

Градуирани полиномни тъждества в Матричната алгебра от втори ред над крайномерна Грасманова алгебра

Антоанета Михова

Abstract: Graded polynomial Identities for 2×2 Matrix Algebra Over a Finite Dimensional Grassmann Algebra : In the paper a program written in Mathematica, for multiplying matrices with entries from a Grassmann algebra G_n over n -dimensional vector space is used. Some graded polynomial identities for $n = 1, 2, 3, 4, 5$ are verified.

Key words: Grassmann Algebra, Graded polynomial identities.

ВЪВЕДЕНИЕ

Нека K е поле с характеристика 0 и V е векторно пространство с нареден базис $\{e_1, e_2, \dots\}$.

Грасманова алгебра $G(V)$ върху V се нарича асоциативна алгебра, породена от базисните елементи на V , с определящи съотношения $e_i e_j + e_j e_i = 0$ за всеки $i, j = 1, 2, \dots$. Базисните елементи $\{e_1, e_2, \dots\}$ на векторното пространство V се наричат образувачи за Грасмановата алгебра $G(V)$.

Ако V_n е n -мерно векторно пространство, означаваме с $G_n = G(V_n)$ Грасмановата алгебра над V_n .

Базис на Грасмановата алгебра $G_n = G(V_n)$ е множеството

$$B = \{1, e_1, e_2, e_1 e_2, e_3, e_1 e_3, e_2 e_3, e_1 e_2 e_3, \dots, e_1 e_2 \dots e_n\}$$

и $\dim G_n = 2^n$.

Ако $a = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m}$, $a \neq 1$ е базисен елемент, то m се нарича дължина на елемента a .

Елементите на дадена Грасманова алгебра наричаме грасманови числа.

Всяко грасманово число $x \in G_n = G(V_n)$ може да бъде записано във вида:

$$x = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_1 e_2 + a_4 e_3 + a_5 e_1 e_3 + a_6 e_2 e_3 + a_7 e_1 e_2 e_3 + \dots + a_{2^n-1} e_1 e_2 \dots e_n,$$

$$a_i \in K, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

Четно грасманово число наричаме елемент от Грасмановата алгебра, който е сума от едночлени с четна дължина. Аналогично нечетното грасманово число наричаме елемент, който е сума от едночлени с нечетна дължина.

Векторното пространство V се нарича градуирано, ако се представя като директна сума от негови подпространства V_d , $d = 0, 1, 2, \dots$,

$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots = \sum_{d \geq 0} V_d$. Подпространството V_d се нарича хомогенна компонента от степен d на пространството V .

Алгебрата R се нарича градуирана, ако е градуирана като векторно пространство и нейните хомогенни компоненти R_s удовлетворяват зависимостта $R_d R_l \subseteq R_{d+l}$, за всички $d, l \geq 0$.

Градуираната алгебра R се нарича супералгебра, ако е Z_2 градуирана, т.е. като векторно пространство се разлага на две хомогенни компоненти $R = R_0 \oplus R_1$.

Грасмановата алгебра е супералгебра и $G = G_0 \oplus G_1$, където G_0 и G_1 са хомогенните компоненти, съдържащи съответно четните и нечетните елементи на G .

Забележка 1: Множеството G_0 съвпада с центъра на алгебрата G , т.е. $G_0 = Z(G) = \{z \in G : za = az, \forall a \in G\}$.

С $F\langle X \rangle$ означаваме асоциативната алгебра с елементи $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$, $x_i \in X$, където X е изброимо множество.

Полиномът $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ се нарича градуирано тждество на четни променливи в R , ако за произволни $v_1, v_2, \dots, v_n \in R_0$ е изпълнено $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ и градуирано тждество на нечетни променливи в R , ако $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ за произволни $v_1, v_2, \dots, v_n \in R_1$.

Нека $M_k(G)$ е матричната алгебра на квадратните матрици от ред k с елементи от G . Означаваме с $M_2((G_n)_0)$ и $M_2((G_n)_1)$ множествата на квадратните матрици от втори ред с елементи съответно четни и нечетни грасманови числа от Грасмановата алгебра G_n .

Ако i е цяло число, такова че $0 \leq i \leq 2^n - 1$ и $i = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n(2)}$ е записът на числото в двоична бройна система, където $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то на него може да се съпостави базисният елемент $e_1^{\alpha_n} e_2^{\alpha_{n-1}} \dots e_{n-1}^{\alpha_2} e_n^{\alpha_1}$ от Грасмановата алгебра $G(V_n)$. Това съпоставяне, подробно описано в [5], е използвано при написването на програма на *Mathematica*, която умножава грасманови числа.

В някои от тждествата, които искаме да проверим, участва стандартният полином $S_m(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\sigma \in \text{Sym}(m)} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(m)}$, където $\text{Sym}(m)$ е

симетричната група от степен m и знакът на пермутацията σ е $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$, в зависимост от това дали пермутацията е четна или нечетна. За определянето му използваме следната рекурентна връзка [6]:

$$S_m(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} x_i S_{m-1}(x_{i+1}, \dots, x_m, x_1, \dots, x_{i-1}), & \text{ако } m \text{ е четно число;} \\ \sum_{i=1}^m x_i S_{m-1}(x_{i+1}, \dots, x_m, x_1, \dots, x_{i-1}), & \text{ако } m \text{ е нечетно число.} \end{cases}$$

За матричната алгебра $M_k(K)$ е в сила, доказаната през 1950 година, теорема:

Теорема 1 (на Амицур-Левицки) [1]: Полиномът $S_{2k}(x_1, \dots, x_{2k}) = \sum_{\sigma \in \text{Sym}(2k)} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(2k)}$ е тждество в $M_k(K)$, където $\text{Sym}(2k)$ е

симетричната група от степен $2k$.

По-късно, в [2] Белов и Роуен доказват, че теоремата на Амицур-Левицки е в сила за матрична алгебра над комутативен пръстен:

Теорема 2: S_{2k} е тъждество в $M_k(C)$, за всеки комутативен пръстен C .

В [3] Берел доказва следната теорема:

Теорема 3: Матричната алгебра $M_k(G)$ удовлетворява тъждеството $S_{2k}^p = 0$ за някое $p > 1$, но не удовлетворява нито $S_{2k} = 0$, нито тъждество от вида $S_m^p = 0$ за някое p , когато $m < 2k$.

А Вишне доказва[8]:

Теорема 4: Степента на тъждествата в $M_2(G)$ е по-голяма или равна на 8.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Използваме програмите на *Mathematica*, описани в [5] и [4] за да намерим тъждества, в които участват матрици от множествата $M_2((G_n)_0)$ и $M_2((G_n)_1)$. Търсим тъждества в тези множества за $n=1,2,3,4,5$.

Предимство на разглежданото по-горе съответствие, е възможността лесно да се задават четни и нечетни грасманови числа. За целта използваме функцията на *Mathematica* $DigitCount[a, p, t]$, която извежда като резултат колко пъти цифрата t се среща в p -ичния запис на числото a .

Проверявайки чрез $DigitCount[i, 2, 1]$ колко пъти цифрата 1 се среща в двоичния запис на числото i , ние проверяваме колко образуващи има базисният елемент с коефициент с индекс i . Давайки стойност 0 на всички коефициенти, за индексите на които резултатът от $DigitCount[i, 2, 1]$ е четно число, ние задаваме едно нечетно грасманово число. Аналогично, давайки стойност 0 на всички коефициенти, за индексите на които резултатът от $DigitCount[i, 2, 1]$ е нечетно число, ние задаваме едно четно грасманово число. Използвайки и функцията $Random[type, \{min, max\}]$, която извежда като резултат случайно число от тип *Integer*, *Real* или *Complex* ние можем много лесно да зададем случайно грасманово число.

За проверката на тъждества прилагаме следната последователност: Първо пресмятаме стойността на даден полином за случайни грасманови числа. Ако получим резултат 0, пресмятаме стойността на полинома за произволни грасманови числа с неопределени коефициенти. Това се налага, защото пресмятанията отнемат много компютърно време.

1.1 Разглеждаме матриците $x_i \in M_2((G_1)_0) = M_2(K)$, $i = 1, \dots, 4$, елементите на които са четни грасманови числа с неопределени коефициенти от едномерната грасманова алгебра. От теоремата на Амицур-Левицки следва, че $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

1.2 Нека $x_i \in M_2((G_1)_1)$, $i = 1, 2$. Тъй като $e_1^2 = 0$, то $S_2(x_1, x_2) = 0$.

2.1 Разглеждаме матрици с елементи произволни четни грасманови числа, $x_i \in M_2((G_2)_0)$, $i = 1, \dots, 4$.

$$x_i = \begin{pmatrix} a_{i0} + a_{i3}e_1e_2 & b_{i0} + b_{i3}e_1e_2 \\ c_{i0} + c_{i3}e_1e_2 & d_{i0} + d_{i3}e_1e_2 \end{pmatrix}, \quad a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in K, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 0, 3.$$

За полиномите S_2 и S_3 получаваме матрици от вида на разглежданите, а за полинома S_4 намираме $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

2.2 Ако работим с матрици $x_i \in M_2((G_2)_1)$, $i = 1, 2, 3$,

$x_i = \begin{pmatrix} a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 & b_{i1}e_1 + b_{i2}e_2 \\ c_{i1}e_1 + c_{i2}e_2 & d_{i1}e_1 + d_{i2}e_2 \end{pmatrix}$ получаваме, че S_2 е матрица от вида

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 e_1 e_2 & \gamma_2 e_1 e_2 \\ \gamma_3 e_1 e_2 & \gamma_4 e_1 e_2 \end{pmatrix}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in K \text{ и } S_3 = 0.$$

3.1 В множеството $M_2((G_3)_0)$ за полиномите S_2 и S_3 получаваме матрици от

$$\text{вида } \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 e_1 e_2 + \gamma_1 e_1 e_3 + \delta_1 e_2 e_3 & \alpha_2 + \beta_2 e_1 e_2 + \gamma_2 e_1 e_3 + \delta_2 e_2 e_3 \\ \alpha_3 + \beta_3 e_1 e_2 + \gamma_3 e_1 e_3 + \delta_3 e_2 e_3 & \alpha_4 + \beta_4 e_1 e_2 + \gamma_4 e_1 e_3 + \delta_4 e_2 e_3 \end{pmatrix},$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in K, i = 1, \dots, 4$ и $S_4 = 0$.

3.2 В $M_2((G_3)_1)$, получаваме, че S_2 има вида

$$S_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 e_1 e_2 + \nu_1 e_1 e_3 + \theta_1 e_2 e_3 + \rho_1 e_1 e_2 e_3 & \mu_2 e_1 e_2 + \nu_2 e_1 e_3 + \theta_2 e_2 e_3 + \rho_2 e_1 e_2 e_3 \\ \mu_3 e_1 e_2 + \nu_3 e_1 e_3 + \theta_3 e_2 e_3 + \rho_3 e_1 e_2 e_3 & \mu_4 e_1 e_2 + \nu_4 e_1 e_3 + \theta_4 e_2 e_3 + \rho_4 e_1 e_2 e_3 \end{pmatrix},$$

$\mu_i, \nu_i, \theta_i, \rho_i \in K, i = 1, \dots, 4$,

S_3 е от вида $\begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 e_2 e_3 & \lambda_2 e_1 e_2 e_3 \\ \lambda_3 e_1 e_2 e_3 & \lambda_4 e_1 e_2 e_3 \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in K, i = 1, \dots, 4$ и $S_4 = 0$.

Направени са аналогични пресмятания в множествата $M_2((G_n)_0)$ и $M_2((G_n)_1)$ при $n = 4, 5$. Полученото обобщаваме в следната таблица:

Таблица 1. Тъждества в $M_2((G_n)_0)$ и $M_2((G_n)_1)$, $n=1, 2, 3, 4, 5$.

n - брой образуващи	$M_2((G_n)_0)$	$M_2((G_n)_1)$
$n=1$	$S_4 = 0$	$S_2 = 0$
$n=2$	$S_4 = 0$	$S_3 = 0$
$n=3$	$S_4 = 0$	$S_4 = 0$
$n=4$	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$
$n=5$	$S_4 = 0$	$S_6 = 0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Горните резултати ни дават основание да формулираме отново следните две твърдения, проверени чрез предлаганата програма на *Mathematica*:

Твърдение 5: В множеството на квадратните матрици от втори ред $M_2((G_n)_0)$ с елементи четни грасманови числа от n -мерната Грасманова алгебра е в сила тъждеството $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

Твърдението следва от Теорема 2 и Забележка 1.

Твърдение 6: В множеството на квадратните матрици от втори ред $M_2((G_n)_1)$ с елементи нечетни грасманови числа от n -мерната Грасманова алгебра е в сила тъждеството $S_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$.

Твърдението следва от доказателството на Corollary 2 от [7], в което се използват съществено свойствата на грасмановите числа.

Авторът на статията изказва благодарност на научния си ръководител доц. д-р Цеца Рашкова за полезните разисквания по време на подготовката на статията.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Amitsur, S.A., J. Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 1, 1950, 449-463.
- [2] Belov, A.K., L. Rowen, Computational Aspects of Polynomial Identities, A.K. Peters, 2005
- [3] Berelle B.A., Classification theorems for verbally semiprime algebras, Commun. Algebra, 21(5)(1993), 1505-1512.
- [4] Михова, А., Д. Пеева, Използване на Mathematica за пресмятания с 2×2 матрици над Грасманова алгебра. Научни трудове на РУ "Ангел Кънчев", том 47, сер. 5.1, Русе, 2008, стр. 74-78.
- [5] Михова, А., Ц. Рашкова, Използване на Mathematica за пресмятания с грасманови числа. Научни трудове на РУ "Ангел Кънчев", том 47, сер. 5.1, Русе, 2008, стр. 22-27.
- [6] Rashkova Ts., P. Rashkov, Recursive constructions in the theory of P.I. algebras, Proceeding of the 3rd International Conference "Developments in Language Theory", Thessaloniki, 1997, 559-566.
- [7] Rashkova Ts.G., A. Mihova, Laws and identities for some upper triangular matrices, Mishkolc Mathematical Notes, vol. 10, (2009), No1, 55-67.
- [8] Vishne U., Polynomial identities of $M_2(G)$, Comm. Algebra, 30(2002), 443-454.

За контакти:

Гл.ас. Антоанета Михова, Катедра "Математичен анализ", Русенски университет "Ангел Кънчев", Тел.: 082 888727, E-mail: amihova@ru.acad.bg

Докладът е рецензиран.