

## Разпространение на ламинарна струя по въртящ се диск

Росица Величкова, Иван Антонов

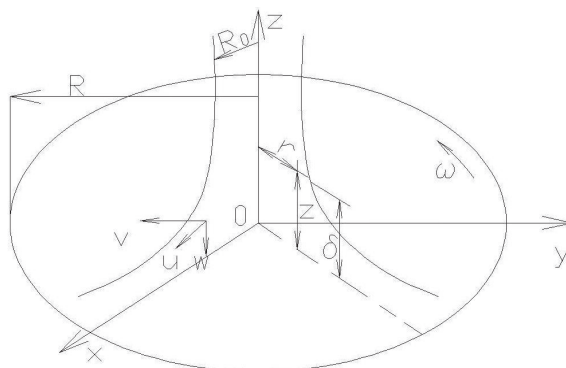
**Distribution of laminar stream at rotary disc:** It is considering the basic equations of motion of a stream of laminar which are flowing perpendicularly to the rotary disc. It is received the distribution of the main parameters of the radial flow on the disc and the influence of initial parameters.

**Key words:** laminar flow, rotary disc, initial parameters

### ВЪВЕДЕНИЕ

Един от често използваните методи за механично разпръскване на течност и на разтвори е течението получено при е изтичане на струя върху въртящ се диск фиг.1 [1], [2].

Решението на задачата изисква познаване на параметрите на възникналото течение (течностен слой) по въртящ се диск. Върху параметрите му влияят началните условия на задачата: скоростта на въртене, видът на течността респ. нейните физически свойства, дебитът и. От друга страна изменението на дебелината на слоя и скоростите по радиуса на диска, както е неговия диаметър определят вида на получените капки т.е. техния размер и дисперсен състав.



Фиг.1 – Схема на струя, изтичаща върху въртящ се диск

### МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ

Разглежда се течение на несвиваем вискозен флуид, което се разпространява във вид на непрекъснато изтъняващ по радиуса слой. Използват се уравненията на Навие- Стокс в цилиндрични координатни системи:  $r, \theta$  и  $z$ . Поради симетричността на течението относно оста на въртене, съгласно теорията на завъртените течения [3], [4] се приема, че всички производни по ъгъла на въртене  $\theta$  на така избраната система са равни на нула:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

При това уравнението на Навие-Стокс и уравненията за непрекъснатост се апроксимират до вида:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Поради обстоятелството, че върху въртящ се с ъглова скорост  $\omega$  диск изтича течност, която не взаимодейства с околната въздушна среда, се приема за постоянен началният дебит  $Q$ . От това следва условие за запазване на дебита:

$$Q = \int_0^{\delta} 2\pi r u dz \quad (6)$$

Уравн. 6 се решава съвместно със системата система(2+5) се използва да се определи разпределението на радиалната скорост  $u$ , осевата  $w$ , и завъртащата  $v$ . Те се получават от решението на системата уравн. 2+5.

### Ограничителни условия и приемания

Решението е валидно за стойности на радиуса  $r$  в диапазона  $r > R_0$ , съответно  $r < R$

Където:  $R_0$  е широчина на дюзата, през която изтича струята,  $R$  - радиуса на въртящия се диск. Приема се, че осевата скорост  $W_e$  е много по-малка от радиалната  $u$ , като намалява бързо по  $r$ . Дебелината на слоя течност  $\delta$  при разливане на струята по диска намалява по квадрата на радиуса  $\delta \sim r^2$ .

Членовете в дясната страна на уравн. 2+5 се разглеждат по следния начин:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \sim \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \sim \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \sim \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \frac{\partial v}{r \partial r} \sim \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (7)$$

След направени опростявания системата уравнения за движение 2+6 приема вида:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$\int_0^{\delta} u dz = \frac{G}{2\pi r} \quad (11)$$

Задачата се решава при следните гранични условия:

$$\begin{aligned} z = 0; u = 0; \omega = 0; v = wr \\ z = \delta(r); \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Системата уравнения 8+11 може да се реши числено или да се направи приблизително решение, като се приеме автомоделност на течението. Това позволява да се въведе афиносост на скоростното разпределение.

Радиалната, завъртащата и осевата скоростна компонента се предствят като функция на една обобщена променлива  $\zeta$ . В [1] се прави параметрично решение на задачата, при което след съответни преработки и приемания се получават основните величини характеризиращи течението по въртящия се диск:

$$\delta = \left( \frac{3\nu Q}{2\pi r^2 \omega^2} \right) \quad (13)$$

$$u = \left( \frac{3r\omega^4 Q}{2\pi\nu^2} \right)^{1/3} z - \frac{r\omega^2}{2\nu} z^2 \quad (14)$$

$$v = r\omega \left[ 1 - \frac{Q}{\pi\nu r^2} z - \left( \frac{\omega^4 Q}{18\pi\nu r^2} \right)^{1/3} z^3 + \frac{\omega^2}{12\nu^2} z^4 \right] \quad (15)$$

$$w = \left( \frac{3\omega^4 Q}{16\pi\nu^2 r^2} \right)^{1/3} z^2 - \frac{\omega^2}{6\nu} z^3 \quad (16)$$

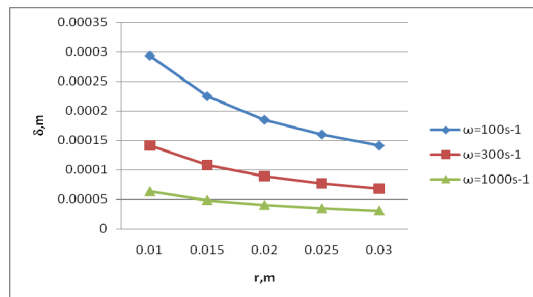
Очевидно е от 13÷16 зависимостта на параметрите на течението от началните условия: дебитът  $Q$ , ъглова скорост  $\omega$ , вида на течността (респ. кинематичния вискозитет  $\nu$ ). В най-общия случай може да се запише, че всеки един параметър освен от упоменатите начални условия е функция на разстоянието по радиуса  $r$  и съответно осевата координата  $z$ .

### РЕЗУЛТАТИ ОТ РЕШЕНИЕТО

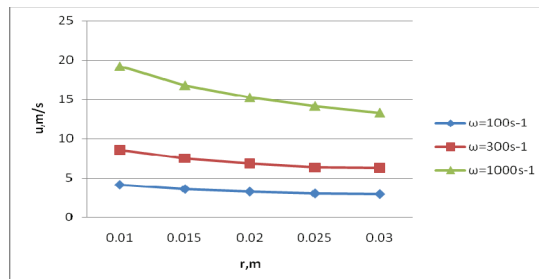
Решението се прави при следните начални условия  $Q = 5.10^{-4} m^3 / s$ ,  $\omega = 100; 300; 1000 s^{-1}$ ,  $\nu = 1,006.10^{-6} m^2 / s$ .

На фиг.2 е дадено получената по (13) картина на изменението на дебелината на слоя по въртяща се пластина в зависимост от ъгловата скорост  $\omega$  и радиалното отстояние  $r$ . Увеличаването на  $\omega$  води до по бързо изтъняване на слоя при един и същ дебит  $Q$ .

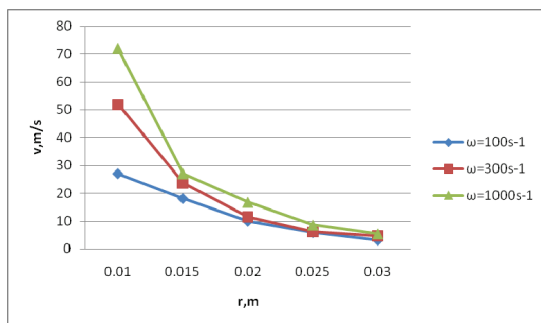
Това е свързано със запазване на по-високата стойност на скоростните компоненти -  $u$ ,  $v$  и  $w$  получени от уравн. 14÷16 и показани на фиг.3÷5. Очевидно е, че при радиалната скорост  $u$  затихва най-бавно, най-бързо намалява осевата скоростна компонента  $w$ . Тангенциалната скорост  $v$  има най-висока стойност ( достига до над  $70 m / s$ ) в непосредствена близост след изтичането, но намалява бързо към периферията по  $r$ .



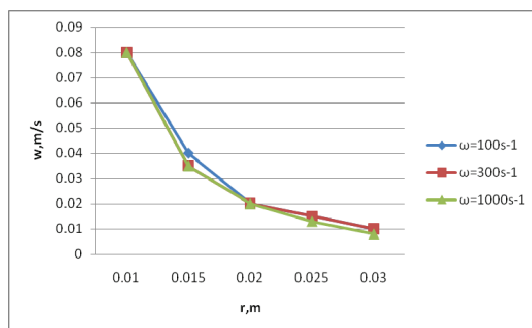
Фиг.2- Изменение на дебелината на слоя



Фиг. 3 – Разпределение на радиалната скорост

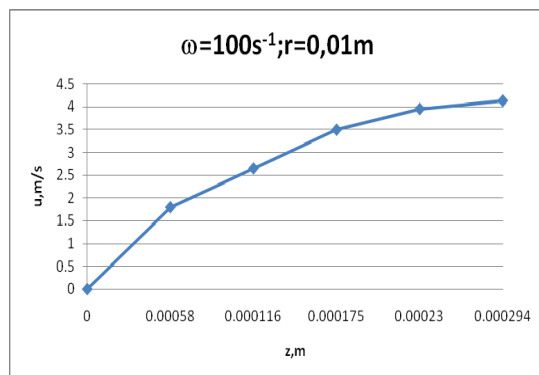


Фиг.4 - Разпределение на тангенциалната скорост

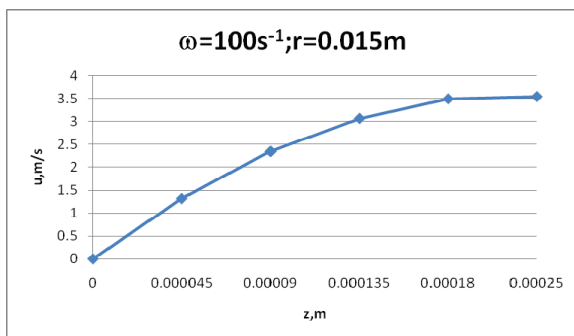


Фиг.5 - Разпределение на осевата скорост

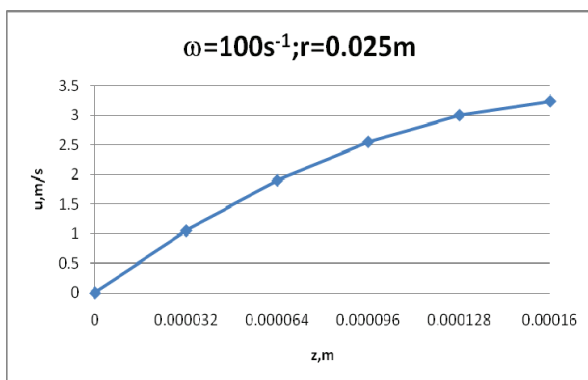
Разпределението на радиалната скорост по  $z$  за три напречни сечения при  $\omega = 100\text{s}^{-1}$  е показано на фиг.6а-в.



Фиг.6а – Радиално разпределение на скоростта при  $r = 0,01\text{m}$



Фиг.66 – Радиално разпределение на скоростта при  $r = 0,015\text{m}$



Фиг.67 – Радиално разпределение на скоростта при  $r = 0,025\text{m}$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получените графични резултати, пресметнати по изведените формули, дават основание да се приеме тяхната достоверност, тъй като те не противоречат на логиката на задачата.

### Литература

- [1] Пажи Д.Г., В.С. Галустов, Основы техники разпыливания жидкости, М. 1984
- [2] Лойциански Л.Г., Механика жидкости и газа, М., Наука, 2004
- [3] Лойциански Л.Г., Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, ПММ, 1953, т.14
- [4] A. Rohde, A computational study of flow around a rotating disc in flight, Disertation, Florida 2000

### За контакти:

Гл.ас. д-р Росица Величкова, кат. “Хидроаеродинамика и хидравлични машини”, Технически университет - София, тел.: 02-965-3443, e-mail:rositsavelichkova@abv.bg  
 Проф. д-р Иван Антонов, кат. “Хидроаеродинамика и хидравлични машини”, Технически университет - София, тел.: 02-965-3443, e-mail:mfantonov@abv.bg

Докладът е рецензиран.