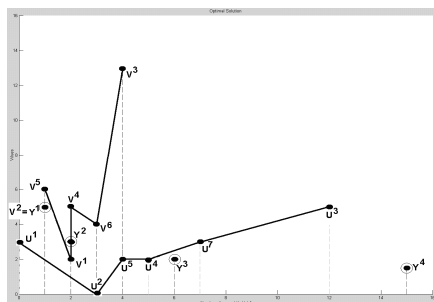
б) Новите оптимални $P_F(Y_m)$

фиг. 1 Пример 1

Пример 2. (N = 4, M = 6)

Нека са получени оптимални по Парето решения: $Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 1.5 \end{pmatrix} \right\}$ и са дадени допълнителните условия $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $u^{(3)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $v^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}$, $u^{(4)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $v^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $u^{(5)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $v^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $u^{(6)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $v^{(6)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Чрез представения алгоритъм броя на оптималните m -решения се минимизира (фиг.2):

$$\text{opt} \succ Y = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$



а) Парето решения $Y^{(i)}$ и доп.условия $u^{(i)}$ и $v^{(i)}$ б) Новите оптимални $P_F(Y_m)$

фиг. 2 Пример 2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получаването на оптимални по Парето решения Y , не е достатъчно за лицето вземащо решение. Съществува разлика между множествата $\text{opt} \succ Y$ и множеството на Парето решенията $P(Y)$. В настоящата статия е предложен метод на двукритериална оптимизация за намаляване на Парето решенията с използване на допълнителни условия. Дадени са примери с различни допълнителни условия, при които се намаляват избора за оптимални решения по Парето.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Подиновский, В., Ногин В., Парето-оптимальные решения. Многокритериальных задач, „Наука“, Москва 1982
- [2] Яровой, А. Исследование операций. Элементы многокритериальной оптимизации, Одесса 1988

За контакти:

Васил Колев, БАН, е-mail: kolev_acad@abv.bg

д-р Николай Китанов, ЮЗУ “Неофит Рилски”, е-mail: nkitanov@abv.bg

Докладът е рецензиран.