

Метод за изчисляване на лингвистични вероятности и прилагането им към лошо определени ситуации

Илияна Раева, Румен Раев

Abstract: In the paper, the main characteristic concepts underlying the so-called linguistic approach to the analysis of complex or poorly defined systems and processes of decision making are presented. Proposed method for calculating probabilities of linguistic and calculation is made of a linear combination of fuzzy probabilities. In the conclusion, some of the main applications of the presented theory and ideas for further theoretical studies are given.

Key words: Linguistic variable, Probability, linear combination of fuzzy probability

ВЪВЕДЕНИЕ

В класическия теоретико-вероятностен модел, събитието A се определя като елемент на полето $\mathbf{A}$, което е подмножество на пространството от елементарни събития Ω . Така например, ако P е нормирана мярка над измеримото пространство $(\Omega, \mathbf{A})$, то вероятността $P(A)$ за събитието A се определя като мярка на множеството A и е число от интервала $[0, 1]$.

От гледна точка обаче на лингвистиката могат да съществуват някои реални проблеми, свързани с неточността на определянето на предпоставките в понятието „събитие“

Често се случва да е непълно определено самото събитие A . Ако например A е събитието „топъл ден“ можем да зададем въпроса: „Каква е вероятността утре да бъде топъл ден?“ В този случай събитието „топъл ден“ – е неточно(размито) събитие. Не съществува рязка граница между неговото появяване и непоявяване. Такова събитие може да се характеризира като размито подмножество A на пространството от елементарни събития Ω с измерима функция на принадлежност μ_A

Дори ако A е напълно определено събитие с вероятност $P(A)$, то може да е определено лошо. Например, на въпроса „Каква е вероятността, след месец средната цена на акциите на фирма X да бъде по-висока?“ Би било неразумно да се отговори еднозначно с число като например 0.7. В този случай неопределения отговор от типа „напълно вероятно“ би съответствал повече на нашето неясно разбиране на динамиката на цените на акциите на фирмата и следователно по-реалистично и по-точно би охарактеризирал разглежданата вероятност.

Ограниченията, получени от приемането на факта, че A е напълно определено събитие, могат частично да се решат като се предположи, че събитието A е размито събитие [1]. Важна стъпка към прилагането на теорията на вероятностите към лошо определените ситуации се състои в допускането на това, че вероятността P може да бъде лингвистична променлива в см. [2]. Ще предложим подход за изчисление на размити вероятности. Този метод може да се разглежда като допълнение и развитие на класическата теория от гледна точка на лингвистичния модел на описание на тази теория.

ИЗЛОЖЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НА ПОНЯТИЕТО ЛИНГВИСТИЧНА ВЕРОЯТНОСТ

Ще разглеждаме променливата X над крайно универсално множество:

$$U = u_1 + u_2 + \dots + u_p \quad (1)$$

Ще предполагаме, че ограничението обусловено от X съвпада с U . С други думи всяка точка от U може да бъде избрана за значение на променливата X .

На всеки елемент $u_i, i = 1, 2, \dots, p$ ние ще съпоставим лингвистична вероятност P_i -булева лингвистична променлива. Променливата $p_i, 0 \leq p_i \leq 1$ - базова променлива

за P_i . За определеност ще предположим, че универсалното множество V , съответстващо на P_i , представлява само по себе си или единичен интервал $[0,1]$ или крайно множество

$$V=0+0.1+0.2+\dots+0.9+1 \quad (2)$$

Важно свойство на лингвистичните вероятности $P_1, P_2, \dots, P_n$, е че те са β - взаимодействия в см.[3] Взаимодействието между P_i е следствие на ограничението

$$(+ \Delta \text{ аритметична сума}) p_1+p_2+\dots+p_n=1 \quad (3)$$

в която p_i са базови променливи (т. е. числови вероятности), свързани с P_i . По конкретно нека $R(p_1, p_2, \dots, p_n=1)$ означава размито n -арно отношение в $[0,1] \times \dots \times [0,1]$, представляващо (3). Нека освен това $R(P_i)$ обозначава ограничение на значението на променливата p_i . Тогава ограничението обусловено от n -арната размита променлива $(P_1, P_2, \dots, P_n)$, можем да запишем във вида:

$$R(P_1, P_2, \dots, P_n) = R(P_1 \times R(P_2) \times \dots \times R(P_n)) \cap R(p_1+p_2+\dots+p_n=1). \quad (4)$$

Откъдето следва, че без ограничение (3) размитите променливи $P_1, P_2, \dots, P_n$ биха били невзаимодействащи.

ИЗЧИСЛЕНИЯ С ЛИНГВИСТИЧНИ ВЕРОЯТНОСТИ

В много случаи приложенията на теорията на вероятностите например за изчисление на средни стойности (математическо очакване) и дисперсия често се среща линейна комбинация от вида: $(+, \Delta \text{ аритметична сума})$

$$Z = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n \quad (5)$$

където a_i са реални числа, а p_i са значения на вероятности от интервала $[0,1]$. Ако p_i са числа от интервала $[0,1]$, то изчисляването на значението на комбинацията Z при зададени a_i и p_i не представлява трудност. Но то изглежда нетривиално ако разглежданите вероятности са лингвистически по своята природа т. е. когато:

$$Z = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_n P_n \quad (6)$$

където p_i са такива лингвистични значения на вероятности като „правдоподобно“, „неправдоподобно“, „много правдоподобно“, „близо до α “ и т.н. Съответно Z не е реално число, както в (5), а размито подмножество на реалната ос $W \Delta (-\infty, +\infty)$, при това функцията на принадлежност на подмножеството Z зависи от функцията на принадлежност на P_i .

В предположението, че размитите променливи $P_1, P_2, \dots, P_n$ са не взаимодействия, ограничението, обусловено от $P_1, P_2, \dots, P_n$ приема вида:

$$R(P_1, P_2, \dots, P_n) = R(P_1 \times R(P_2) \times \dots \times R(P_n)) \cap R(p_1+p_2+\dots+p_n=1). \quad (7)$$

Нека $\mu(p_1, p_2, \dots, p_n)$ е функция на принадлежност на ограничението $R(P_1 \times R(P_2) \times \dots \times R(P_n))$ и нека $\mu_i(p_i)$ е функция на принадлежност на ограничението $R(P_i)$, $i=1, 2, \dots, n$. Тогава, прилагайки принципа на обобщение и (5) може да се изрази Z във вид на размитото множество $(+, \Delta \text{ аритметична сума})$

$$Z = \int_W \mu(p_1 p_2 \dots p_n) / (a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n), \quad (8)$$

Кое то от (7) може да се запише като:

$$\int_W \mu(p_1) \wedge \dots \wedge \mu(p_n) / (a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n), \quad (9)$$

При това, p_i в (9) удовлетворяват ограничението $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

По такъв начин ние можем да представим линейната комбинация на значението на лингвистичните вероятности на размити подмножества на реалната ос. Изразът за Z може да се запише по друг по-удобен за изчисление начин. Тъй като $\mu(z)$ е функцията на принадлежност на множеството Z при това $z \in W$. Тогава от (9) следва, че:

$$\mu(z) = \bigvee_{p_1, \dots, p_n} \mu(p_1) \wedge \dots \wedge \mu(p_n) \quad (10)$$

При ограничения

$$Z = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n \quad (11)$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

В този случай изчисляването на Z се свежда до задачата на нелинейното програмиране с линейни ограничения. По-точно тази задача може да се формулира по следния начин:

Да се максимализира z при следните ограничения: $(+ \Delta \text{ аритметична сума})$:

$$\begin{aligned} \mu_1(z_1) &\geq z \\ \dots\dots\dots \\ \mu_n(z_n) &\geq z \\ Z &= a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

За илюстрация на направените по-горе разсъждения и изводи ще разгледаме следния пример:

Да предположим, че са дадени събитията

$P_1 = \text{"правдоподобно"}$
 $P_2 = \text{"неправдоподобно"}$

където:

$$\text{"правдоподобно"}' = \int_0^1 \mu_{\text{правдоподобно}}(p) / p$$

$\text{"неправдоподобно"} = \neg \text{правдоподобно}$

Тогава

$$\mu_{\text{неправдоподобно}}(p) = \mu_{\text{правдоподобно}}(1 - p), \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (13)$$

Да предположим, че искаме да изчислим математическото очакване

$(+ \Delta \text{ аритметична сума})$ във вида:

$Z = a_1 \text{"правдоподобно"} + a_2 \text{"неправдоподобно"}$

$$\text{Откъдето получаваме: } \mu(z) = \bigvee_{p_1, p_2} \mu_{\text{правдоподобно}}(p_1) \wedge \mu_{\text{неправдоподобно}}(p_2) \quad (14)$$

При ограничения: $z = a_1 p_1 + a_2 p_2$

$$p_1 + p_2 = 1$$

Сега от (13) ако $p_1 + p_2 = 1$, имаме

$$\mu_{\text{правдоподобно}}(p_1) = \mu_{\text{неправдоподобно}}(p_2)$$

и следователно (14) се свежда до: $\mu(z) \mu_{\text{правдоподобно}}(p_1)$, $z = a_1 p_1 + a_2 (1 - p_1)$

$$\text{Или в по-явна форма } \mu(z) = \mu_{\text{правдоподобно}}\left(\frac{z - a_2}{a_1 - a_2}\right)$$

От този резултат следва, че размитостта на нашето знание за вероятността p_1 води до съответната размитост на математическото очакване $z = a_1 p_1 + a_2 p_2$

Ако предположим, че универсалното множество от значения на вероятности има $V = 0 + 0.1 + \dots + 0.9 + 1$ то изразът за z се получава непосредствено като се използва принципът на обобщението във вида [2]. Като илюстрация, ще предположим, че

$$P_1 = 0.3 = 0.8/0.2 + 1/0.3 + 0.6/0.4 \quad (15)$$

$$P_2 = 0.7 = 0.8/0.6 + 1/0.7 + 0.6/0.8 \quad (16)$$

$$\text{и } (\oplus \underset{=}{=} \text{ аритметична сума}) Z = a_1 P_1 \oplus a_2 P_2 \quad (17)$$

където символът $\oplus$ се използва за избягване на неяснотата със значение обединение.

Замествайки (15) и (16) в (17) получаваме:

$$Z = a_1 (0.8/0.2 + 1/0.3 + 0.6/0.4) \oplus a_2 (0.8/0.6 + 1/0.7 + 0.6/0.8) = (0.8/0.2 a_1 + 1/0.3 a_1 + 0.6/0.4 a_1) \oplus (0.8/0.6 a_2 + 1/0.7 a_2 + 0.6/0.8 a_2) \quad (18)$$

Разкривайки скобите в дясната частна (18) трябва да се има предвид и ограничението $p_1 + p_2 = 1$, което означава, че член от вида $\mu_1 / p_1 a_1 \oplus \mu_2 / p_2 a_2$

$$\text{Се свежда до } \mu_1 / p_1 a_1 \oplus \mu_2 / p_2 a_2 = \begin{cases} \mu_1 \wedge \mu_2 (p_1 a_1 \oplus p_2 a_2), & \text{ако } p_1 + p_2 = 1 \\ 0 & \text{в..противен..случай} \end{cases}$$

По такъв начин получаваме

$$Z = 1/(0.3 a_1 \oplus 0.7 a_2) + 0.6/(0.2 a_1 \oplus 0.8 a_2) + 0.6/(0.4 a_1 \oplus 0.6 a_2)$$

т.е. изразът за Z като размито подмножество на реалната ос. $W = (-\infty, \infty)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целта на настоящото изложение бе да се покаже значението на понятието лингвистична променлива за определяне на вероятности и в съчетание с принципа на обобщението приложението на това понятие за изчисляване на линейни комбинации на размити вероятности.

Посоченият метод е в основата на:

- метод за формализация на приближени разсъждения. За разлика от традиционната логика, главен инструмент е не правилото "modus ponens", а т. нар. "композиционно правило на извода".

- на описание на размити алгоритми, в които често е удобно да се определят отношенията между променливите и да им се присвоят конкретни значения с помощта на блок схеми.
- вземане на решения при неопределена обстановка.(приближено описание на реална ситуация).

Развитието на този подход е крачка напред в идеята за разбирането на поведението на хуманитарните системи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zadeh L. A. Probability Measures of Fuzzy events, Jour. Math analysis and appl. 1968
- [2] Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближеннь/х решений. , изд. Москва 1976
- [3] George J. Klir, Tina A. Folger, Fuzzy sets, uncertainty, and information, New York,2001
- [4] Раева И. Приложение на размити функции на лингвистични променливи за семантичен анализ на нееднозначни математически твърдения записани на естествен език, СМБ Русе, ИЗВЕСТИЯ „математика, информатика и физика”, том 1, 2001г.

За контакти:

Илияна Раева, Катедра “Алгебра и геометрия”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 453, e-mail: iraeva@yahoo.com

Румен Раев, катедра “Математичен анализ”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел 082 888 226, e-mail: rumraev@yahoo.com

Докладът е рецензиран.