Приложения на външното произведение на вектори в обучението по математика

Антоанета Михова

Some applications of the exterior product of vectors in mathematics: *The paper presents some applications of the exterior product of vectors which can be used in the process of teaching mathematics to first year students. New methods, different from traditionally used of calculation determinants, volumes and solving linear equations are described.*

Key words: *Exterior product, Wedge product, Applications.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Нека V е векторно пространство с нареден базис $\{e_1, e_2, \ldots\}$ над поле K с характеристика 0. Асоциативната алгебра $G(V)$, породена от базисните елементи на V с определящи съотношения $e_i e_j + e_j e_i = 0$ за всеки $i, j = 1,2,\ldots,$ се нарича Грасманова (или външна) алгебра върху V. Умножението в Грасмановата алгебра е известно като външно произведение (exterior product или wedge product) и се означава със знака "$\wedge$". Тогава определящите съотношения в Грасмановата алгебра могат да се запишат по следния начин $e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0$.

Идеята за външно произведение на вектори принадлежи на Херман Грасман и е предложена на математическото общество още през 1844 година. Минават повече от сто години преди тя да бъде преоткрита и да започне нейното развитие. В последните години се наблюдава засилен интерес към използването на тази алгебрична структура и външното произведение намира все по-голямо приложение в различни научни области като линейната алгебра, аналитичната геометрия, проективната и диференциалната геометрии, механиката, компютърната графика, физиката и др. В много университети учебните програми на математически дисциплини съдържат теми, свързани с външното произведение, издават се учебници, например [2].

Все по-голямото използване на Грасмановата алгебра поражда нуждата от създаване на компютърни програми за улеснение на пресмятанията с нейните елементи. Компютърната система за пресмятания *Mathematica* добави към основните си пакети нов - *GrasmmanAlgebra.* Той е разработен от Джон Браун, преподавател в Swinburne University of Technology в Австралия. Едновременно с разработването на пакета *GrasmmanAlgebra,* Браун подготвя и съпътстващата го книга "Grassmann Algebra: Exploring applications of extended vector algebra with *Mathematica*"[1]. През 2001 година Браун публикува част от нея и по-късно през 2009 във връзка с двеста годишнината от рождението на Грасман той я публикува на http://sites.google.com/site/Grassmannalgebra/home.

СВОЙСТВА НА ВЪНШНОТО ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА ВЕКТОРИ

Накратко ще споменем само тези свойства на външното произведение, които са свързани с описаните по-долу приложения.

Твърдение 1 [2]: За всеки два вектора $v_1, v_2 \in V$ и за всяко $\lambda \in K$ са в сила свойствата:

- $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$;
- $(\lambda v_1) \wedge v_2 = \lambda(v_1 \wedge v_2)$; $v_1 \wedge (\lambda v_2) = \lambda(v_1 \wedge v_2)$;

- $(v_1 + v_2) \wedge x = v_1 \wedge x + v_2 \wedge x,\ x \in V$;
- $x \wedge (v_1 + v_2) = x \wedge v_1 + x \wedge v_2,\ x \in V$;
- $v_1 \wedge v_1 = 0$.

Външното произведение $v_1 \wedge v_2$ на векторите v_1 и v_2 от векторното пространство V е антисиметрична и билейна функция, която се нарича бивектор, който принадлежи на ново векторно пространство $\wedge^2 V$. Произведението на два елемента от V не е елемент на същото пространство, но произведенията на неговите образуващи формират ново векторно пространство. Произведението на три елемента от V се нарича тривектор и принадлежи на пространството $\wedge^3 V$. Така външното произведение на k вектора от V принадлежи на пространството $\wedge^k V$. Пространството $\wedge^k V$ е подпространство на тензорното произведение $V \otimes \cdots \otimes V$.

Съществува връзка между външното произведение и линейната зависимост на множество от вектори.

Твърдение 2 [2]: Векторите $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ от пространството V са линейно независими тогава и само тогава, когато $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$.

ПРИЛОЖЕНИЯ НА ВЪНШНОТО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

1. ПРЕСМЯТАНЕ НА ДЕТЕРМИНАНТИ

Ако $\{e_j,\ j = 1,2,...,n\}$ е базис в n-мерно векторно пространство и $\{v_i,\ i = 1,2,...,n\}$ са n вектора. Всеки от векторите v_i може да се запише във вида $v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} e_j, \quad i = 1,2,...,n.$ Разглеждаме коефициентите v_{ij} като елементи на квадратна матрица $(v_{ij})_{n\times n}$.

Твърдение 3 [2]:

Детерминантата на матрицата $(v_{ij})_{n\times n}$, получена от координатите на векторите $\{v_i,\ i = 1,2,...,n\}$ в базиса $\{e_j,\ j = 1,2,...,n\}$ е числото C, получено като коефициент в равенството $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = Ce_1 \wedge \ldots \wedge e_n$.

За да пресметнем $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ търсим външното произведение на векторите с координати елементите на даден ред, т. е.

$$(a_{11}e_1 + \ldots + a_{1n}e_n) \wedge \ldots \wedge (a_{n1}e_1 + \ldots + a_{nn}e_n) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = C\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n .$$

Коефициентът C пред едночлена $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ е стойността на детерминантата.

Пример 1: Да се пресметне детерминантата $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow (2e_1 + 5e_2) \wedge (3e_1 + 4e_2) = 6e_1 \wedge e_1 + 8e_1 \wedge e_2 + 15e_2 \wedge e_1 + 20e_2 \wedge e_2$$

Тъй като $e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2$ и $e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = 0$ (Твърдение1), тогава $6e_1 \wedge e_1 + 8e_1 \wedge e_2 + 15e_2 \wedge e_1 + 20e_2 \wedge e_2 = -7e_1 \wedge e_2 \Rightarrow \Delta = -7.$

В [4] са разгледани още примери и са описани свойства на детерминантите, получени чрез използване на свойствата на външното произведение и чрез неговата връзка с линейната зависимост на вектори.

2. НАМИРАНЕ ОБЕМ НА ПАРАЛЕЛЕПИПЕД

Чрез външното произведение можем да намираме обем на паралелепипед, определен от векторите $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

Нека във V е определено скаларно произведение на вектори и нека $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ е ортогонален базис във V. Нека $\omega_{i_1\ldots i_k}$ е базисен елемент на $\wedge^k V$ и $\omega_{i_1\ldots i_k} \equiv e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \in \wedge^k V$. Скаларното произведение се дефинира по следния начин:

(1) $\langle \omega_{i_1\ldots i_k}, \omega_{i_1\ldots i_k} \rangle = 1,$

(2) $\langle \omega_{i_1\ldots i_k}, \omega_{j_1\ldots j_k} \rangle = 0,$ ако $\omega_{i_1\ldots i_k} \neq \pm \omega_{j_1\ldots j_k}$.

За всеки два вектора ψ_1 и ψ_2 от $\wedge^k V$ се дефинира скаларно произведение $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ чрез скаларното произведение на базисните вектори $\omega_{i_1\ldots i_k}$.

Твърдение 4 [2]: Обемът на k- мерен паралелепипед, построен върху векторите $\{v_1, \ldots, v_k\}$ е $\sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$, където $\psi = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$.

При $k = n$ произведението $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ има само едно събираемо и $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \lambda e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Тогава обемът на n- мерния паралелепипед е равен на $|\lambda|$.

Като предимство на предлагания метод за пресмятане на обеми можем да посочим, че формулата за обем на k- мерен паралелепипед в n- мерно векторно пространство е приложима за всякакви k и n, за които $2 \le k \le n$.

Чрез тази формула може да се търси обем на k- мерен паралелепипед, т.е. на паралелепипед, определен от k вектора и понятието обем е обобщение за всякакви k. Разбира се, когато k =2, имаме в предвид лице на успоредник, определен от два вектора.

Пример 2. Да се намери лицето на успоредника, определен от векторите $a = (2,1,2)$ и $b = (3,-4,2)$.

За да намерим лицето на успоредника записваме векторите по следния начин $a = 2e_1 + e_2 + 2e_3$, $b = 3e_1 - 4e_2 + 2e_3$ и намираме външното им произведение.

$$a \wedge b = (2e_1 + e_2 + 2e_3)(3e_1 - 4e_2 + 2e_3) = -11e_1 \wedge e_2 - 2e_1 \wedge e_3 + 10e_2 \wedge e_3.$$

Тогава лицето на успоредника е

$$S_{усп} = \sqrt{\langle -11e_1 \wedge e_2 - 2e_1 \wedge e_3 + 10e_2 \wedge e_3, -11e_1 \wedge e_2 - 2e_1 \wedge e_3 + 10e_2 \wedge e_3 \rangle} =$$

$$= \sqrt{121 + 4 + 100} = 15.$$

В [3] са разгледани повече примери за намиране на лица и обеми в различни векторни пространства.

3. РЕШАВАНЕ НА СИСТЕМИ ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ

В [2] е показано как чрез външното произведение на вектори може да определим дали една система линейни уравнения има решения, а също така и как да се намерят тези решения. Разгледани са случаите, когато системата е съвместима и определена и когато е съвместима и неопределена.

Нека $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i, \ i = 1,\dots,n$ (1)

е система от n линейни уравнения с n неизвестни.

Разглеждаме A_{ij} като координати на множество от n вектори $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ спрямо дадения базис т.е. $a_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} e_i, \ j = 1,\dots,n.$ Определяме и $b = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$. Тогава можем да запишем системата (1) като уравнение, където представяме b като линейна комбинация на $\{a_j\}$ с неизвестни коефициенти $\{x_j\}$. Ако векторите $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ са линейно независими означаваме с $\omega = a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$ и с $\omega_j = a_1 \wedge \dots \wedge a_{j-1} \wedge b \wedge a_{j+1} \wedge ... \wedge a_n$, тогава всяко едно неизвестно x_j може да бъде пресметнато като коефициент на пропорционалност между ω_j и ω, т.е.

$$x_j = \frac{\omega_j}{\omega} = \frac{a_1 \wedge \dots \wedge a_{j-1} \wedge b \wedge a_{j+1} \wedge ... \wedge a_n}{a_1 \wedge \dots \wedge a_n} . \qquad (2)$$

Тази връзка изразява формулите на Крамер чрез външното произведение на вектори.

Пример 3. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{array} \right.$

От коефициентите на x, y и z и свободните коефициенти получаваме векторите $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1,2,-1)$, $a_3 = (1,3,1)$ и $b = (6,14,2)$ които записваме по следния начин:

$$a_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ a_2 = e_1 + 2e_2 - e_3,\ a_3 = e_1 + 3e_2 + e_3,\ b = 6e_1 + 14e_2 + 2e_3 .$$

Пресмятаме

$$\omega = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 = (e_1 + e_2 + e_3) \wedge (e_1 + 2e_2 - e_3) \wedge (e_1 + 3e_2 + e_3) = 4e_1 \wedge e_2 \wedge e_3;$$
$$\omega_1 = b \wedge a_2 \wedge a_3 = (6e_1 + 14e_2 + 2e_3) \wedge (e_1 + 2e_2 - e_3) \wedge (e_1 + 3e_2 + e_3) = 4e_1 \wedge e_2 \wedge e_3;$$
$$\omega_2 = a_1 \wedge b \wedge a_3 = (e_1 + e_2 + e_3) \wedge (6e_1 + 14e_2 + 2e_3) \wedge (e_1 + 3e_2 + e_3) = 8e_1 \wedge e_2 \wedge e_3;$$
$$\omega_3 = a_1 \wedge a_2 \wedge b = (e_1 + e_2 + e_3) \wedge (e_1 + 2e_2 - e_3) \wedge (6e_1 + 14e_2 + 2e_3) = 12e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$$

Тогава $x_1 = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{b \wedge a_2 \wedge a_3}{a_1 \wedge a_2 \wedge a_3} = \frac{4e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}{4e_1 \wedge e_2 \wedge e_3} = 1;$

$$x_2 = \frac{\omega_2}{\omega} = \frac{a_1 \wedge b \wedge a_3}{a_1 \wedge a_2 \wedge a_3} = \frac{8e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}{4e_1 \wedge e_2 \wedge e_3} = 2;$$

$$x_3 = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{a_1 \wedge a_2 \wedge b}{a_1 \wedge a_2 \wedge a_3} = \frac{12e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}{4e_1 \wedge e_2 \wedge e_3} = 3.$$

Чрез възлагане на самостоятелна работа на студенти от специалност Математика и Информатика на Русенския университет преподавател по Методика на обучението по математика е направил опит да насочи вниманието на студентите към понятието Грасманова алгебра [5]. След като са запознати с основни понятия и свойства на алгебрата, на студентите им се възлагат задачи за пресмятания, в които да приложат свойствата на външното произведение. Темата се оказва интересна за студентите, с лекота извършват преобразованията.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разгледаните по-горе приложения и съответните примери показват, че външното произведение е разбираема и лесна за прилагане конструкция. В пресмятанията основно се използват свойствата на външното произведение, показани в Твърдение 1. Новото, на което трябва да се обърне внимание са свойството антисиметричност $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$ и свойството $v \wedge v = 0$.

Считам, че темата за външно произведение може да бъде включена в учебните програми по математика за студентите първокурсници.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Browne,J. Grassmann Algebra: Exploring applications of extended vector algebra with Mathematica, Melbourne, Australia, http://sites.google.com/site/grassmannalgebra.

[2] Winitzki,S. Linear Algebra via Exterior products, Ludwig-Maximilians University, Munich, Germany, 2010.

[3] Михова,А., Приложения на външното произведение на вектори за пресмятане на лица и обеми, Научни трудове на научна конференция МАТТЕХ 2012, ШУ „Епископ Константин Преславски" –Шумен, 2012(под печат).

[4] Михова,А., И.Богомилова. Свойства на детерминантите, описани чрез външно произведение на вектори, Научни трудове на РУ „Ангел Кънчев", том 50, сер. 6.1, Русе, 2011, 7-11.

[5] Якимова,М., А.Михова. Използване на самостоятелната работа при студентите за привличането им към научно-изследователска работа, Научни трудове на РУ "Ангел Кънчев", том 47, сер. 5.1, Русе, 2008, 70-73.

Докладът е рецензиран.