

Числен метод за анализ на собствените честоти и форми на колебания

Неделчо Иванов, Здравко Иванов

Numerical method of analyzing the natural frequencies and waveforms. *The essential part of the dynamic research of the discrete models of ice operational unit is the definition of the natural frequencies and waveforms without taking damping into account. The method described that points to the peculiarities of the frequency polynome in the form of a continued fraction, proves to be a powerful computer method of computing them which in fact comprises all possible cases.*

Key words: *Computer Systems and Technologies, Model, Microprogramming Unit for Operation Control.*

ВЪВЕДЕНИЕ

За изследване на динамичните явления в машинните агрегати от типа двигател с вътрешно горене – работна машина (автомобил или друга транспортна машина), се използват дискретни динамични модели. В техническата литература и в литературата по числени методи са описани редица методи за определяне на собствените честоти и форми на колебание. Голяма част от тези методи са матрични, което ги прави удобни за програмиране, улеснявайки по този начин изчислителния процес. Всеки от методите работи с определено множество от матрици.

Цел на разработката е да се адаптира метода на верижните дроби за определяне на собствените честоти и форми на колебание на механичните системи към изискванията на съвременната изчислителна техника, отчитайки особеностите на числения метод и на честотния полином, записан във вид на верижна дроб.

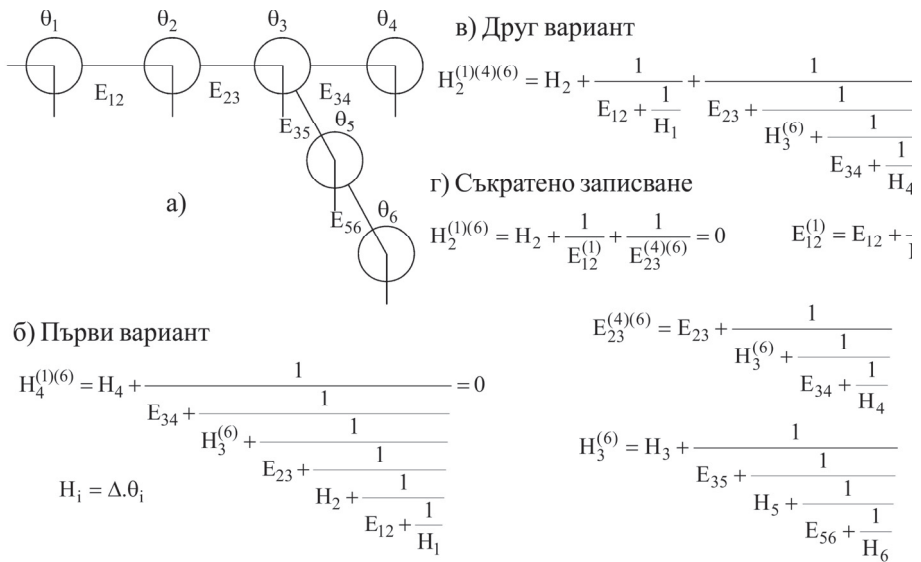
ИЗЛОЖЕНИЕ

Същността на метода ще илюстрираме със шестмасов разклонен динамичен модел, показан на фиг.1.а. На фиг.1.б. и фиг.1.в. са дадени два варианта на запис на честотното уравнение. Със символа θ_i са означени масовите параметри, а с $E_{i-1,i}$ податливостта на съединенията ($i=1,2,3...6$). С Δ е означен квадратът на собствената честота.

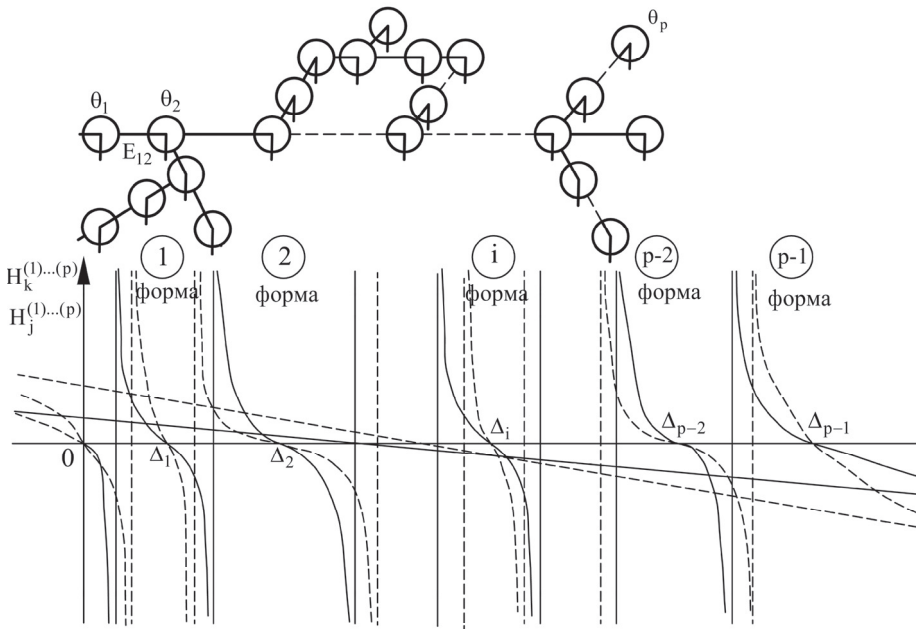
Изразите $H_4^{(1)(6)}$ и $H_2^{(1)(4)(5)}$ се използват за съкратен запис на верижната дроб. По същество тези изрази представляват функции на аргумента Δ и заемат стойности нула само тогава, когато аргумента съвпада с някоя от собствените честоти на механичната система. Тези изрази ще наречем честотни функции на дискретния динамичен модел. Общия брой честотни функции съответства на броя на вариантите на запис на честотното уравнение и се определя от формулата $N = 2p - 1$, където p е броя на масите.

На фиг.2.а. е даден дискретен динамичен модел в общ вид с възможни разклонения. Общия брой маси е p , а броя на собствените честоти и форми на колебание без нулевата е $p - 1$. На фиг.2.б. с плътни линии са показани графиките на честотните функции $H_k^{(1)...(p)} = H(\Delta)$, които представляват един вариант с начупване на маса k . Честотните функции имат следните свойства:

а) съществуват p на брой асимптоти, от които $p - 1$ са вертикални, а една е наклонена. Всяка асимптота ограничава част от честотната функция, в която тя е монотонно намаляваща и се изменя от $+\infty$ до $-\infty$. За честотна функция с начупване



Фиг. 1. Метод на верижните дроби



на податливост, графиката е монотонно растяща и се изменя от $-\infty$ до $+\infty$;

б) заема нулеви стойности само при едно значение на аргумента Δ в интервала между две вертикални асимптоти, които представляват собствените честоти за дадената форма на колебание;

в) големината на интервала между две вертикални асимптоти зависи от вида на честотната функция. Броят на интервалите е равен на броя на честотните функции на динамичния модел. На фиг.2.б. с прекъснатата линия е показана графиката на честотната функция $H_1^{(1)\dots(p)}$ с начупване на първата маса.

Определянето на търсената стойност на собствената честота и форма на колебание се извършва чрез последователни итерации в сходяща последователност.

Избира се първоначален интервал $[d_1, d_2]$ от числовата ос Δ , където $d_1 = 0$, $d_2 = a$, след което за средната стойност на интервала се получава:

$$\Delta = d_1 + 0,5(d_2 - d_1) \quad (1)$$

Пресмята се стойността на честотната функция, като едновременно с това се определя и броя на възлите по [1]. Тъй като величините $E_{i-1,i}$ и $E_{i-1,i}^{(1)\dots(p)}$ могат да бъдат равни в рамките на точността на изчислителното устройство, поради малката стойност на $H_i^{(1)\dots(p)}$, то е по-добре да се сравнят броя на възлите и да се избере този полуинтервал, в който се намира търсената собствена честота. Ако се укаже, че в полуинтервала $[d_1, \Delta]$ е твърде голям, деленето продължава. В случай, че в полуинтервала $[\Delta, d_2]$ или в изобщо интервала $[\Delta, \infty]$ няма стойност на търсената собствена честота, присвояваме $d_1 = \Delta$ и $d_2 = d_2 \cdot b$, където $b > 1$ и представлява просто дробно число, което не се дели на 2. По този начин интервалът $[d_1, d_2]$ се получава „плаващ“ дотогава, докато локализираме търсената собствена честота. Когато „плаващият“ интервал $[d_1, d_2]$ стане по-малък от интервала между две асимптоти, които ограничават търсената собствена честота, следващите операции се изпълняват по метода на секущите:

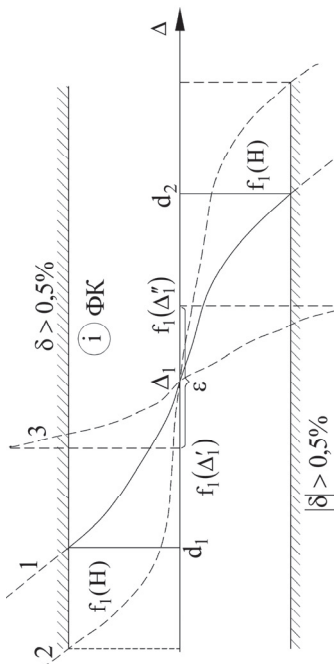
$$\Delta = d_1 - \frac{H(d_1)}{H(d_1) - \frac{H(d_2)}{d_2 - d_1}} \quad (2)$$

където Δ е следващото приближение, а $H(d_1)$ и $H(d_2)$ - значения на честотната функция от предхождащите итерации.

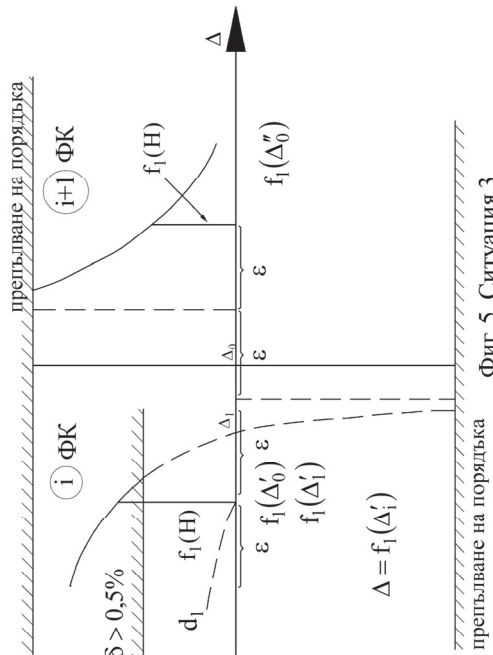
Когато Δ се намира в интервала на търсената собствена честота, изборът на интервала за следващата итерация се извършва в зависимост от знака на остатъка на честотната функция, фиг.2.б.

Имайки предвид вида на честотната функция на фиг.2.б. и особеностите на компютърното представяне на числата, то съществува възможност за възникване на различни числови ситуации, които трябва да се отчитат при програмно представяне на тази методика. Разглеждаме случая за дадения вид честотна функция $H_k^{(1)\dots(p)}$.

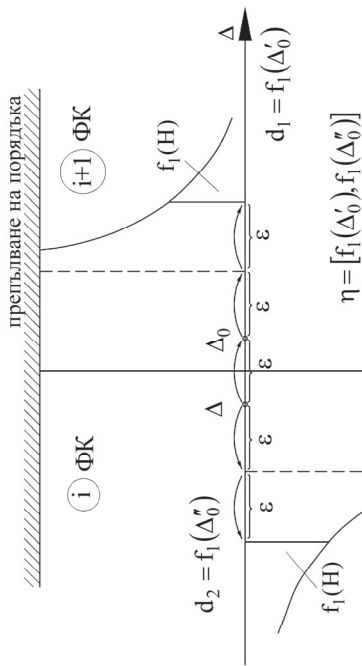
Ситуация 1, фиг.3. С ε означаваме полуинтервал от числовата ос Δ . Разглеждаме компютърно представяне на числа, при което младшите разряди се „отсичат“, т.е. при тях интервалът $\varepsilon = f_1(\Delta'_i), f_1(\Delta''_i)$ е сравнително широк. На фиг.3 с Δ_i е означена собствената честота с безкрайна точност, а с $f_1(\Delta'_i)$ нейното компютърно изображение. Означаваме с $\gamma = [d_1, d_2]$ интервал, в който е изпълнено условието $\delta \leq 0,5$ (крива 1). С $f_1(H)$ е означено значението на честотната функция



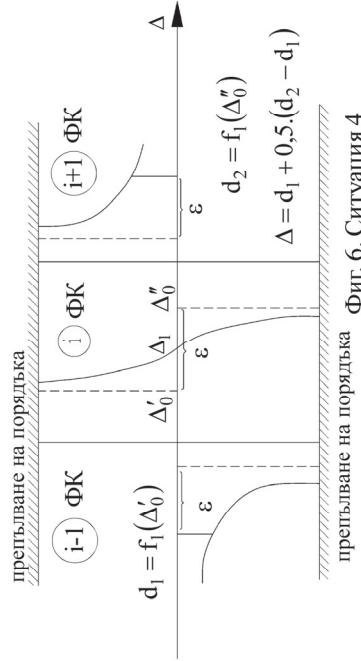
Фиг. 3. Ситуация 1



Фиг. 5. Ситуация 3



Фиг. 4. Ситуация 2



Фиг. 6. Ситуация 4

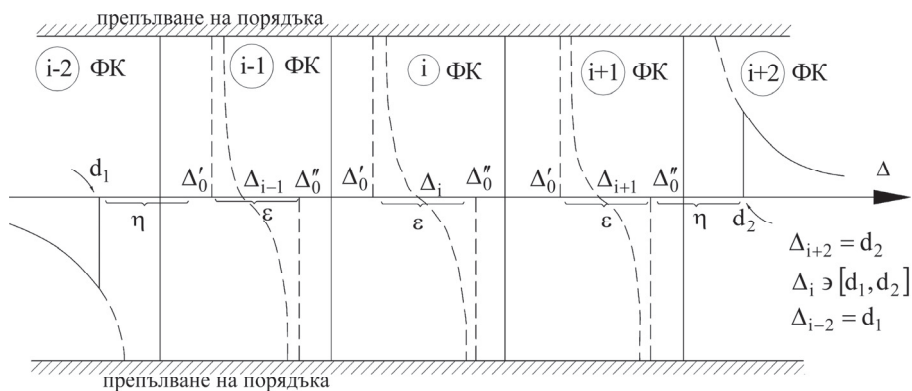
$H_k^{(1) \dots (p)}(d_i)$, $i=1,2$. Ако $\gamma \geq \varepsilon$ то описаният алгоритъм достига желаната точност относно формата на колебание и процедурата се прекратява. При $\gamma \geq \varepsilon$ броя на итерациите намаля. В този смисъл можем да търсим оптималния вид на честотната функция (крива 2). При $\gamma < \varepsilon$ желаната точност по отношение на формата на колебание не е достигната, но честотната функция $f_1(\Delta)$ използва пълните възможности на компютърната техника за работа с максимална точност (крива 3). В този случай изчислителната процедура продължава, запазвайки последното значение на собствената честота $f_1(\Delta_i)$ след което се извършва последователна проверка, кой от вариантите на честотната функция изпълнява условието $\gamma \geq \varepsilon$. Ако се окаже, че $\gamma < \varepsilon$ за всички варианти на честотната функция, формата на колебание се изчислява за този вариант, при който априорната точност δ е минимална. Ще отбележим, че прехода към работа с висока разрядност (двойна точност, ако компютърът позволява) дава възможност за съществено намаляне на интервала δ .

Ситуация 2, фиг.4. Ситуацията се реализира, когато избраното значение на Δ за поредната итерация попада в интервала $\eta = [f_1(\Delta'_a), f_1(\Delta''_a)]$, където Δ_a е точното значение на аргумента, за който се получава една от вертикалните асимптои. Ширината на η зависи от максималната точност на представяне на числата в използвания компютър. За съвременните компютри, работещи със сравнително висока точност, влиянието на честотната функция е слабо и интервалът η включва в себе си един или няколко интервала ε . Препълването на порядъка може да се получи и в случай, когато на даден „етаж“ от верижната дроб трябва да се определи обратното значение на машинната нула. Отбелязваме, че за дадената честотна функция този „етаж“ от верижната дроб определя и съответната асимптота (фиг.1). Ситуация 2 се реализира сравнително рядко, но за непрекъснатата работа на програмата, е необходимо на всеки етаж от изследването на верижната дроб да бъде включена проверка на машинната нула. На фиг.4 случай 2 е показан в интервала на вертикалните асимптои между i -та и $i+1$ -та форма на колебание, а Δ е значение на аргумента на поредната итерация, определена по (1). Възможни са различни варианти за избягване на дадената ситуация, но авторите считат за най-оптимален следния подход: Намаляне на младшия разряд на Δ с единица, докато не получим $\Delta = f_1(\Delta'_a)$ (плътните стрелки на фиг.4). Ако се укаже, че така определеното значение на собствената честота е по-малко от $f_1(\Delta_a)$, то присвояваме $d_2 = f_1(\Delta'_a)$ и продължаваме итерациите. Ако се укаже, че така определеното значение на собствената честота е по-голямо от $f_1(\Delta'_a)$, то увеличаваме младшия разряд на Δ с единица, докато не получим $\Delta = f_1(\Delta''_a)$, присвояваме $d_1 = f_1(\Delta''_a)$ (пунктираните стрелки на фиг.4) и продължаваме итерациите.

Ситуация 3, фиг.4. Реализира се тогава, когато за дадената честотна функция стойността на собствената честота Δ_i се намира в интервала η съответстващ на асимптотите (скрит корен). В този случай присвояваме $\Delta = f_1(\Delta'_i) = f_1(\Delta'_a)$ ако собствената честота е в ляво от асимптотите (фиг.5), или $\Delta = f_1(\Delta''_{i+1}) = f_1(\Delta''_a)$ ако тя е в дясно и продължаваме както в случай 1, крива 3.

Ситуация 4, фиг.6. Реализира се тогава, когато търсената собствена честота за дадената форма на колебание е ограничена между две съвсем близки асимптои

така, че техните интервали η се сливат. В този случай чрез плъзгане на Δ както и в ситуация 2 определяме $d_1 = f_1(\Delta'_a)$ и $d_2 = f_1(\Delta''_a)$, където $f_1(\Delta'_a)$ и $f_1(\Delta''_a)$ са граници



Фиг. 7. Ситуация 5

на сумарния интервал между две асимптоти. След това изчислителната процедура продължава както в ситуация 1 за крива 3, а последното значение на собствената честота се пресмята по израза $\Delta = d_1 + 0,5(d_2 - d_1)$.

Ситуация 5, фиг.7. Реализира се тогава, когато няколко значения на собствената честота (повече от 2) се получават достатъчно близки, така, че интервалите η се съединяват. При описанието на ситуация 2 сме определили границите на сумарния интервал между асимптотите $[d_1, d_2]$.

Ако търсим лявата или дясната собствена честота в интервала на сходните собствени честоти, продължаваме както в ситуация 1, крива 3, като за последното значение на собствената честота приемаме съответно $\Delta_{i-2} = d_1$ и $\Delta_{i+2} = d_2$. Ако търсим някакво средно значение на собствената честота указваме само прилежащия интервал $\Delta \in [d_1, d_2]$ и броя собствени честоти в този интервал, след което прекратяваме изчислителната процедура поради невъзможност да се определи формата на колебание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разгледаните 5 ситуации авторите считат за типови. Възможни са и други случаи, които могат да бъдат разглеждани като комбинации от разгледаните. Например, две близки по стойност собствени честоти, намиращи се между асимптотите на интервала η , могат да бъдат разглеждани като ситуация 3. Възможностите за реализация на различните числови ситуации зависят от използваната честотна функция, търсената форма на колебание на дискретния динамичен модел, типа и разрядността на използваната изчислителна техника. Пълният брой на възможните ситуации не може да бъде определен. Изследвани са значителен брой системи „двигател с вътрешно горене – работна машина“. За тях са определени пълния брой собствени честоти и форми на колебание. 90% от примерите реализират ситуация 1, тъй като наклонът на крива 3 е незначителен. Ситуация 2 се реализира рядко и то в случаите, когато изходният плаващ интервал $[d_1, d_2]$ е избран специално. Ситуация 5 до този момент авторите не са реализирали за нито един физически обоснован реален динамичен модел. След преход към

двойна точност, ситуация 1 се реализира в 99% от изследваните динамични модели за всички форми на колебание.

Разработеният алгоритъм за реализация на метода на верижните дроби го прави един от най-мощните средства за определяне на собствените честоти и форми на колебание на дискретни динамични модели, обхващащ на практика всички възможни случаи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Терских В.П., Расчеты крутильных колебаний силовых установок, Справочник, Машгиз, 1983.

[2] Истомин П. А. Крутильные колебания в СДВС. СПб, 1986г.

[3] Пановко Я.Г. Основы прикладной теории крутильных колебаний, – М.: Государственное научно-технич. издательство машиностроительной литературы, 1957.

[4] Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов. Справочник. - М.: Машиностроение, 1980.

[5] Попович В. С., Зимин А. Е. Сравнение численных методов расчета частот свободных крутильных колебаний, Ползуновский вестник, № 4, 2008.

За контакти:

Доц. д-р Неделчо Стойчев Иванов, Катедра “Транспортна техника и технологии”, Технически университет Варна, тел.: 052-383 315, e-mail: nidial@abv.bg.

Доц. д-р Здравко Динчев Иванов, Катедра “Транспортна техника и технологии”, Технически университет Варна, тел.: 052-383 464, e-mail: zdravko.ivanov@tu-varna.bg.

Докладът е рецензиран.