Апроксимации на функции на една променлива при създаване на модели с параметрична неопределеност

Георги Георгиев, Георги Лехов

Approximations of Functions on One Variable for Parametric-Uncertainty Model Creation: *This paper describes an approach for approximation with a linear function and a rational function for approximate representation of the differential equations coefficients of flexible-link manipulators with piezoelectric actuator. The approach can be applied to manipulators with different geometric and mass characteristics. The models, obtained by applying this approach, possess a high enough accuracy for the purposes of robust control design.*

Key words: *Approximation, Parametric Uncertainty, Flexible-Link Manipulators, Piezoelectric Actuator, Robust Control Design.*

ВЪВЕДЕНИЕ

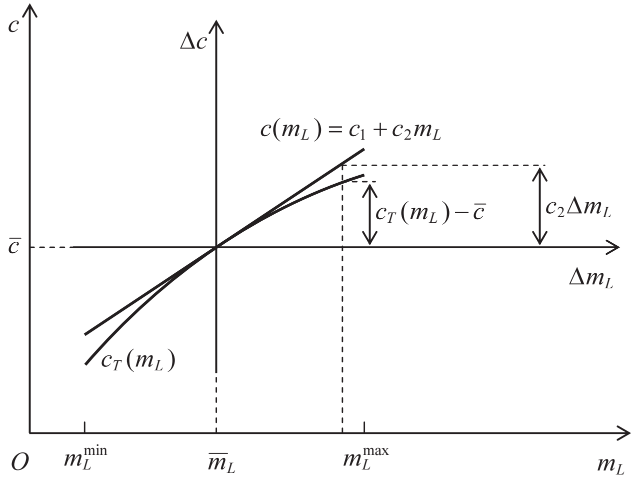
Неопределеността в математическите модели на манипулаторите с еластично звено влияе силно върху устойчивостта и качеството на системите за автоматично управление на движението им. Затова при синтеза на управляващи устройства е подходящо да се използват методи от теорията на робастното управление. Синтезът на робастни управляващи устройства за манипулатори с еластично звено обикновено се извършва чрез използване на модели с комплексна неопределеност [4]. За динамиката на системите за управление на еластични манипулатори основно значение обаче има неопределеността в някои параметри на модела. Поради това по-добри резултати е възможно да се получат въз основата на модел с параметрична неопределеност. Модел с параметрична неопределеност на манипулатор с еластично звено е предложен в [2, 3], където динамичният модел на манипулатора е съставен с използване на подход, съчетаващ метода на собствените форми и метода на Лагранж.

Ефективно средство за потискане на механичните трептения на манипулатори с еластично звено е използване на пиезо-актуатор, закрепен върху звеното [5, 6]. Подход за създаване на модел с параметрична неопределеност на еластичен манипулатор с пиезо-актуатор е предложен в [1]. Динамичният модел на манипулатора е съставен с помощта на метода на крайните елементи. Коефициентите в уравненията на модела се получават числено в табличен вид и зависят неявно от масата на товара по зависимости, които не могат да се използват непосредствено при създаване на модел с параметрична неопределеност. Затова при създаване на такъв модел е подходящо коефициентите в динамичния модел на манипулатора да се апроксимират чрез рационални функции на една променлива. Независимата променлива е масата на товара, която е един от основните неопределени параметри на манипулаторите с еластично звено и пиезо-актуатор.

В настоящата статия е описана процедура за апроксимиране с линейна функция и с дробна функция за приближено представяне на коефициентите в диференциалните уравнения на еластични манипулатори с пиезо-актуатор. Процедурата е приложима за манипулатори с различни геометрични и масови характеристики. Създаваните чрез използване на тази процедура модели с параметрична неопределеност имат достатъчно висока точност за целите на робастния анализ и синтез.

АПРОКСИМАЦИЯ С ЛИНЕЙНА ФУНКЦИЯ

Нека m_L е масата на товара на манипулатор с еластично звено и пиезо-актуатор, а $c_T(m_L)$ е коефициент в динамичния модел на манипулатора. Приема се, че таблично е зададена нарастваща нелинейна функция $c_T(m_L) > 0$, чиято графика, показана на фиг. 1, минава през точката $(\overline{m}_L, \overline{c})$.



Фиг. 1

Търси се линейна функция

$$c(m_L) = c_1 + c_2 m_L \tag{1}$$

,чиято графика също минава през точката $(\overline{m}_L, \overline{c})$ и е възможно най-близо в опреде-лен смисъл до графиката на $c_T(m_L)$. Тогава за $m_L = \overline{m}_L$ от (1) следва, че

$$\overline{c} = c_1 + c_2 \overline{m}_L \tag{2}$$

откъдето се изразява коефициентът c_1:

$$c_1 = \overline{c} - c_2 \overline{m}_L \tag{3}$$

От (1) и (2) се получава

$$c(m_L) - \overline{c} = c_2(m_L - \overline{m}_L) = c_2 \Delta m_L \tag{4}$$

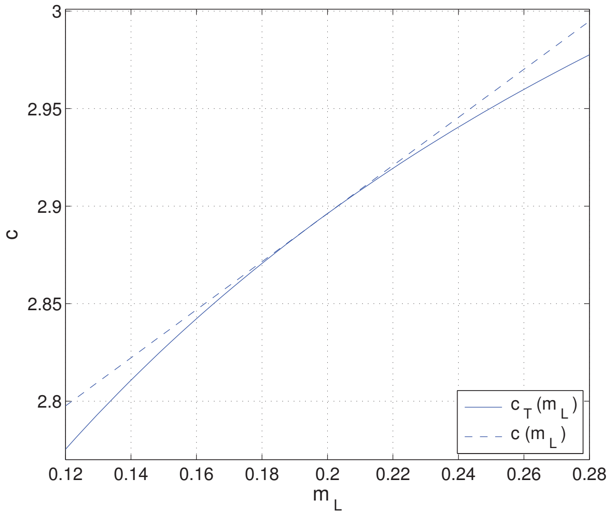
Равенството (4) представя търсената линейна функция.

Въвежда се правоъгълна координатна система с начало точката $(\overline{m}_L, \overline{c})$ и оси $\Delta m_L = m_L - \overline{m}_L$ и $\Delta c = c(m_L) - \overline{c}$. За произволна стойност на m_L на фиг. 1 са представени величините $c_T(m_L) - \overline{c}$ и $c_2 \Delta m_L$.

Коефициентът c_2 се определя така, че за интервала $m_L \in \left[m_L^{\min}, m_L^{\max}\right]$ стойностите на линейната функция $c(m_L)$ да бъдат възможно най-близо до стойностите на нелинейната функция $c_T(m_L)$, т. е. в съответствие с (4) изразите $c_T(m_L) - \overline{c}$ и $c_2 \Delta m_L$ да се различават минимално в смисъла на метода на най-малките квадрати. Така c_2 се определя като полином от нулева степен, апроксимиращ функцията $\left[c_T(m_L) - \overline{c}\right] / \Delta m_L$ в смисъла на метода на най-малките квадрати. За целта се използва MATLAB-функцията *polyfit*. След определянето на c_2, от (3) се опре-деля и c_1.

На фиг. 2 е представен резултатът от апроксимацията на един от коефициентите в динамичния модел на еластичен манипулатор с пиезо-актуатор, като

$m_L \in [0.12, 0.28]$, $\overline{m}_L = 0.2$ и $\overline{c} = 2.8962$. Относителната грешка е най-голяма в краищата на интервала за m_L и не надвишава 0.8%.



Фиг. 2

Ако е зададена функция, чиято графика е симетрична относно абсцисната ос на графиката на $c_T(m_L)$, апроксимацията се извършва по същия начин.

АПРОКСИМАЦИЯ С ДРОБНА ФУНКЦИЯ

Приема се, че $d_T(m_L)$ е коефициент в динамичния модел на еластичен манипулатор с пиезо-актуатор, като таблично е зададена намаляваща нелинейна функция $d_T(m_L) > 0$, чиято графика, показана на фиг. 3, минава през точката $(\overline{m}_L, \overline{d})$.

Търси се дробна функция

$$d(m_L) = \frac{1}{d_1 + d_2 m_L} \tag{5}$$

чиято графика също минава през точката $(\overline{m}_L, \overline{d})$ и е възможно най-близо в опреде-лен смисъл до графиката на $d_T(m_L)$. Тогава за $m_L = \overline{m}_L$ от (5) следва, че

$$\overline{d} = \frac{1}{d_1 + d_2 \overline{m}_L} \tag{6}$$

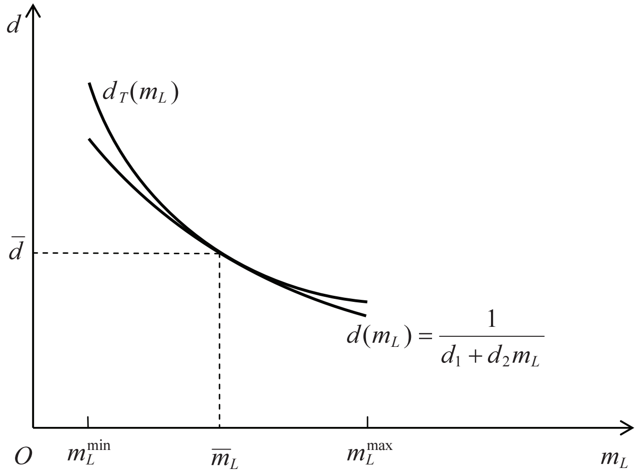
откъдето се изразява коефициентът d_1:

$$d_1 = \frac{1}{\overline{d}} - d_2 \overline{m}_L \tag{7}$$

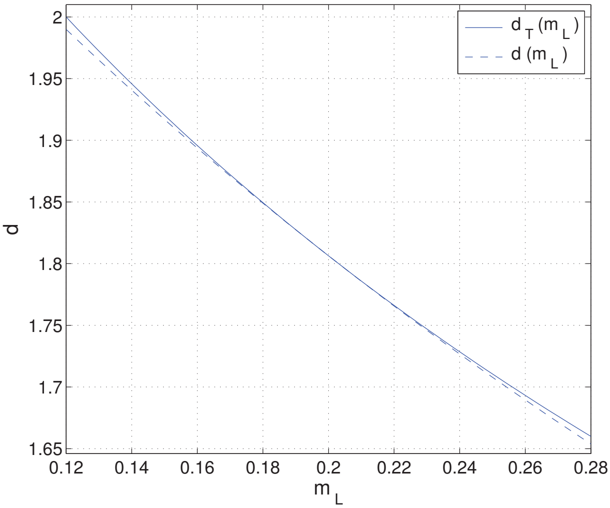
От (5) и (6) се получава

$$\frac{1}{d(m_L)} - \frac{1}{\overline{d}} = d_2(m_L - \overline{m}_L) = d_2 \Delta m_L \tag{8}$$

Равенството (8) представя търсената дробна функция.



Фиг. 3



Фиг. 4

Коефициентът d_2 се определя така, че за интервала $m_L \in \left[m_L^{\min}, m_L^{\max}\right]$ стойностите на дробната функция $d(m_L)$ да бъдат възможно най-близо до стойностите на нелинейната функция $d_T(m_L)$, т. е. в съответствие с (8) изразите $1/d_T(m_L) - 1/\bar{d}$ и $d_2 \Delta m_L$ да се различават минимално в смисъла на метода на най-малките квадрати. Така d_2 се определя като полином от нулева степен, апроксимиращ функцията

$$\left[\frac{1}{d_T(m_L)} - \frac{1}{\bar{d}}\right] \Big/ \Delta m_L \qquad (9)$$

в смисъла на метода на най-малките квадрати, като за целта се използва

MATLAB-функцията *polyfit*. След определянето на d_2, от (7) се определя и d_1.

На фиг. 4 е представен резултатът от апроксимацията на един от коефициентите, като $m_L \in [0.12, 0.28]$, $\overline{m}_L = 0.2$ и $\overline{d} = 1.8064$. Относителната грешка е най-голяма в краищата на интервала за m_L и не надвишава 0.5%.

Ако зададената функция има графика, симетрична относно абсцисната ос на графиката на $d_T(m_L)$, апроксимацията се извършва по същия начин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описана е процедура за апроксимиране на функции на една променлива, чрез която приближено се представят коефициентите в динамичните модели на еластични манипулатори с пиезо-актуатор при създаване на модели с параметрична неопределеност. Създаваните модели са с достатъчно висока точност за целите на робастния анализ и синтез.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Георгиев, Г. Ст., Г. Л. Лехов, И. В. Иванов. Модел с параметрична неопределе-ност на манипулатор с еластично звено и пиезо-актуатор. Механика на машините, 2012 (под печат).

[2] Лехов, Г. Модел с неопределени параметри на манипулатор с еластично звено. Научни трудове на Русенския университет, Том 47, Серия 3.1, 9-16, 2008.

[3] Лехов, Г., П. Петков. Синтез на съсредоточено робастно управляващо устройство с две степени на свобода на манипулатор с еластично звено. Трудове на между-народната конференция “Автоматика и информатика”. София, I-201-204, 2010.

[4] Karkoub, M., G. Balas, K. Tamma, M. Donath. Robust Control of Flexible Manipulators via μ-Synthesis. Control Engineering Practice, 8, 725-734, 2000.

[5] Kerr, M., S. Jayasuriya, S. Asokanthan. QFT Based Robust Control of a Single-Link Flexible Manipulator. Journal of Vibration and Control, 13, No. 1, 3-27, 2007.

[6] Reis, J. C. P., J. Sa da Costa. Motion Planning and Actuator Specialization in the Control of Active-Flexible Link Robots. Journal of Sound and Vibration, Vol. 331, 3255-3270, 2012.

За контакти:

гл. ас. инж. Георги Стефанов Георгиев, Катедра “Компютърни системи и технологии”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, Тел.: 082 888-681, E-mail: gstefanov@ecs.uni-ruse.bg.

Доц. д-р Георги Любомиров Лехов, Катедра “Автоматика и мехатроника”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, Тел.: 082 888-745, E-mail: glehov@uni-ruse.bg.

Докладът е рецензиран.