

О спектре собственных частот некоторого класса тонких упругих оболочек

Наталья Культина, Валерий Новиков

On the spectrum of natural frequencies for certain types of thin shells. The peculiarity of natural frequencies spectrum is illustrated in this work for certain types of shells. The shells considered are a spherical thin shell under external pressure and a cylindrical thin shell under axial compression. In enough time when the load is increased, a combination of existing natural frequencies appears in the shell spectrum of natural frequencies and the corresponding combination of mode shapes. The appearance of combinatorial frequencies and mode shapes is called internal resonance. The case, in which three natural frequencies and their mode shapes are combined in a resonance frequency and a mode shape, is considered in the paper.

Keys words: *oscillations, vibrations, stability, dynamics of thin plates, internal resonance*

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные упругие оболочки как структурные элементы конструкций широко используются в различных областях современной индустрии. Изучение поведения подобных конструкций в различных условиях и при различных способах нагружения является актуальной научной проблемой. Несмотря на огромное количество работ, посвященных исследованию тонких оболочек, проблема эта далека от окончательного решения. Одной из важных и представляющих интерес задач в этой области является задача на расчет областей устойчивости класса оболочек при динамическом нагружении. К данному классу относятся цилиндрические и конические оболочки, сжатые вдоль оси, а так же сферическая оболочка под действием всестороннего сжатия.

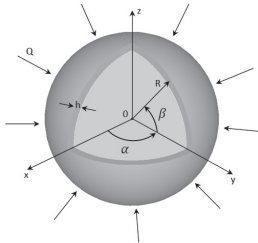
Вследствие приближенного характера теории тонких оболочек существует много математических моделей для исследования их устойчивости. В основном на практике используется линейная модель, в которой предельно допустимая (или критическая) нагрузка соответствует первому обращению в ноль одной из собственных частот оболочки. Однако для оболочек указанного выше класса линейная модель не дает корректных результатов. Наблюдается значительное расхождение между экспериментальными и теоретическими данными [1]. Величина предельно допустимой нагрузки, зафиксированная при нагружении опытных образцов, существенно ниже теоретически прогнозируемых значений. Кроме того, в экспериментальных показаниях присутствует широкий разброс.

Существует множество объяснений несоответствия теории и эксперимента. Например: чувствительность оболочек к начальным геометрическим и физическим несовершенствам, неравномерность распределения нагрузки по торцу оболочки, наличие зон пластической деформации [1, 2]. Однако известные объяснения практически не содержат каких-либо общих критериев для расчета предельно допустимых нагрузок. До настоящего времени остается открытым вопрос о построении аналитических методов, дающих надежную оценку области устойчивости.

В данной работе предлагается обратить внимание на следующую характерную особенность оболочек рассматриваемого класса. При увеличении нагрузки в спектре собственных частот оболочки возможно комбинационное взаимодействие определенных собственных частот и форм колебаний с некоторыми другими частотами и соответствующими им формами. Это явление называется генерацией собственных частот или внутренним резонансом. Известно [3, 4, 5], что наличие внутренних резонансов существенно влияет на динамику и может приводить к потере устойчивости взрывным образом. При этом величины нагрузок, при которых происходит образование резонансных комбинаций частот и форм, значительно меньше критических величин, определенных с помощью классических приближенных моделей.

Далее, в качестве иллюстрации, предлагается подробное исследование спектра собственных частот сферической оболочки, находящейся под действием всестороннего сжатия, и цилиндрической оболочки, сжатой по оси.

СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВСЕСТОРОННЕГО СЖАТИЯ



Рассматривается тонкая упругая сферическая оболочка толщины h , имеющая радиус срединной поверхности R , нагруженная равномерно распределенным внешним давлением Q (рис. 1). Спектр собственных частот оболочки определяется по линейной модели, уравнения движения в которой имеют вид [6]:

$$\frac{D}{h} \nabla^6 w + \frac{E}{R^2} \nabla^2 w + \frac{QR}{2h} \nabla^4 w + \rho \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Рис. 1. Сферическая оболочка под действием равномерного всестороннего сжатия

Здесь функция $w(\alpha, \beta, t)$ описывает прогиб. Пусть оболочка отнесена к географической системе координат, тогда β – угол широты, α – угол долготы. Введены обозначения: ρ – плотность материала, E – модуль упругости, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость, ν – коэффициент Пуассона, ∇^2 – оператор Лапласа. Граничные условия не ставятся.

Уравнение (1.1) приводится к безразмерным переменным и параметрам. В качестве масштаба по пространственным переменным выбирается радиус срединной поверхности R . За масштаб времени принимается величина $t_* = R \sqrt{\frac{2\rho(1+\nu)}{E}}$. Вводятся обозначения: $\delta = \frac{R}{h}$, $q = \frac{2(1+\nu)}{E} Q$ – параметр безразмерной нагрузки. Кроме того производится разделение пространственных и временной переменной с помощью замены: $w = w_1(\alpha, \beta) e^{i\omega t}$. Окончательно уравнение колебаний оболочки в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\frac{1}{6(1-\nu)\delta^2} \nabla^6 w + 2(1+\nu) \nabla^2 w + \frac{q\delta}{2} \nabla^4 w - \omega^2 \nabla^2 w = 0, \quad (1.2)$$

Решение (1.2) отыскивается в виде разложения по сферическим функциям [7]:

$$w(\alpha, \beta) = \sum_{m,n} Y_m^{(\pm n)}(\alpha, \beta),$$

где $Y_m^{(\pm n)}(\alpha, \beta) = P_m^{(n)}(\cos \alpha) \frac{\cos n\beta}{\sin n\beta}$, $P_m^{(n)}(z)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

После подстановки $w(\alpha, \beta)$ в уравнение (1.2) и с учетом свойства сферических функций [7]: $\nabla^2 Y_m^{(\pm n)} = -m(m+1) Y_m^{(\pm n)}$, получается уравнение для собственных частот оболочки:

$$\omega^2(q) = \frac{m^2(m+1)^2}{6(1-\nu)\delta^2} + 2(1+\nu) - \frac{\delta m(m+1)}{2} q, \quad (1.3)$$

где m – номер формы.

Как видно из выражения (1.3), определяющими параметрами для собственных частот являются: нагрузка q и $\delta = R/h$ – величина, обратная толщине оболочки. На рис. 2 приведен график спектра собственных частот в зависимости от нагрузки для конкретной оболочки с параметрами: $R/h = 1000$, $\nu = 0,3$.

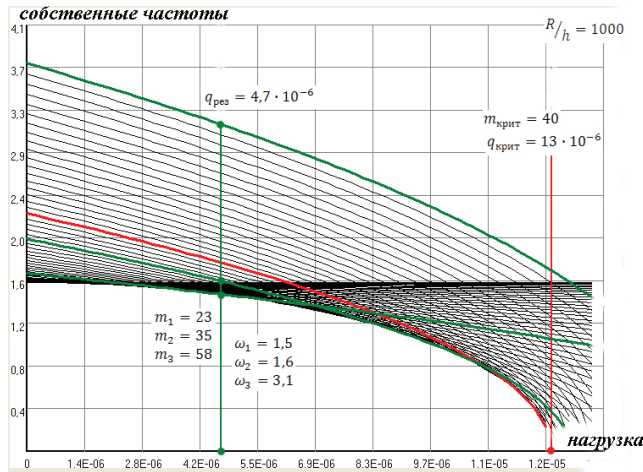


Рис. 2. Зависимость собственных частот от нагрузки для сферической оболочки с параметрами: $R/h = 1000$, $\nu = 0,3$

Как видно из графика, собственные частоты, соответствующие высоким формам колебаний, с увеличением нагрузки изменяются быстрее, чем частоты, отвечающие низким формам. В спектре присутствует область сгущения ветвей собственных частот. Эта особенность дает возможность образованию новых частот, близких к собственным, или внутренних резонансов. Наиболее простой пример генерации собственных частот – это образование резонансных троек, когда две нижние частоты, складываясь, дают третью и аналогичное условие имеет место для соответствующих номеров форм.

$$\begin{cases} \omega_{m_1} + \omega_{m_2} = \omega_{m_3}; \\ m_1 + m_2 = m_3. \end{cases} \quad (1.4)$$

Например, для сферической оболочки с параметрами $\delta = R/h = 1000$, $\nu = 0,3$ при нагрузке $q_{рез} = 4,7 \cdot 10^{-6}$ собственные частоты с номерами форм: 23; 35 и 58 принимают значения: 1,5; 1,6; 3,1 соответственно, и, следовательно, образуют резонансную тройку (рис. 2).

Как было отмечено выше, предельно допустимая нагрузка в линейной модели определяется из условия первого обращения в ноль одной из собственных частот. Из уравнения (1.3) следует, что при $\omega = 0$:

$$q(m) = \frac{1}{3(1-\nu)\delta^3} m(m+1) + \frac{4(1+\nu)}{\delta} \frac{1}{m(m+1)}.$$

Функция $q(m)$ исследуется на минимум в предположении непрерывной зависимости нагрузки q от номера формы m . В результате номер ветви собственной частоты, первой достигающей нуля, и соответствующее значение нагрузки выражаются следующим образом:

$$m_{крит} - \text{целая часть от выражения } \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 4\delta\sqrt{12(1-\nu^2)} - 1} \right]; \quad (1.5)$$

$$q_{крит} = \frac{4}{\delta^2} \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}}.$$

Величина $q_{\text{крит}}$, найденная по условию (1.5) и будет являться предельно допустимой нагрузкой, определяющей границу области устойчивости в линейной модели. Например, для оболочки с параметрами $R/h = 1000$, $\nu = 0,3$ в рамках линейной задачи можно сделать следующие выводы (рис. 2):

- потеря устойчивости происходит на форме с номером $m_{\text{крит}} = 40$;
- предельно допустимое значение безразмерной нагрузки $q_{\text{крит}} = 13 \cdot 10^{-6}$.

Однако, как уже было сказано, эта величина нагрузки не достигается при экспериментальных исследованиях, поэтому при расчете реальных конструкций нельзя ориентироваться на выводы, получаемые по линейной задаче.

Проведем анализ спектра собственных частот с целью нахождения внутренних резонансов и сравнения нагрузок, при которых происходит образование резонансных троек, с верхней критической нагрузкой.

Для определения нагрузки, отвечающей появлению внутреннего резонанса, перепишем уравнение для собственных частот (1.3) в виде:

$$\omega^2 = \varphi - \psi \cdot q, \quad (1.6)$$

где $\varphi(m) = \frac{m^2(m+1)^2}{6(1-\nu)\delta^2} + 2(1+\nu)$, $\psi(m) = \frac{\delta m(m+1)}{2}$.

Рассмотрим упорядоченную тройку номеров форм: $m_1 \leq m_2 < m_3$ таких, что выполняется условие:

$$m_1 + m_2 = m_3.$$

Обозначим собственные частоты, отвечающие этим формам: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Распишем условие внутреннего резонанса (1.4) с учетом выражения для собственных частот (1.6):

$$\sqrt{\varphi(m_1) - \psi(m_1) \cdot q} + \sqrt{\varphi(m_2) - \psi(m_2) \cdot q} = \sqrt{\varphi(m_1 + m_2) - \psi(m_1 + m_2) \cdot q}. \quad (1.7)$$

Возведем обе части уравнения (1.7) в квадрат, считая их положительными.

$$2\sqrt{(\varphi(m_1) - \psi(m_1) \cdot q)(\varphi(m_2) - \psi(m_2) \cdot q)} = \varphi(m_1 + m_2) - \varphi(m_2) - \varphi(m_1) - (\psi(m_1 + m_2) - \psi(m_2) - \psi(m_1)) \cdot q. \quad (1.8)$$

Из последнего уравнения следует область допустимых значений нагрузки q , где существуют решения (1.7):

$$q \leq \frac{\varphi(m_1+m_2) - \varphi(m_2) - \varphi(m_1)}{\psi(m_1+m_2) - \psi(m_2) - \psi(m_1)}. \quad (1.9)$$

Возведя обе части уравнения (1.8) в квадрат, приходим к квадратному уравнению относительно параметра нагрузки q , отвечающей внутреннему резонансу на формах с номерами $m_1, m_2, m_2 = m_1 + m_2$:

$$q^2 - 2f(m_1, m_2)q + g(m_1, m_2) = 0, \quad (1.10)$$

где коэффициенты имеют вид:

$$f(m_1, m_2) = \frac{2\varphi(m_1)\psi(m_2) + 2\varphi(m_2)\psi(m_1) - [\varphi(m_1 + m_2) - \varphi(m_2) - \varphi(m_1)][\psi(m_1 + m_2) - \psi(m_2) - \psi(m_1)]}{4\psi(m_1)\psi(m_2) - [\psi(m_1 + m_2) - \psi(m_2) - \psi(m_1)]^2},$$

$$g(m_1, m_2) = \frac{4\varphi(m_1)\varphi(m_2) - [\varphi(m_1 + m_2) - \varphi(m_2) - \varphi(m_1)]^2}{4\psi(m_1)\psi(m_2) - [\psi(m_1 + m_2) - \psi(m_2) - \psi(m_1)]^2}$$

или в развернутом виде:

$$f(m_1, m_2) = \frac{1}{6(1-\nu)\delta^3} [(m_2 - m_1)^2 + (m_1 + m_2)(1 - 3m_1m_2)] + \frac{2(1+\nu)}{\delta} \cdot \frac{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + 1) - m_1m_2}{m_1m_2(m_1 + m_2 + 1)};$$

$$g(m_1, m_2) = \frac{-4}{9(1-\nu)^2\delta^6} m_1m_2(m_1 + m_2 + 1)[(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + 1) - m_1m_2] + \frac{2(1+\nu)}{3(1-\nu)\delta^4} \cdot \frac{m_1^2(m_1 + 1)^2 + m_2^2(m_2 + 1)^2 + (m_1 + m_2)^2(m_1 + m_2 + 1)^2}{m_1m_2(m_1 + m_2 + 1)} + \frac{12(1+\nu)^2}{\delta^2} \cdot \frac{1}{m_1m_2(m_1 + m_2 + 1)}.$$

Любой упорядоченной тройке номеров $m_1 \leq m_2 < m_3$, где $m_1 + m_2 = m_3$ соответствует решение уравнения (1.10), если оно существует, то есть выполняется условие:

$$D = f(m_1, m_2)^2 - g(m_1, m_2) \geq 0. \quad (1.11)$$

В качестве параметра нагрузки, отвечающей внутреннему резонансу, примем наименьший корень уравнения (1.10):

$$q_{\text{рез}} = f(m_1, m_2) - \sqrt{f(m_1, m_2)^2 - g(m_1, m_2)},$$

если он:

1. Попадает в область допустимых значений (1.9), (1.11);
2. Собственные частоты, отвечающие номерам форм $m_1, m_2, m_1 + m_2$, при этом значении нагрузки образуют упорядоченную резонансную тройку:
 $\omega(m_1) \leq \omega(m_2) < \omega(m_1 + m_2)$

Например, для оболочки с параметрами: $\frac{R}{h} = 1000$, $\nu = 0,3$ отыскиваются следующие внутренние резонансы (таб. 1).

Таблица 1. Внутренние резонансы в спектре частот оболочки с параметрами $\frac{R}{h} = 1000$, $\nu = 0,3$

№	m_1	m_2	m_3	ω_1	ω_2	ω_3	$q_{\text{рез}} \cdot 10^6$	$q_{\text{рез}}/q_{\text{крит}}$
1	21	70	91	1,5	1,6	3,1	2,37	0,75
2	22	67	89	1,4	1,5	2,9	2,4	0,76
3	22	68	90	1,4	1,7	3,1	2,17	0,67
4	22	69	91	1,5	1,9	3,4	1,88	0,60
5	22	70	92	1,5	2,2	3,7	1,52	0,48
6	23	65	88	1,4	1,5	2,9	2,27	0,72
7	23	66	89	1,5	1,7	3,2	1,99	0,63
8	23	67	90	1,5	2,0	3,5	1,61	0,51
9	23	68	91	1,5	2,3	3,8	1,12	0,35
10	23	69	92	1,6	2,7	4,3	0,45	0,14
11	24	63	87	1,4	1,5	2,9	2,18	0,69
12	24	64	88	1,5	1,7	3,2	1,84	0,58
13	24	65	89	1,5	2,0	3,5	1,36	0,43
14	24	66	90	1,6	2,4	4,0	0,69	0,22
15	25	62	87	1,5	1,7	3,2	1,73	0,55
16	25	63	88	1,5	2,1	3,6	1,13	0,36
17	25	64	89	1,6	2,5	4,1	0,27	0,09
18	26	60	86	1,5	1,6	3,1	1,69	0,54
19	26	61	87	1,5	2,1	3,6	0,98	0,31
20	27	58	85	1,4	1,6	3,0	1,75	0,56
21	27	58	86	1,5	2,0	3,5	0,93	0,30

Наибольшее количество внутренних резонансов находится в области сгущения ветвей собственных частот. При этом номер формы второй резонансной частоты всегда близок к критическому значению (1.5). На рис. 3 приведена диаграмма плотности распределения нагрузок, отвечающих появлению внутренних резонансов, в интервале $(0; q_{крит})$.

Из диаграммы видно, что для данной оболочки наибольшее количество резонансов находится в интервале: $q \in (0,3q_{крит}; 0,75q_{крит})$

Как было отмечено выше, наличие комбинационных частот и форм оказывает существенное влияние на динамику оболочки. Когда частоты колебаний «падают» в один из внутренних резонансов, устойчивость теряется взрывным образом [3, 4, 5]. Проведенное рассмотрение позволяет сделать вывод, что оболочка с параметрами $R/h = 1000$, $\nu = 0,3$ наиболее вероятно потеряет устойчивость при нагрузке из интервала $(0,3q_{крит}; 0,75q_{крит})$ (рис. 3).

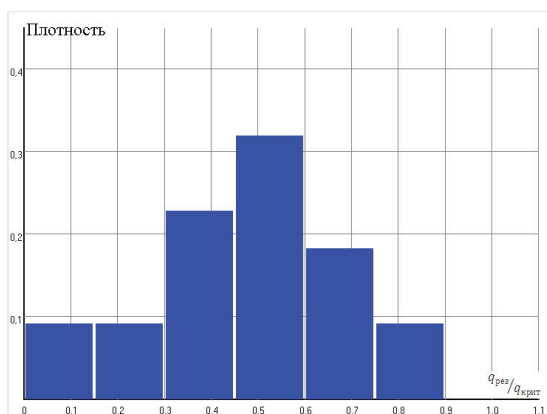


Рис. 3. Плотность распределения нагрузок, при которых возникает внутренний резонанс для оболочки с параметрами $\frac{R}{h} = 1000$, $\nu = 0,3$

Представляет интерес распределение нагрузок, отвечающих появлению в спектре частот внутренних резонансов в зависимости от толщины оболочки. На рис. 4. приведена диаграмма, отражающая распределение участков наибольшей плотности резонансов для оболочек различной толщины.

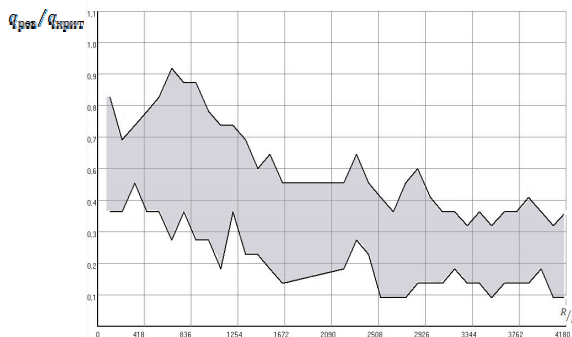


Рис. 4. Участки наибольшей плотности внутренних резонансов в зависимости от толщины оболочки

В значениях нагрузок, отвечающих внутренним резонансам, присутствует широкий разброс. Этим, в частности, можно объяснить широкий разброс в экспериментальных данных. Можно так же отметить тенденцию к снижению величин резонансных нагрузок с уменьшением толщины оболочки, что согласуется с экспериментальными показаниями [1, 2].

Аналогичной особенностью обладает спектр частот цилиндрической оболочки, находящейся под действием равномерного осевого давления.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА, СЖАТАЯ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ

Рассматривается тонкая упругая круговая цилиндрическая оболочка толщины h , длины L , срединная поверхность которой имеет радиус основания R . Оболочка нагружена по оси цилиндра внешним давлением Q , равномерно распределенным по торцам (рис. 5). Как и в случае сферической оболочки, спектр собственных частот определяется по линейной модели, где уравнения движения имеют вид [6]:



$$\frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + Q \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0; \quad (2.1)$$

$$\text{гр. у. } w|_{x=0} = w|_{x=L} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L}.$$

Рис. 5. Цилиндрическая оболочка под действием осевого сжатия

Прогиб оболочки описывается функцией $w(x, y, t)$. В качестве координатных осей выбраны главные направления срединной поверхности: ось x направлена вдоль оси цилиндра, ось y - вдоль дуги направляющей. В качестве граничных условий выбраны условия свободного опирания торцов оболочки.

При приведении уравнения (2.1) к безразмерным переменным и функциям за масштаб по пространственным переменным принимается длина оболочки L , за масштаб по времени - величина $t_* = L \sqrt{\frac{2\rho(1+\nu)}{E}}$. Вводятся обозначения: $\delta = \frac{R}{h}$, $\delta_1 = \frac{L}{R}$, $q = \frac{2(1+\nu)}{E} Q$ - параметр безразмерной нагрузки. После разделения пространственных и временной переменной с помощью замены: $w = w_1(x, y) e^{i\omega t}$, уравнение колебаний оболочки принимает вид:

$$\frac{1}{6(1-\nu)\delta_1^2 \delta^2} \nabla^8 w + 2(1+\nu)\delta_1^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \omega^2 \nabla^4 w = 0; \quad (2.2)$$

$$\text{гр. у. } w|_{x=0} = w|_{x=1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0.$$

Решение краевой задачи (2.2) отыскивается в виде рядов:

$$w(x, y) = \sum_{m,n} \sin(m\pi x) \sin\left(\frac{ny}{\delta_1}\right),$$

где m - число полуволн по оси, n - число волн по дуге цилиндра.

Подстановка $w(x, y)$ в уравнение (2.2) приводит к выражению зависимости собственных частот оболочки от нагрузки и номеров m, n :

$$\omega^2 = \varphi - \psi \cdot q, \quad (2.3)$$

$$\text{где } \varphi(m, n) = \frac{1}{6(1-\nu)\delta^2 \delta_1^2} \left[(\pi m)^2 + \left(\frac{n}{\delta_1}\right)^2 \right]^2 + 2(1+\nu)\delta_1^2 \frac{(\pi m)^4}{\left[(\pi m)^2 + \left(\frac{n}{\delta_1}\right)^2 \right]^2}$$

$$\psi(m) = (\pi m)^2.$$

В случае рассмотрения только осесимметричных форм колебаний ($n = 0$) коэффициенты уравнения (2.3) примут вид:

$$\varphi(m) = \frac{(\pi m)^4}{6(1-\nu)\delta^2\delta_1^2} + 2(1+\nu)\delta_1^2, \quad \psi(m) = (\pi m)^2.$$

На рис. 6 приведен график спектра собственных частот в случае осесимметричных форм колебаний конкретной цилиндрической оболочки.

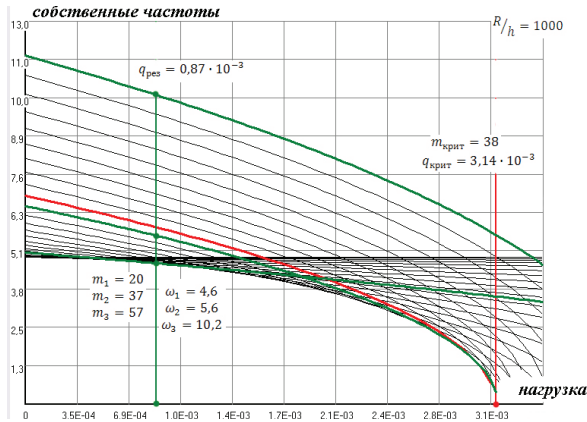


Рис. 6. Зависимость собственных частот от нагрузки для цилиндрической оболочки с параметрами $\delta = \frac{R}{h} = 1000$, $\nu = 0,3$

Как и в случае сферической оболочки при равномерном радиальном сжатии, в спектре частот цилиндрической оболочки при осевом сжатии наблюдается область сгущения ветвей частот, за счет того, что частоты на высоких формах с увеличением нагрузки меняются более быстро, чем частоты на низких формах. Таким образом, в спектре возможно образование комбинационных резонансных троек:

$$\begin{aligned} \omega_{m_1} + \omega_{m_2} &= \omega_{m_3}; \\ m_1 + m_2 &= m_3, \\ n_1 + n_2 &= n_3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Например (рис. 6), для цилиндрической оболочки с параметрами $R/h = 1000$, $\nu = 0,3$ в случае осесимметричных форм колебаний при нагрузке $q = 0,87 \cdot 10^{-3}$ собственные частоты с номерами форм: 20; 37 и 57 принимают значения: 4,6; 5,6; 10,2 соответственно, и, следовательно, образуют резонансную тройку.

Значение верхней критической нагрузки определяется аналогично задаче о сферической оболочке, из условия обращения в ноль какой-либо из собственных частот:

$$\begin{aligned} m_{\text{крит}} &= \text{целая часть от выражения } \frac{\delta_1}{\pi} \sqrt[4]{12(1-\nu^2)\delta^2}; \\ q_{\text{крит}} &= \frac{2}{\delta} \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Величина $q_{\text{крит}}$, отвечающая условию (2.5) будет являться предельно допустимой нагрузкой в рамках линейной математической модели. Например, для цилиндрической оболочки

дической оболочки с параметрами $\delta = R/h = 1000$, $\nu = 0,3$ верхняя граница области устойчивости определяется нагрузкой: $q_{\text{крит}} = 3,14 \cdot 10^{-3}$ и номером формы: $m_{\text{крит}} = 38$ (рис. 6).

Определим нагрузки, отвечающие внутренним резонансам в спектре собственных частот. Рассмотрим упорядоченные тройки номеров форм: $m_1 \leq m_2 < m_3$, $n_1 \leq n_2 < n_3$ таких, что выполняется условие:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= m_3 \\ n_1 + n_2 &= n_3 \end{aligned}$$

Обозначим собственные частоты, отвечающие этим формам: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Проведя рассуждения, аналогично случаю сферической оболочки, подробно рассмотренному выше, получим выражение для параметра нагрузки, отвечающей внутреннему резонансу на конкретных номерах форм: $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)$:

$$q_{\text{рез}} = \frac{c(m_1, m_2, n_1, n_2)}{2b(m_1, m_2, n_1, n_2)}, \quad (2.9)$$

где коэффициенты имеют вид:

$$b(m_1, m_2, n_1, n_2)$$

$$\begin{aligned} &= 2\varphi(m_1, n_1)\psi(m_2) + 2\varphi(m_2, n_2)\psi(m_1) \\ &- [\varphi(m_1 + m_2, n_1 + n_2) - \varphi(m_2, n_2) - \varphi(m_1, n_1)][\psi(m_1 + m_2) - \psi(m_2) \\ &- \psi(m_1)]; \end{aligned}$$

$$c(m_1, m_2, n_1, n_2)$$

$$= 4\varphi(m_1, n_1)\varphi(m_2, n_2) - [\varphi(m_1 + m_2, n_1 + n_2) - \varphi(m_2, n_2) - \varphi(m_1, n_1)]^2.$$

Аналогично задаче о сфере, равномерно сжатой в радиальном направлении, наибольшее число внутренних резонансов наблюдается в окрестности области сгущения ветвей собственных частот. Выделяя области значений нагрузок, отвечающих максимальному скоплению внутренних резонансов, для оболочек различной толщины, получаем диаграмму, представленную на рис. 7.

Как и в случае сферы, в значениях резонансных нагрузок наблюдается разброс, эти значения в большинстве случаев существенно ниже критической нагрузки, определяемой в рамках линейной задачи, и снижаются с уменьшением толщины оболочки.

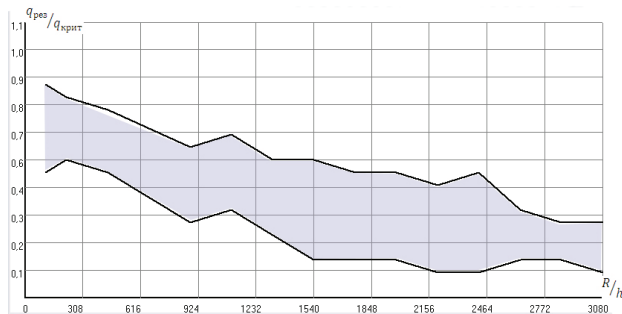


Рис. 7. Участки наибольшей плотности внутренних резонансов в зависимости от толщины оболочки

Подробное рассмотрение спектров собственных частот сферической оболочки, находящейся под действием равномерного радиального сжатия, и цилиндрической оболочки в условиях равномерного осевого сжатия приводит к следующим выводам:

- В спектре собственных частот оболочки присутствует множество внутренних резонансов, основная масса которых отвечает номерам форм в окрестности критического значения;
- В значениях нагрузки, соответствующих внутренним резонансам, наблюдается широкий разброс. Нагрузки, при которых возникают взаимодействующие частоты и формы, могут составлять от 0,1 до 0,9 от критического значения.
- Значения нагрузок, отвечающих максимальной плотности внутренних резонансов снижаются с увеличением толщины оболочки.

Предложенное исследование позволяет по-новому посмотреть на задачу об оценке области устойчивости класса тонких нагруженных оболочек, с учетом их характерной особенности – наличия комбинационных частот и форм. Предлагается при оценке критической нагрузки ориентироваться на величины, отвечающие появлению в спектре собственных частот внутренних резонансов. Данный метод определения критических нагрузок имеет преимущества, так как позволяет избежать исследования громоздких нелинейных математических моделей систем. Спектр собственных частот анализируется в простой линейной модели.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-314-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М., Наука, 1978.
- [2] Donnell L.H., Wan C.C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. ASME, Journal of Applied Mechanics. Vol. 17, № 1, 1950, 73–83.
- [3] Новиков В.В. О неустойчивости упругих оболочек как проявлении внутреннего резонанса. Прикладная математика и механика, Т. 52, вып. 6, 1988, 1022-1029.
- [4] Денисов Г.Г., Новиков В.В, Культина Н.Ю. О Взрывной неустойчивости механических систем. Вестник ННГУ. Механика. Вып. 1., 2004, 5-12.
- [5] Новиков В.В., Культина Н.Ю. К проблеме устойчивости механических систем, нагруженных позиционными неконсервативными силами. Вестник ННГУ. Мат. модел. и оптим. управление. Вып.3., 2006, 48-54.
- [6] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
- [7] Петрашень Г.И. Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы. Уч. зап. ЛГУ, Сер. мат. наук, Вып. 21, № 135, 1950, 24-70.

Контакты:

Асс. маг. мат. Наталья Юрьевна Культина, проф. д.ф.-м.н. Валерий Вячеславович Новиков, кафедра Теоретической механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия, e-mail: natalia.kultina@gmail.com

Докладът е рецензиран