

Безкрайно малкото в математиката и достатъчно малкото във физиката

Димитър Попов, Йордан Димов

The infinitely small in mathematics, and the as small as desired in physics: The problems for the infinitely small in mathematics and the enough small in physics have been discussed in connection with the rate of changes of the physical quantities in the space and on the time. It has been shown that the infinitesimal values have not a physical sense. In physics as small as desired values have been generally used.

Key words: *infinitely small, as small as desired*

ВЪВЕДЕНИЕ

В най – общият случай физическите величини се изменят, както в пространството (функции са на координатите), така и с течение на времето (функции са на времето).

Бързината, с която се изменя една скаларна физична величина $u(x, y, z)$ в пространството, се определя от векторът $\vec{\text{grad}} u$, с компоненти по осите x, y и z съответно $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$. Съвкупността от стойностите на физичната величина u в пространството образува така нареченото скаларно поле. Аналогично, при векторните полета $\vec{u}(x, y, z)$ се дефинира тензорът вектор – градиент, чиито компоненти по x, y и z показват пространствената скорост на изменение на компонентите u_x , u_y и u_z на вектора \vec{u} .

Бързината, с която се изменя определена физична величина $a(t)$ с течение на времето, се определя от скоростта $\frac{da}{dt}$ на нейното изменение. Скоростта на изменение е първа производна на $a(t)$ по времето, независимо дали $a(t)$ е векторна или скаларна величина.

Измененията на еднозначните физични величини в пространството с течение на времето, се определят от пълните диференциали на функциите и на независимите променливи.

Съгласно математическите понятия, тези диференциали означават безкрайно малки величини или безкрайно малки изменения. Във физиката, безкрайно малките изменения, безкрайно малките обеми, площи, дължини, интервали от време и др., нямат физически смисъл, защото веществото и електрическият заряд имат прекъснат строеж, а понятието определен момент е свързано с определен интервал от време.

В тази статия се дискутира проблема за „малкото“ при разглеждане на физическите свойства на телата и тяхното изменение в пространството и времето. „Малкото“ във физиката винаги е „достатъчно малко“, т.е толкова малко, колкото е необходимо при решаване на конкретна физична задача.

ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Достатъчно малкото при пространствените характеристики на веществото, полетата, телата и процесите.

Най напред ще разгледаме случая на разпределението на веществото и на електричният заряд в пространството. В тези случаи се дефинира величината плътност (масова плътност, плътност на електричния заряд, концентрация на частиците и др.).

При нехомогенни разпределения, величините плътност и концентрация са различни за различните точки от пространството, т.е. са функции на координатите. В този случай се говори за плътност или концентрация в дадена точка от пространството. Явно е, че поради прекъснатия строеж на веществото и на електричния заряд, тези понятия нямат физичен смисъл за дадена точка от пространството.

При дефиниране на величините обемна, повърхнинна, линейна плътност, концентрация и др., обемът, повърхнината, линията се разделят на достатъчно малки елементи. Тези елементи трябва да бъдат толкова малки, че разпределението на веществото, електрическият заряд, частиците и др., в рамките на всеки произволно избран елемент да е равномерно.

По – нататък масата, електричният заряд, броят частици в избрания достатъчно малък елемент (обем, площ, отсечка и др.), приведени към единица обем, площ, дължина, се наричат съответно обемна, повърхнинна или линейна плътност на веществото или на електричния заряд. Броят на частиците в достатъчно малък обем, приведени към единица от този обем, е концентрацията на частиците.

Ще обърнем внимание и върху това, че гореспоменатият елемент освен, че трябва да бъде достатъчно малък (за да има равномерно разпределение), трябва да е и достатъчно голям, т.е. да съдържа достатъчно голям брой частици, за да се запазят характерните за дадено вещество свойства, дължащи се на колективното действие на гравитационните частици.

Аналогични неща могат да се кажат и за скаларните и векторни полета. Такива полета са например температурно поле, полето на налягането, гравитационното, електричното, магнитното поле и др. При тези полета, в най-общият случай се дефинират величините температура, налягане, потенциал, интензитет, магнитна индукция и др. в дадена точка от полето. Тези величини характеризират полетата и са еднозначни функции на координатите, т.е. в дадена точка от полето всяка от тях има една единствена стойност и посока, ако е векторна величина.

В най-общият случай, при нехомогенни полета, изброените по-горе величини са различни за различните точки от полето. По тази причина при дефинирането им за тази точка, се избира достатъчно малък обем dV . Обемът dV е толкова малък, че в рамките на този обем полето да е хомогенно. Отново ще обърнем внимание, че е физически безсмислено, да се говори за поле в безкрайно малък обем от пространството.

По-нататък ще разгледаме няколко примера, отнасящи се за определени физични обекти и явления.

При разглеждане на явлението дифузия при газовете, за да се определи масата на веществото, която преминава през дадена площ S за единица време, от двете страни на S , на разстояние λ (среден свободен пробег) се разглеждат два слоя (елементи) от газа с достатъчно малка дебелина dx . Дебелината dx е толкова малка, че навсякъде в разглеждания елемент dx концентрацията да е една и съща. От друга страна dx трябва да е достатъчно голям, за да съдържа достатъчно молекули, така че да се запази и физическият смисъл на основните характеристики

на газовете като налягане, температура и др., които са резултат от колективното действие на много молекули.

При формулиране на закона на Био-Савар-Лаплас за индукцията на магнитното поле създадено от електричен ток, елементът \vec{dl} , чието поле се търси, е толкова малък, че всички негови точки са на едно и също разстояние от точката, в която се търси индукцията \vec{dB} на магнитното поле, създадено от \vec{dl} .

При закона на Ампер за действието на магнитното поле върху ток, \vec{dl} е толкова малък, че в рамките на този елемент полето да е хомогенно.

При изучаване на вълновите процеси, няма смисъл да се работи с размери dx , много по-малки от дължината на вълната λ . Ако например ширината на процепа при дифракция е много по-малка от λ , той „не може да разпознае“, каква вълна минава през него. Затова ширината на процепа трябва да е съизмерима с дължината на вълната.

При определяне на величините степен на поляризация на диелектриците или степен на намагнитеност на магнетиците, обемът ΔV се избира да бъде толкова малък, че в рамките на този обем, поляризацията или намагнитеността да са равномерни. От друга страна този обем трябва да е достатъчно голям, за да съдържа достатъчно много електрични или магнитни диполи, които да гарантират характерните диелектрични или магнитни свойства на съответните вещества.

2. Достатъчно малкото при временните характеристики на физичните величини и физичните процеси.

Всички физични процеси освен в пространството, протичат и с течение на времето.

Бързината, с която се изменят физичните величини във времето, се определя от физичната величина скорост на изменение. Скоростта на изменение на дадена

физична величина е нейна първа производна по времето. Например $\vec{v} = \frac{\vec{dr}}{dt}$ е

скорост на изменение на радиусектора на движеща се материална точка. Тази

скорост е скорост на движението на точката. Ускорението $\vec{a} = \frac{\vec{dv}}{dt}$ е скорост на

изменение на скоростта. Аналогичен смисъл имат и други производни по времето: скорост на изменение на температурата dT/dt , на налягането dP/dt , на масата dm/dt , скорост на пренасяне на електрически заряд през дадена площ dq/dt и др.

Във всички случаи, от математическа гледна точка, скоростта на изменение на физичната величина $a(t)$ с времето, се определя като граница на отношението $\Delta a / \Delta t$, когато Δt клони към нула.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{da}{dt}$$

Това съотношение важи както за скаларни, така и за векторни величини, като Δa е изменението на $a(t)$ за време Δt , а da е изменението на същата величина за време dt .

Ясно е, че от физична гледна точка безкрайно малкият интервал от време, избран около определен момент от времето, няма физичен смисъл. Аналогично от казаното по-горе за пространствените размери, интервалът от време Δt трябва да бъде достатъчно малък. Такъв интервал се означава обикновено с dt .

По-нататък стои въпросът: Какво означава достатъчно малък интервал от време dt ? Този интервал трябва да бъде толкова малък, че през времето от момента t до момента $t + dt$, скоростта на изменение da/dt на величината $a(t)$ да е една и съща.

При дефиниране на скорост на движение интервала от време, през който се извършва движението, трябва да бъде такъв, че в рамките на този интервал движението да е праволинейно равномерно.

При дефиниране на величината големина на електричния ток $I = dq/dt$, интервалът dt трябва да е достатъчно малък, така че в този интервал електрическият ток да е постоянен.

Ако едно тяло изстива или се загрева в условията на равновесен термодинамичен процес, при дефиниране на величината скорост на изменение на температурата dT/dt , интервалът от време dt трябва да бъде толкова малък, че скоростта на изстиване или загряване в този интервал (от момента t до момента $t + dt$), да е една и съща.

Аналогични на по-горните са всички примери, при които се дефинира величината скорост на изменение на определена физична величина или скорост на протичане на физичен процес. Във всички случаи избраният интервал от време dt около момента t е толкова малък, че разглежданият процес протича с постоянна скорост.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Физичните величини са качествени и количествени характеристики на телата, системите и процесите, които протичат в тях. Много от тези величини са еднозначни функции на времето и координатите, което означава, че в даден момент и на дадено място те имат една единствена големина или големина и посока, ако са вектори.

При дефиниция на определена физична величина, за дадена точка от пространството, пространственият интервал (обем dV , площ dS , дължина dl), трябва да бъде достатъчно малък, т.е. толкова малък, че в рамките на този интервал величината, която се дефинира (плътност, степен на поляризация, степен на намагнитеност, интензитет на електричното поле, магнитна индукция и др.) да е една и съща.

При формулиране на физичните закони величините, които влизат в тях се отнасят за дадено място (определени координати x, y, z) и определен момент от

време. Например, при законите на Ом ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$) и закона на Джаул-Ленц ($p = \sigma E^2$),

\vec{j} и p , \vec{E} и σ са съответно плътността на електрическият ток, плътността на топлинната мощност, интензитетът на електричното поле и специфичната проводимост в определена точка от проводника в определен момент от времето.

Във физиката безкрайно малките интервали от време и безкрайно малките размери нямат реален физичен смисъл. Достатъчно малкото е толкова малко и толкова голямо, колкото е необходимо за решаване на конкретна физична задача. От друга страна то е и толкова малко, че при разглеждане на физическите процеси да могат да се използват средствата на висшата математика.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Детлаф А.А., Яворский Б.М. „Курс физики“, Москва, Высшая школа, 1989.

[2]. Максимов М. “Основи на физиката” част I и част II, Булевард 2000, София 2000.

За контакти:

Доц. д-р Димитър Попов, Катедра “Физика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, Тел.: 082 45-20-09, 583, E-mail: dpopov@ru.acad.bg.

Гл. ас. Йордан Димов, Катедра “Технически и природоматематически науки”, Русенски университет “Ангел Кънчев” Филиал Силистра, Тел.: 086 821521, 217, E-mail: jdimov@abv.bg.

Докладът е рецензиран.