Моделиране на Марковски вериги със стохастични мрежи на Петри

Светла Радева, Изабела Локшина

Stochastic Petri Net Models of Markov Chains: *Different kinds of Petri nets are considered as stochastic Petri nets, generalized stochastic Petri nets and stochastic reward nets. Priorities added to the generalized stochastic Petri nets are discussed. An algorithm for decomposition of generalized stochastic Petri nets to continuous-time Markov chains is suggested. Transition states of stochastic reward nets are analyzed.*

Key words: *Communication networks, Markov chains, Petri nets, Queuing systems.*

ВЪВЕДЕНИЕ

През последните години се наблюдава тенденцията за приложение на Марковските вериги при анализа на надежността и системните характеристики на комуникационните и компютърните мрежи [1,6]. Този анализ се извършва като се изпълняват следните стъпки:

- Моделиране на комуникационната система;
- Конструиране на Марковска верига;
- Описание на състоянията на Марковската верига чрез диференциални уравнения за състоянията на преходи и линейни уравнения за устойчивото състояние;
- Написване на програма за числено решение на уравненията.

Изпълнението на последните две стъпки е доста трудоемко особено, когато броят на състоянията на Марковската верига е много голям. Правени са опити за разработване на софтуерни пакети, които с помощта на числени методи да решават уравненията, описващи състоянията на Марковските вериги [5]. От друга страна обаче, Марковските модели на комуникационните системи значително се различават по форма от стандартните решения, заложени в софтурните пакети. При проектирането на такива стандартни пакети се срещат значителни затруднения при прехода от описание на модела към изготвянето на Марковската верига за описания модел. Тези трудности могат да бъдат в голяма степен отстранени чрез използването на стохастичните мрежи на Петри, които разполагат с по-компактни спецификации и чиято форма е по-близка до моделирания телекомуникационен обект. Съществуват софтуерни пакети, като SPNP [3], DSPNexpress [4], GreatSNP [2] и SHARPE [7], които прехвърлят стохастичните мрежи на Петри в непрекъснати Марковски вериги. Тези автоматизирани средства анализират процеса на конструиране на Марковските вериги за да отразят тяхното динамично поведение върху моделите с мрежи на Петри.

МРЕЖИ НА ПЕТРИ

Разглежда се мрежа на Петри с 5 тюпли, където PN = (P, T, A, M, μ_0), за която:

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ е крайно множество от позиции, обозначени с окръжности;
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ е крайно множество от преходи от едно състояние в друго, обозначена с черти;
- $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ е множество от ориентирани дъги, свързващи P и T;
- $M : A \to \{1, 2, 3, \dots\}$ е многостранност (multiplicity), свързана с броя на дъгите в A;

- $\mu : P \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots\}$ е маркиране, което обозначава броят на ядрата (признаците), които се обозначават като черни точки или положителни цели числа, за всякя позиция в P.

По такъв начин една мрежа на Петри се състои от позиции, преходи и насочени дъги. Една дъга свързва една позиция и един преход, но не и двойка позиции или двойка дъги, като позицията, от която започва дъга, се нарича входна позиция за прехода. Съответно позицията, в която влиза започнала от преход дъга, се нарича изходна позиция.

Позициите могат да съдържат произволен брой ядра. Маркировката дава възможност да се представи разпределението на ядрата по позиции на мрежата. Тя отразява състоянието на системата във фиксиран момент от време и се променя в някой следващ момент, в резултат от активиране на поне един преход.

Преходите в мрежата на Петри се активират, когато се появи ядро в някоя от входните му позиции. При активирането на преход, ядрата от входните позиции на прехода преминават към изходните му позиции, като преминаването на ядра през прехода се извършва на една (неделима) стъпка.

Графично мрежата на Петри се представя като насочен граф с два типа възли: позиции и преходи. Позициите се свързват с преходите посредством входни дъги, наречени входни позиции на този преход. Ако позициите са свързани с изходни дъги, то те са изходни позиции. Едно положително цяло число, наречено многостранност (multiplicity) се свързва с всяка дъга.

Всяка позиция може да съдържа нула или повече ядра, получени при маркирането, което представлява състояние на модела в един определен момент. Това е основна концепция при мрежите на Петри. Обозначението $\#(p, \mu)$ се използва за определяне на броя на ядрата в позиция p при маркиране μ.

Един преход е възможен, когато всеки от неговите входни позиции има поне толкова ядра, колкото многостранността на съответната входна дъга. Преходът може да се реализира, когато той е възможен и при неговото реализиране броят на ядрата, равен на многостранността на входната дъга се отстранява от всяка от входните позиции и броят на ядрата, равен на многостранността на изходната дъга се поставя във всяка от нейните изходни позиции.

Последователността от реализиране на преходи е много съществена за мрежите на Петри. Когато при маркиране на мрежата на Петри са възможни два прехода, те не могат да бъдат реализирани едновременно, поради което е необходимо да се направи избор кой преход да се реализира пръв и само след това може да се реализира другият преход, ако все още е възможен.

Реализирането на преход може да трансформира мрежата на Петри от едно маркиране към друго. С оглед на зададената първоначална маркировка μ_0, множеството от достъпни състояния се определя като множеството от всички маркирания достъпни чрез произволна възможна последователност от реализации на преходи, като се започне от първоначалното маркиране.

Мрежите на Петри са подходящ инструмент за моделиране на паралелни процеси и на конкурентното поведение на разпределени системи. Мрежите на Петри могат да бъдат използвани при различни симулации в телекомуникациите, включително при симулиране на последователности от действия, синхронизация, конкурентност и ситуации на възникнали конфликти. При оригиналното дефиниране на мрежите на Петри не са включени времеви характеристики, което е наложително за анализ на характеристиките на динамични системи. Поради тази причина се дефинират стохастичните мрежи на Петри.

СТОХАСТИЧНИ МРЕЖИ НА ПЕТРИ

Стохастичните мрежи на Петри са получени посредством присъединяването на стохастична и времева информация към мрежите на Петри. За целта при всеки от преходите се въвежда време за реализирането на прехода, включващо времето, което изтича от момента, в който раелизацията на прехода става възможна до момента на неговата реализация, като се предполага, че тази реализация на прехода не е повлияла на другите преходи.

Когато два или повече прехода са възможни за реализация по едно и също време, тогава осъществяването на прехода се определя посредством избраната конкурентна политика, при която преходът, чието време за реализиране изтича първо се избира за следващата реализация. Ако времената за реализация на преходите имат G-разпределение, тогава стохастичните мрежи на Петри могат да бъдат използвани за представянето на широк кръг познати стохастични процеси. Затова освен разпределението на времената за реализация на преходите, изборът на конкурентна политика също така трябва да бъде определен.

Времената за реализиране на преходите често се приемат за експоненциално разпределени за да се избегне избирането на конкурентна политика. В този случай обаче стохастичната мрежа на Петри може да бъде автоматично преобразувана в непрекъсната Марковска верига. При графично представяне преходите с експоненциално разпределение на времената за реализиране те се изчертават като правоъгълници.

Когато стохастичните мрежи на Петри се прилагат за анализ на характеристиките на компютърни мрежи, позициите могат да бъдат използвани за обозначение на броя на пакетите или клетките в буфера или пък на броя на активните потребители или потоци в системата. Посредством реализация на преходите могат да бъдат представяни процесите на заемане клетки, на пристигането и изпращането на пакети, потребители или потоци.

ОБОБЩЕНИ СТОХАСТИЧНИ МРЕЖИ НА ПЕТРИ

При обобщените стохастични мрежи на Петри преходите са разрешени да бъдат или времеви (с експоненциално разпределение на времето за реализиране на прехода, изчертани като правоъгълници), или незабавни (с нулево време за реализиране на прехода, представени графично като тънка черта). Ако в един и същ момент от време са достъпни незабавен преход и времеви преход, най-напред се реализира незабавния преход. Когато няколко незабавни прехода се конкурират за реализиране в определен момент от време, тогава конфликтът се разрешава като се нормализират вероятностите за реализиране на прехода, определени като тегла.

Друго разширение на обобщените стохастични мрежи на Петри включва забавящи дъги и приоритети за преход. Забавящите дъги имат малки празни кръгчета вместо стрелки при тяхното завършване. Един преход при една забавяща дъга не се извършва, ако броят на ядрата, които съдържа входната позиция на забавящата дъга, е равен или е по-голям отколкото многостранността на дъгата.

Приоритетите за преход се дефинират посредством присвояването на едно целочислено ниво на приоритет на всеки преход, като се добавя ограничение, че преходът може да бъде достъпен при маркиране само ако няма достъпни преходи с по-висок приоритет.

Едно маркиране в обобщена стохастична мрежа на Петри се нарича изчезващо, ако поне един незабавен преход е достъпен при маркирането - в противен случай маркирането се нарича действително. Доказано е, че на една обобщена стохастична мрежа на Петри съответства точно една непрекъсната Марковска верига, при условие, че само краен брой преходи могат да бъдат реализирани за ограничен период от време с вероятност, различна от нула. При краен брой достъпни състояния може да има изключение, само ако съществува обратен цикъл с изчезващо маркиране. Този случай обаче не е съществен от практическа гледна точка и може да бъде разглеждан като моделиране на грешка.

ДЕКОМПОЗИРАНЕ НА ОБОБЩЕНИ СТОХАСТИЧНИ МРЕЖИ НА ПЕТРИ

В процеса на анализ една обобщена стохастична мрежа на Петри трябва да бъде декомпозирана. Тук се предлага следния ***Алгоритъм*** за декомпозиране на обобщени стохастични мрежи на Петри до непрекъснати Марковски вериги:

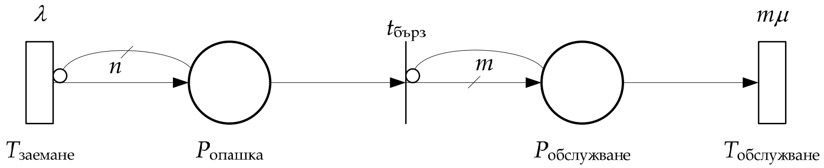
Стъпка 1: Генериране на разширено множество от достъпни състояния, за които се задава граф. Графът съдържа маркиране на множеството от достъпни състояния за задаването на възли, а към дъгите му се присвоява съответната стохастична информация (в зависимост от контекста) така, че всички маркирания да са свързани едно с друго чрез стохастичната информация.

Стъпка 2: Елиминиране на изчезващите маркирания с нулеви времена на пребиваване и на съответстващите им преходи от разширения граф. Тази процедура генерира една хомогенна непрекъсната Марковска верига.

Стъпка 3: Анализиране на устойчивото състояние, на преходните процеси или на кумулативното поведение на непрекъснатата Марковска верига.

Стъпка 4: Определяне на характеристиките, такива като средният брой на ядра в позициите и пропускната способност при времевите преходи.

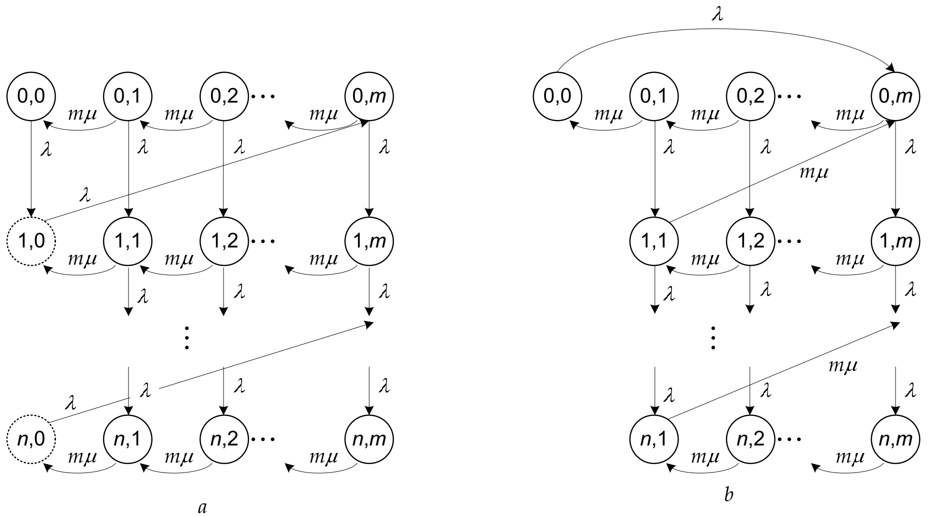
Предложеният алгоритъм се илюстрира на следния опашков модел $M/E_m/1/n+1$, обобщената стохастична мрежа на Петри, на който е показана на Фиг. 1. В модела заявките за обслужване на повикванията пристигат в съответствие с Поасонов процес на заеманията на линията, като времената за обслужване имат разпределение на Ерланг от m–ти ред - E_m. Преходът $T_{\text{заемане}}$ със скорост на реализиране на прехода λ представлява пристигането на заявката за обслужване и заемането на канала. Една забавяща дъга с многостранност n от позиция $P_{\text{опашка}}$ към $T_{\text{заемане}}$ представлява капацитета на опашката. Преходът $T_{\text{заемане}}$ е невъзможен, когато броят на ядрата в позиция $P_{\text{опашка}}$ е равен на n. Една заявка се маркира и се обслужва от системата, а общият брой на заявките в системата е равен на $n + 1$. Незабавният преход $t_{\text{бърз}}$ се реализира, когато позиция $P_{\text{опашка}}$ има едно ядро и $P_{\text{обслужване}}$ е празна. Тогава m ядра ще бъдат депозирани в позиция $P_{\text{обслужване}}$ след реализиране на незабавния преход $t_{\text{бърз}}$.



Фиг. 1. Модел на обобщена стохастична мрежа на Петри за $M/E_m/1/n+1$ опашка.

Реализирането на прехода $T_{\text{обслужване}}$ представлява изпълнението на една степен (ред) от разпределението на Ерланг от m–ти ред за времената на обслужване. Тъй като средното време за обслужване е равно на $1/\mu$, то скоростта на реализиране на преходите $T_{\text{обслужване}}$ е равна на $m\mu$.

На Фиг. 2 (а) е представен графа на достъпните състояния на модела на обобщената стохастична мрежа на Петри, където (i, j) представят броят на ядрата в позиция $P_{\text{опашка}}$ и . $P_{\text{обслужване}}$. След генерирането на графа на достъпните състояния се елиминират изчезващите маркирания с нулеви времена на пребиваване, съгласно стъпка 2 на предложения алгоритъм, в резултат, на което се получава непрекъснатата Марковска верига, представена на Фиг. 2 (б), която може да бъде решена с помощта на числени методи. В този пример съществуват n изчезващи маркирания, които са представени на Фиг. 2 (а) посредством окръжности от точки.



Фиг. 2. Граф на достъпните състояния на модела на обобщената стохастична мрежа на Петри (а) и получената непрекъснатата Марковска верига (б).

СТОХАСТИЧНИ ВЪЗОБНОВИМИ МРЕЖИ

Стохастичните възобновими мрежи се основават на обобщените стохастични мрежи на Петри, които са разширени по следния начин: всяко действително маркиране се свързва с награда в определен размер. Може да се покаже, че една стохастична възобновима мрежа може да бъде съотнесена към Марковски възобновим (reward) модел. По такъв начин могат да бъдат определени и пресметнати разнообразни наградни единици, основани на използването на много удобни формализми. Стохастичните възобновими мрежи притежават и други свойства, които правят тяхното използване по-удобно:

- Всеки преход може да има защитник (наречен още разрешаваща функция), който е зависим от маркирането. Един преход е разрешен при маркиране само ако неговият защитник (двоично условие) е удовлетворен при изпълнение на ограниченията, поставени от приоритета, входните дъги и забавящите дъги.
- Разрешена е многостранност на дъгите, зависеща от маркирането. Това свойство може да бъде приложено, когато броят на ядрата, които трябва да бъдат прехвърлени зависи от текущото маркиране. Това позволява при прехода да бъдат изравнени всички ядра от позицията с едно реализиране на преход.
- Разрешена е скорост на реализиране на преход, която е зависима от маркирането. Това свойство позволява скоростите за реализиране на преход да се определят като функция от текущото маркиране, което дава възможност за описание на различни видове сложно поведение. Например, дисциплината на обслужване в мрежа от опашки може да бъде представена като стохастична мрежа на Петри с използване на подходящи зависими от маркирането скорости на реализиране на преход.
- Освен традиционните изходни характеристики, като пропускателна способност при преходите и среден брой ядра в една позиция, може да бъде дефинирана

по-сложната наградна функция, така че да бъдат получени всички характеристики на Марковския възобновим модел.

Друга съществена възможност на стохастичните възобновими мрежи е, че първоначалното маркиране се задава не като единично маркиране, а като вероятностен вектор, дефиниран върху едно множество от маркирания. Това е едно от изискванията на анализа на преходните състояния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представено е моделирането на Марковски вериги със стохастични мрежи на Петри и тяхното използване при моделирането на комуникационни системи, на паралелни процеси и на конкурентното поведение на разпределени системи. Разгледани са различни разновидности на мрежите на Петри, като стохастични мрежи на Петри, обобщени стохастични мрежи на Петри и стохастични възобновими мрежи. Разгледано е добавянето на приоритети при обобщените стохастични мрежи на Петри. Предложен е алгоритъм за декомпозиране на обобщени стохастични мрежи на Петри до непрекъснати Марковски вериги. Анализирани са преходните състояния на стохастичните възобновими мрежи.

Стохастичните мрежи на Петри могат да бъдат използвани за представянето на широк кръг стохастични процеси, като освен разпределението на времената за реализация на преходите се определя и конкурентна политика.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bose, S. An Introduction to Queueing Systems. Kluwer Academic Publishers. Boston, 2002;

[2] Chiola, G. GreatSPN 1.5 software architecture. *Performance evaluation*, 1995, pp.121-136;

[3] Ciardo, G., Blakemore, A., Chimento, P. F., Muppala, J., Trivedi, K. S. Automated generation and analysis of Markov reward models using stochastic reward nets. Linear algebra, Markov chains, and queuing models, IMA Volumes in Mathematics and its applications, Vol. 48, Springer-Verlag, 1993, pp. 145-191;

[4] Lindemann, C. Performance modeling with deterministic and stochastic Petri nets. Wiley, New York, 1998;

[5] Radev, D., Lokshina, I., and Denchev, V. Queuing networks in equilibrium and Markov chains: numerical solution methods. *World Review of Entrepreneurship, Management and Sustainable Development* (*WREMSD*), Vol.3, No.3/4, Inderscience Publishers, 2007, pp 302-316.

[6] Radev D., Radeva S., Iliev M.P. 2D Steady-state Models of Homogeneous Continuous Time Markov Chains with Vector Quantization. 26th International Conference on Information Tehnology Interfaces 2004, Cavtat/Dubrovnik, Croatia, 537 -542.

[7] Sahner, R. A., Trivedi, K. S., Puliafito, A. Performance and reliability anaysis of computer system: an example-based approach using the SHARPE software package. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

За контакти:

доц. дтн Светла Радева - Катедра “Безжични комуникации и разпръскване”, Държавно Висше Училище Колеж по Телекомуникации и Пощи - София, тел.: 02/ 86 22 244, e-mail: svetla_ktp@abv.bg

доц. д-р Изабела Локшина, Dr. Izabella Lokshina, Division of Economics and Business, SUNY Oneonta, State University of New York, USA, e-mail: LOKSHIIV@oneonta.edu

Докладът е рецензиран.

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ"
UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV"

ДИПЛОМА

**Програмният комитет на
Научната конференция РУ&СУ'10
награждава с КРИСТАЛЕН ПРИЗ
"THE BEST PAPER"
доц. дтн СВЕТЛА РАДЕВА и
доц. д-р ИЗАБЕЛА ЛОКШИНА
автори на доклада
"Моделиране на Марковски вериги със
стохастични мрежи на Петри"**

DIPLOMA

**The Programme Committee of
the Scientific Conference RU&SU'10
Awards the Crystal Prize
"THE BEST PAPER"
to D.Sc. SVETLA RADEVA and
Dr. IZABELLA LOKSHINA
authors of the paper
"Stochastic Petri Net Models of Markov Chains"**

РЕКТОР
RECTOR

доц. д-р Христо Белоев
Prof. D-r Hristo Beloev

01.11.2010