Достижими множества от думи с фиксирана дължина над краен автомат на Мили

Михаил Кирилов

Abstract: Reachable Sets of Words With Fixed Length Over a Finite Mealy Automaton: *The paper considers a new idea of splitting of the set of words with fixed length over a finite Mealy automaton on sets of words called reachable. A specific software has been developed to make the experiments approachable.This work will enable us to split the set of words with fixed length without the use of the inverse automaton transformation.*

Key words: *Mealy Automaton, Reachable Set.*

ВЪВЕДЕНИЕ

На основата на единния подход към динамичните системи и крайните автомати [1],[2],[3],[5],[6] и на разгледаните в [4],[7],[8] обобщения, в тази работа се разглежда дискретна обща динамична система, породена от еднозначен краен автомат. За получаването на множествата на достижимост е разработен и използван авторски софтуерен продукт.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Определение 1 *Казва се, че думата* $\alpha \in V^*$ *е неподвижна дума за изображението* φ*, породено от автомат на Мили, ако* $\varphi(\alpha) = \alpha$*. Множеството от всички неподвижни думи с дължина m се означава с* F^m*.*

Определение 2 *Казва се, че числото* $T \in N$ *е период за изображението* φ *и думата* α*, ако* $\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{T-\text{пъти}}(\alpha) = \alpha$ *(T е най – малкото възможно изпълняващо условията естествено число).*

За α се казва, че е периодична дума с период T.

С P_i^m се означава множеството на периодичните думи с период i и дължина *m.* Използвано е още означението $P_{i,k}^{m,j}$ - множеството $\varphi^{-j}(\alpha_{i,k})$, където k е поредността на думата от множеството P_i^m, а *j* е броят на обратните итерации.

Определение 3 *Казва се, че думата* $\alpha \in V^*$*, която не е неподвижна, е евентуално неподвижна за изображението* φ*, породено от автомат на Мили, относно неподвижната дума* β*, ако* $\exists k \in N$*, така че* $\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k}(\alpha) = \beta$*. Множеството от всички евентуално неподвижни думи с дължина m, свързани с неподвижната дума* β*, се означава с* $F_\beta{}^m$*.*

Определение 4 *Казва се, че думата* $\alpha \in V^*$*, която не е периодична, е евентуално периодична, относно периодичната дума* β*, ако* $\exists k \in N$*, така че* $\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k}(\alpha) = \beta$*. Множеството от всички евентуално периодични думи с дължина m, относно периодичната дума* β *с период T, се означава с* $P_{\beta,T}^m$*.*

Определение 5 *Казва се, че множеството А от различни думи* $\alpha \in V^*$ *е достижимо за думата* $\beta \in V^*$, *ако за всяка дума* $\alpha \in V^*$ $\exists k \in N$ *такова, че* $\alpha = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k}(\beta)$. *Множеството от всички достижими думи (n на брой) относно думата* β *се означава с* D_β^n. *Думите от множеството А се подреждат по ред на последователно получаване при итерациите.*

Теорема 1 (за биективност) *Автоматното изображение е биективно точно тогава, когато всеки стълб* $(b_1, b_2, ..., b_n)^{/}, b_i \in V$ *от таблицата на изходите е пермутация (без повторение) на буквите от V -* $(a_1, a_2, ..., a_n)$, *т.е. всички букви от произволен стълб са различни.*

Следствие 1 *Ако автоматното изображение f е биективно, то итерираното изображение* f^2 *е също биективно (* f^k *също е биективно).*

Лема 1 *Ако автоматното изображение* f *е биективно и* α *е периодична дума с период Т, то множеството от евентуално периодични думи, свързани с* α, *е празно.*

Доказателство

Нека множеството от евентуално периодични думи, свързани с α, не е празно. Тогава е вярно: $x_1, f(x_1) = x_2, f^2(x_1) = x_3, ..., f^{m-1}(x_1) = x_m, f^m(x_1) = x_1, ...$

Нека $f^k(x) = x_1; f^{pm}(x_1) = x_1$, $k = mp + q, 0 \le q \le m-1$.

Тогава $f^k(x) = f^q\left(f^{pm}(x)\right)$.

Получава се, че

$f(x_{m-q}) = x_{m+1-q}$, $f^2(x_{m-q}) = x_{m+2-q}, ..., f^q(x_{m-q}) = x_{m+q-q} = x_m$.

$\Rightarrow f^{q+1}(x_{m-q}) = x_1$ и $f^q(x_{m-q+1}) = x_1$,

т.е. $\left| \begin{array}{l} f^k(x_{m-q+1}) = f^{mp}\left(f^q(x_{m-q+1})\right) = f^{mp}(x_1) = x_1 \\ f^q(x_{m-q+1}) = x_1 \end{array} \right.$,

така се получава

$\left| \begin{array}{l} f^k(x_{m-q+1}) = x_1 \\ f^k(x) = x_1 \end{array} \right. \Rightarrow f^k$ не е биективно, което е противоречие.

С това лемата е доказана.

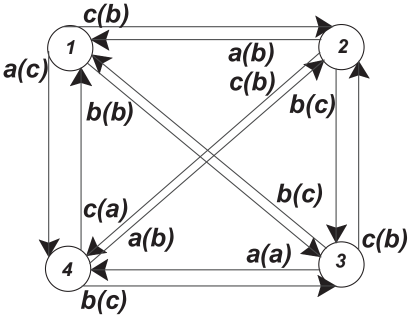
За автомат на Мили $M = (Q, V_1, V_2, q_0, \delta, \lambda)$, $Q = \{q_0, q_1, ..., q_m\}$, $V_1 = V_2 = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$, може да се формулира следната теорема:

Пример Нека крайният автомат $M_3 = (Q, V_1, V_2, q_0, \delta, \lambda)$ е дефиниран както следва:

$Q = \{1,2,3,4\}$, $V_1 = V_2 = \{a, b, c\}$, $q_0 = 1$ и функциите на преходите и изходите са изобразени на фиг. 1, а ориентираният граф е изобразен на фиг. 2

M_3	1	2	3	4
a	4,c	1,b	4,a	2,b
b	3,b	3,c	1,c	3,c
c	2,b	4,b	2,b	1,a

Фиг. 1 Функции на преходите и изходите на автомат M_3



Фиг. 2 Ориентиран граф на функциите на преходите и изходите на автомат M_3

1) Разглежда се множеството $A_1 = \{\alpha \in V^* \mid |\alpha| = 2\}$. Следва класификация на думите от A_1 според Определения 1, 2, 3, 4 и 5 спрямо дефинирания автомат M_3.

Множество A_1 се състои от всички думи над азбуката *V* с дължина 2, т.е. $A_1 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, ca\}$.

- неподвижни думи – има една такава.

$F^2 = \{ba\}$.

- периодични думи – има един клас периодични думи – думи с период $T = 2$.

Думи с период $T = 2$:

$P_2^2 = \{bb\,; bc\}$

$$\left.\begin{array}{l} P_{2,1}^{2,1} = \varphi^{-1}(bb) = \{cc\,; ca\} \\ P_{2,1}^{2,2} = \varphi^{-2}(bb) = \{ab\,; ac\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{cc\,; ca\,; ab\,; ac\};$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{2,2}^{2,1} = \varphi^{-1}(bc) = \{cb\} \\ P_{2,2}^{2,2} = \varphi^{-2}(bc) = \{aa\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{cb\,; aa\}.$$

- евентуално неподвижни думи – няма.

- евентуално периодични думи – има два класа евентуално периодични думи – спрямо всяка от двете периодични думи.

$P_{bb,2}^2 = \{cc\,; ca\,; ab\,; ac\}$; $P_{bc,2}^2 = \{cb\,; aa\}$.

Разбиване на множества на достижимост на думите от A_1:

$D_{aa}^3 = \{cb\,;bc\,;bb\}$; $D_{ac}^3 = \{ca\,;bb\,;bc\}$; $D_{ab}^3 = \{cc\,;bb\,;bc\}$; $D_{cb}^2 = \{bc\,;bb\}$; $D_{ba}^1 = \{ba\}$.

Окончателно има 1 неподвижна дума, 2 периодични думи с период $T = 2$, няма евентуално неподвижни думи, има 6 евентуално периодични думи.

Има 5 множества на достижимост с най-голяма дълбочина 3.

2) Разглежда се множеството $A_2 = \{\alpha \in V^* \,|\, |\alpha| = 3\}$. Следва класификация на думите от A_2 според Определения 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4 спрямо дефинирания автомат M_3.

Множество A_2 се състои от всички думи над азбуката *V* с дължина 3, т.е.

$$A_2 = \{aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, bac, bba, bbb,$$
$$bbc, bca, bcb, bcc, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc\}$$

- неподвижни думи – няма.

- периодични думи – попадат в два различни класа – думи с период $T = 2$ и думи с период $T = 3$.

Думи с период $T = 2$:

$P_2^3 = \{bbc\,;bcb\}$

Думи с период $T = 3$:

$P_3^3 = \{baa\,;bab\,;bac\}$.

- евентуално неподвижни думи – няма.

- евентуално периодични думи – има евентуално периодични думи спрямо всяка от двете периодични думи с период $T = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} P_{2,1}^{3,1} = \varphi^{-1}(bbc) = \{ccb\,;caa\} \\ P_{2,1}^{3,2} = \varphi^{-2}(bbc) = \{abc\} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{bbc,2}^3 = \{ccb\,;caa\,;abc\};$$

$$P_{bcb,2}^3 = \left\{\begin{array}{l} cbc\,;bbb\,;aab;cca\,;cac\,;cab;bcc\,;bca\,;abc;aca\,;acc\,;acb; \\ cbb\,;bba\,;cba;aac\,;aaa\,;ccc;abb \end{array}\right\};$$

Получава се, че множествата на евентуално периодичните думи са:

$P_{bbc,2}^3 = \{ccb\,;caa\,;abc\}$;

$$P_{bcb,2}^3 = \left\{\begin{array}{l} cbc\,;bbb\,;aab\,;cca\,;cac\,;cab\,;bcc\,;bca\,;aba\,;aca\,;acc\,; \\ acb\,;cbb\,;bba\,;cba\,;aac\,;aaa\,;ccc\,;abb \end{array}\right\}.$$

Разбиване на множества на достижимост на думите от A_2:

$D_{abb}^6 = \{ccc\,;bba\,;bcc\,;bbb\,;bcb\,;bbc\}$; $D_{aac}^5 = \{cbb\,;bbc\,;bbb\,;bcb\,;bbc\}$; $D_{cba}^4 = \{bca\,;bbb\,;bcb\,;bbc\}$; $D_{acb}^4 = D_{acc}^4 = \{cab\,;bbb\,;bcb\,;bbc\}$; $D_{aca}^4 = \{cac\,;bbb\,;bcb\,;bbc\}$; $D_{abc}^3 = \{ccb\,;bbc\,;bcb\}$; $D_{cca}^3 = \{bbb\,;bcb\,;bbc\}$; $D_{aab}^3 = \{cbc\,;bcb\,;bbc\}$; $D_{baa}^3 = \{bab\,;bac\,;baa\}$; $D_{bab}^3 = \{bac\,;baa\,;bab\}$; $D_{bac}^3 = \{baa\,;bab\,;bac\}$; $D_{bbc}^2 = \{bcb\,;bbc\}$; $D_{bcb}^2 = \{bbc\,;bcb\}$.

Окончателно няма неподвижна дума, има 5 периодични думи – 2 от тях с период $T = 2$ и 3 с период $T = 3$, няма евентуално неподвижни думи, има 22 евентуално периодични думи. Има 14 множества на достижимост с най-голяма дълбочина 6.

Всички експерименти при класификацията на множествата от думи са извършени с помощта на разработен от автора софтуерен продукт.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разгледана е нова идея за разбиване на множествата от думи с фиксирана дължина на достижими множества. При този подход няма значение какво представлява обратното изображение, породено от краен автомат на Мили, което може да не е еднозначно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Глушков В., Синтез цифровых автоматов, Москва, Фисматгиз, (1962).

[2] Калман Р., П. Фалб, М. Арбиб, Очерки по математической теории систем, Мир, (1971).

[3] Кобринский Н. Е., Б. А. Трахтенброт, Введение в теорию конечных автоматов, Москва, Физматгиз, (1962).

[4] Минский М., Вычисления и автоматы, Москва, Мир, (1971).

[5] Портер, У. А., Современные основания общей теории систем, Москва, Наука, (1971).

[6] Трахтенброт Б. А., Я. М. Барздинь, Конечные автоматы – поведение и синтез, Москва, Наука, (1970).

[7] Dochev D. Tr., M. K. Kirilov, Fundamental properties of discrete semidynamical systems defined by finite automatons, Proceedings, V. 46, Book 6, Rousse, (2007), 23-30.

[8] Hopcroft J.E., R. Motwani, J.D. Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, Reading, MA, Addison-Wesley, (2001).

За контакти:

Ас. д-р Михаил Кирилов, Катедра *Математика*, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 623, e-mail: mkirilov@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран .