Исследование крутных колебаний шнека

Роман Рогатынский, Иван Гевко, Андрей Дячун

Research of torsional vibrations of auger: *Torsional vibrations of auger that rotates around the axis with uniform angular velocity are considered. Approximate mathematical model of torsional vibrations of auger which takes into account the impact on them of bending vibrations is received.*

Key words: *torsional vibrations, auger, bending vibrations.*

ВСТУПЛЕНИЕ

Винтовые транспортно-технологические системы использования в разных отраслях промышленности, они часто играют ведущую роль в обеспечении комплексной механизации труда. От правильного выбора рациональных типов механизмов и параметров работы зависит их высокопроизводительная работа, а также производительность участков, цехов и предприятий в целом. Поэтому, для обеспечения высокой производительности и качества выполнения технологических процессов винтовыми транспортно-технологическими механизмами машин необходимо исследовать и на практике использовать режимы эксплуатации с амплитудами колебаний в нерезонансной и резонансной зонах.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Известно [1], что математической моделью крутных колебаний вала при различном способе закрепления его концов есть дифференциальное уравнение с частыми производными:

$$I\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=Q\left(\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x},\right) \qquad (1)$$

с соответствующими граничными условиями:

- в случае закрепленных концов вала:

$$\theta(x,t)_{|x=0}=\theta(x,t)_{|x=l}=0; \qquad (2)$$

- в случае свободных концов вала:

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}_{|x=0}=\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}_{|x=l}=0; \qquad (3)$$

- в случае закрепленного правого и свободного левого конца вала:

$$\theta(x,t)_{|x=0}=\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}_{|x=l}=0. \qquad (4)$$

В приведенных выше соотношениях $\theta(x,t)$ - угол закручивания вала; *I* - его погонный момент инерции относительно недеформированной оси; *G* - модуль сдвига; *J* - полярный момент инерции поперечного сечения; $Q\left(\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x},\right)$ - распределение момента внешних сил относительно недеформированной оси; *l* - длина вала.

Для шнека, который вращается вокруг оси, ситуация несколько более сложнее, ведь он кроме крутных, осуществляет еще и сгибательные колебания, которые обусловлены многими факторами, в частности, технологическим процессом. Пренебрегая строгостью математической постановки задачи динамики шнека и останавливаясь лишь на физической сущности процесса, при изучении крутильных колебаний действие сгибательных колебаний на крутные будем заменять Кориолисовою силой инерции (считается, что вал вращается с постоянной угловой скоростью).

Пренебрежение сгибательными колебаниями при исследовании крутных колебаний может привести к искажению (значительным неточностям) процесса. Поэтому сначала построим «уточненную математическую модель» крутных колебаний шнека, которая учитывает влияние сгибательных колебаний на крутные. С этой целью условно выделив из шнека как угодно малый элемент длиной dx укажем величину и направление переносной и Кориолисовой составных сил инерции. Принимается, что переносное движение – вращение шнека вокруг оси, а относительное – сгибательньые колебания. Вектор ускорения Кориолиса определяется в соответствии с формулой $\vec{a}_c = 2[\vec{\omega}_e, \vec{V}_r]$. В случае движения шнека - $\omega_e = \Omega$, $V_r = \frac{\partial u}{\partial t}$, где Ω - угловая скорость шнека, *u* – деформация шнека при изгибе. К тому же вектор относительной линейной скорости $\vec{V}_r$ находится в плоскости сгибательных колебаний шнека и направлен перпендикулярно к оси вращения. Следовательно, величина Кориолисового ускорения ровна $a_c = 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t}$. Направленный указанный вектор перпендикулярно к согнутой оси шнека в сторону его вращения. Кориолисова же сила инерции выделенного элемента шнека направлена в противоположную сторону и ровна:

$$\Phi = 2m(x)\Omega \frac{\partial u}{\partial t} dx . \tag{5}$$

Момент указанной силы относительно оси вращения шнека равен:

$$M^{\Phi} = 2m(x)\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u(x,t) dx . \tag{6}$$

Принимая во внимание для первого приближения закон изменения момента сил инерции относительно оси вращения:

$$M^{\Phi} = 2b^2 m(x)\Omega\omega \sin^2 \frac{vx}{l} \sin 2\omega t dx \tag{7}$$

где *b* - амплитуда сгибательных колебаний, ω - частота сгибательных колебаний.

Последнее позволяет представить дифференциальное уравнение крутных колебаний (1) для случая медленно изменяемых законов изменения вдоль длины шнека коэффициентов I, J : $I = I_0 + \mu I_1(x)$, $J = J_0 + \mu J_1(x)$ в виде:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{GJ_0}{I_0}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \mu\overline{Q}\left(x,t,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) - \frac{2b^2 m(x)}{I}\Omega\omega\sin^2\frac{vx}{l}\sin 2\omega t . \tag{8}$$

В правой части дифференциального уравнения (8) функция принимает значение:

$$\overline{Q}\left(x,t,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x},\right) = \frac{1}{I}\left(Q\left(\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial x},\right) - I_1(x)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(GJ_1\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\right).$$

Таким образом, исследование крутных колебаний шнека, который вращается вокруг оси и осуществляет сгибательные колебания, связано с построением решения дифференциального уравнения (8) при граничных условиях (3). В случае действия на шнек периодических внешних сил, момент которых относительно оси вращения отличный от нуля, дифференциальное уравнение будет подобного вида, поэтому методика его исследования аналогичная изложенной ниже.

В основу исследования крутных колебаний шнека положено:

- во-первых, построение для общего вида нелинейных сил приближенного решения асимптоты;

- во-вторых, анализ полученных обобщенных соотношений для конкретных значений внешних силовых факторов.

Как и в случае сгибательных колебаний шнека, будем считать, что максимальное значение внешних сил является малым в сравнение с коэффициентом $\frac{GJ_0}{I_0}$. Это позволяет для построения решения уравнения (8) при граничных условиях (3) использовать метод Бубнова-Гальоркина [2]. В соответствии с ним задача о построении и исследовании решения краевой задачи для уравнения с частными производными сводится к более простой задаче – интегрирования и исследование решения обычного неавтономного квазилинейного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2}+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{GJ_0}{I_0}T(t)=\mu\left(F\left(T,\frac{dT}{dt},\phi\right)\right)\quad \phi=2\omega t. \tag{9}$$

где, а $\{X_k(x)\}$ - полная система функций, что удовлетворяет граничным условиям (3).

Дифференциальное уравнение (9) позволяет определить частоту линейной модели собственных крутных колебаний шнека:

$$\omega_\theta=\frac{k\pi}{l}\sqrt{\frac{GJ_0}{I_0}}. \tag{10}$$

Влияние внешних сил и сгибательных колебаний на крутные колибания шнека будем изучать на базе решения неавтономного уравнения (9). Для его нахождения используем идею метода Ван-дер-Поля [3, 4] построения решения асимптоты обычных квазилинейных уравнений. В соответствии с ней находим решение невозмущенного ($\mu=0$) уровня, которое отвечает (9). Указанное решение имеет вид:

$$T(t)=a\cos\psi\quad \psi=\omega_\theta t+\varphi. \tag{11}$$

Трактуя его, в соответствии с методом Ван-дер-Поля, как формальную замену переменных для возмущенного уравнения (9), с той лишь разницей, что для последнего случая параметры амплитуда и начальная фаза является медленно переменными функциями времени, имеем:

$$\frac{dT(t)}{dt}=-a\omega_\theta\sin\psi+\frac{da}{dt}\cos\psi-\frac{d\varphi}{dt}a\sin\psi. \tag{12}$$

После несложных преобразований, получаем систему обычных неавтономных уравнений, которая определяет законы изменения параметров $a(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{\mu}{\omega_\theta}\sin\psi\left(\overline{F}(a\cos\psi,a\omega_\theta\sin\psi,2\omega t\right);\\ \frac{d\varphi}{dt}&=-\frac{\mu}{a\omega_\theta}\cos\psi\left(\overline{F}(a\cos\psi,a\omega_\theta\sin\psi,2\omega t)\right),\end{aligned} \tag{13}$$

где $\left(\overline{F}(a\cos\psi,a\omega_\theta\sin\psi,2\omega t\right)$- соответствует значению правой части уравнения (9) при условии, что $T(t)$ и $\dfrac{dT(t)}{dt}$ принимают лишь главные значения.

Для неавтономной системы (13) рассмотрим два случая:

- нерезонансный $\dfrac{p\pi}{l}\sqrt{\dfrac{GJ_0}{I_0}}\neq q\sqrt{\dfrac{I_0}{m_0}\left(E_0-\dfrac{S_0}{F}\right)\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^4-\dfrac{S_0}{m_0}\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2-\Omega^2}$;
- резонансный $\dfrac{p\pi}{l}\sqrt{\dfrac{GJ_0}{I_0}}\approx\approx q\sqrt{\dfrac{I_0}{m_0}\left(E_0-\dfrac{S_0}{F}\right)\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^4-\dfrac{S_0}{m_0}\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2-\Omega^2}$.

В нерезонансном случае для первого приближения амплитуда и фаза нелинейных колебаний не зависят от периодической составной внешней силы. Поэтому, путем усреднения зависимостей (13) по фазам собственных (ψ) и вынужденных (ϕ) колебаний получаем уравнение в стандартном виде:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi^2\omega_\theta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\psi\left(\overline{F}\left(a\cos\psi, a\omega_\theta\sin\psi, \phi\right)\right)d\psi d\phi\ ;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_\theta - \frac{\mu}{2\pi^2 a\omega_\theta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\psi\left(\overline{F}\left(a\cos\psi, a\omega_\theta\sin\psi, \phi\right)\right)d\psi d\phi\ . \tag{14}$$

Указанные уравнения определяют влияние нелинейных сил на динамику процесса и одновременно показывают, что периодическое возмущение малой величины, частота которого не находится в рациональной связи с частотой собственных колебаний, не вызывает значительных изменений динамического процесса.

Более важный случай крутных колебаний шнека – резонансный. При его рассмотрении подинтегральные функции соотношений (14) представим в виде:

$$\sin\psi\overline{F}\left(T,\frac{dT}{dt},\phi\right) = F_0^s(a) + h\sin\phi\sin\psi + \sum_n\left(F_n^{ss}(a)\sin n\psi + F_n^{sc}(a)\cos n\psi\right);$$

$$\cos\psi\overline{F}\left(T,\frac{dT}{dt},\phi\right) = F_0^c(a) + h\sin\phi\cos\psi + \sum_n\left(F_n^{cs}(a)\sin n\psi + F_n^{cc}(a)\cos n\psi\right), \tag{15}$$

где $F_0^s(a) = \dfrac{1}{\pi p}\displaystyle\int_0^l\int_0^\pi \sin\psi\overline{Q}\left(\theta(x,t), \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)X(x)dxd\psi\ ;$

$$F_0^c(a) = \frac{1}{\pi p}\int_0^l\int_0^\pi \cos\psi\overline{Q}\left(\theta(x,t), \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)X(x)dxd\psi\ ;$$

$$F_n^{ss}(a) = \frac{1}{\pi p}\int_0^l\int_0^\pi \overline{Q}\left(\theta(x,t), \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)\sin n\psi\sin\psi X(x)dxd\psi\ ;$$

$$F_n^{sc}(a) = \frac{1}{\pi p}\int_0^l\int_0^\pi \overline{Q}\left(\theta(x,t), \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)\cos n\psi\sin\psi X(x)dxd\psi\ ;$$

$$F_n^{cc}(a) = \frac{1}{\pi p}\int_0^l\int_0^\pi \overline{Q}\left(\theta(x,t), \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)\cos n\psi\cos\psi X(x)dxd\psi\ ;$$

$$F_n^{cs}(a) = \frac{1}{\pi p}\int_0^l\int_0^\pi \overline{Q}\left(\theta(x,t), \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)\sin n\psi\cos\psi X(x)dxd\psi\ ;$$

$$h = \frac{1}{p}\int_0^l \frac{2b^2m(x)}{I}\Omega\sin^2\frac{k\pi}{l}xX(x)dx\ .$$

Дифференциальное уравнение (9) для резонансного случая представим в виде:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \left(2\frac{q}{p}\omega\right)^2 T = \varepsilon\left(\overline{F}\left(T,\frac{dT}{dt},\phi\right) - \Delta T\right) \qquad \omega_\theta^2 \approx \left(\frac{2q}{p}\omega\right)^2 + \mu\Delta\ . \tag{16}$$

Известно, что в резонансном случае на процесс колебания существенно влияет разница фаз собственных и вынужденных колебаний. Следовательно, резонансная амплитуда зависит от параметра $\gamma = \psi - \phi$. Формально введя этот параметр в дифференциальные уравнения (13) после усреднения по быстросменной фазе, получаем для случая главного резонанса зависимости:

$$\frac{da}{dt} = \mu\left(F_0^s(a) + h\cos\gamma\right);$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = 2\omega - \omega_\theta + \mu\left(F_0^c(a) - (h+\Delta)\sin\gamma\right). \tag{17}$$

ВЫВОДЫ

Получены в результате исследования зависимости:

- во-первых, определяют стационарное значение резонансной амплитуды (резонансную кривую) как функцию параметров системы в виде $\left(\frac{F_0^s(a)}{h}\right)^2 + \left(\frac{2\omega - \omega_\theta + F_0^c(a)}{h + \Delta}\right)^2 = 1;$

- во-вторых, показывают, что резонансные крутные колебания могут быть обусловлены не только внешними периодическими силами (точнее говоря моментами), но и сгибательными колебаниями. Такой резонанс называют внутренним;

- в-третьих, величина резонансной амплитуды определяется не только амплитудой периодического возмущения, розбалансированием частот собственных и вынужденных колебаний, но и характером нелинейных сил.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 1965. – 560 с.

[2] Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Боголюбов Николай Николаевич, Митропольский Юрий Алексеевич. – М.: Наука, 1974. – 501 с.

[3] Каудерер Г. Нелинейная механика / Каудерер Г.: [пер. с нем. Я. Г. Пановко]. – М.: ИЛ, 1961. – 777 с.

[4] Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

Контакты:

Д.т.н., профессор Роман Рогатынский, Кафедра “Економической кибернетики”, Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя, тел.: 8(0352)-251-686, rogatynskyi@gmail.com

К.т.н. доцент Иван Гевко, Кафедра “Менеджмента в производственной сфере”, Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя, тел.: 8(0352)-251-686, e-mail: gevkoivan1@rambler.ru

К.т.н. Андрей Дячун, Кафедра “Технологии машиностроения и автомобилей”, Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя, тел.: 8(0352)-251-686, e-mail: dyachun_andriy@ukr.net

Рецензент: проф. д.т.н. Гевко Б.М.