

Параметри на дискретни трептящи системи с ДВГ

Неделчо Иванов, Здравко Иванов

Parameters of discrete vibrating systems with internal combustion engine: Using Eigen frequency equation for discrete multibody system, authors prove the ability for one parameter (stiffness or mass) variation of the value of each of them, with purpose to avoid unwanted resonances, without the need to convert the input system to a more simple 3-mass or 5-mass one. Conditions for variability or invariance are derived about the eigenfrequency for a vibrational mode of given element.

Key words: Internal combustion engine, Eigen frequency, discrete multibody system.

ВЪВЕДЕНИЕ

Една от основните задачи на синтеза на машинен агрегат с двигател с вътрешно горене (ДВГ), е така да се варира с масовите му и еластични параметри, че динамичните напрежения във валопровода на последния, породени от усукващи, осеви или напречни трептения, да бъдат минимални и по-малки от допустимите. В [2, 3] авторите предлагат решение на тази задача, като машинния агрегат се замени с еквивалентен, тримасов, дискретен модел. Точността му спрямо реалната система зависи изключително от нейните параметри и я заменя с достатъчна за практиката точност само за някои по специални системи [1, 5]. Освен това разработеният метод не дава възможност за вариране спрямо форми на трептене от по-висок порядък. В [4] задачата се решава аналогично на [2, 3], но на базата на петмасов динамичен модел. Функционалната зависимост се оказва значително по-сложна и самото графично изследване, което се предлага от автора, поради трудоемкия си характер, прави метода малко приложим на практика.

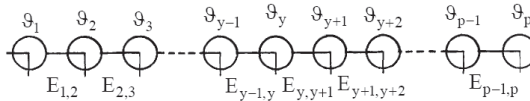
В [1, 5] се разглеждат методи на вариране, които по същество са точни, тъй като се основават на реалния динамичен модел, но същевременно не дават възможност за оптимално еднопараметрово вариране от гледна точка на техническа целесъобразност.

Цел на настоящата разработка е да се докаже възможността за оптимално вариране на масовите и еластични елементи на трептящата, линейна, многомасова система по един параметър спрямо коя да е форма на трептене без да се налага опростяване на многомасовата система (привеждане към тримасова или петмасова), така, че да се избегне нежелания резонанс с дадена собствена честота от усукващи, осеви или напречни трептения.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Най-често на практика за варируем елемент се използва податливостта на специално избрано съединение на дискретния динамичен модел. Например при автомобилните вграждания на ДВГ като варируеми параметри се използват податливостта (или коравината): на еластичния съединител към гасителя на усукващите трептения; на карданната предавка и на задвижващите полувалове. Интерес също така представлява и варирането с масовите параметри на маховика. При генераторните вграждания на буталните ДВГ интерес представлява варирането, както по податливост (еластичния съединител или междинното съединение), така по масов инерционен момент на маховика. При корабния валопровод е необходимо да се подбират параметрите на валопровода, упорния лагер и двигателния винт.

Основните доказателства и изводи на метода ще изложим като за варируем параметър изберем податливост. Разглежданията, когато за варируем параметър се избере маса, са аналогични, поради което в този случай ще посочим само обобщаващите резултати.



Фиг. 1. Дискретен много-масов модел

Да предположим, че дискретния, динамичен модел на изследвания агрегат има вида, показан на фиг. 1. За да намерим функционалната връзка в явен вид между варируемата податливост $E_{y,y-1}$ и квадрата на собствената честота по дадена форма на трептене Δ е удобно да се използва честотното уравнение на системата съставено във вид на верижни дроби [1, 5]:

$$E_{y,y+1} + \frac{1}{H_y^{(1)}} + \frac{1}{H_{y+1}^{(p)}} = 0. \quad (1)$$

Честотното уравнение (1) решаваме относно податливостта и намираме необходимата ни връзка на варираната податливост с честотата във вида:

$$E_{y,y+1} = - \left(\frac{1}{H_y^{(1)}} + \frac{1}{H_{y+1}^{(p)}} \right) \quad (2)$$

В разгънат вид на верижни дроби зависимостта (2) има вида (3):

$$E_{y,y+1} = - \frac{1}{H_y + \frac{1}{E_{y,y-1} + \frac{1}{H_{y-1} + \frac{1}{E_{y-1,y-2} + \frac{1}{H_{y-2} + \dots + \frac{1}{H_1}}}}} - \frac{1}{H_{y+1} + \frac{1}{E_{y+1,y+2} + \frac{1}{H_{y+2} + \frac{1}{E_{y+2,y+3} + \frac{1}{H_{y+3} + \dots + \frac{1}{H_p}}}}} \quad (3)$$

където: $H_y^{(1)}$, $H_{y+1}^{(p)}$ са “динамичните маси” на частите от системата, съответно от масата с номер “y” до първата и респективно от маса с номер “y+1” до последната маса с номер “p”;

$H_y = -\Delta \cdot g_y$ ($y = 1, 2, \dots, p$) е “динамичната маса” на масата с номер “y”;

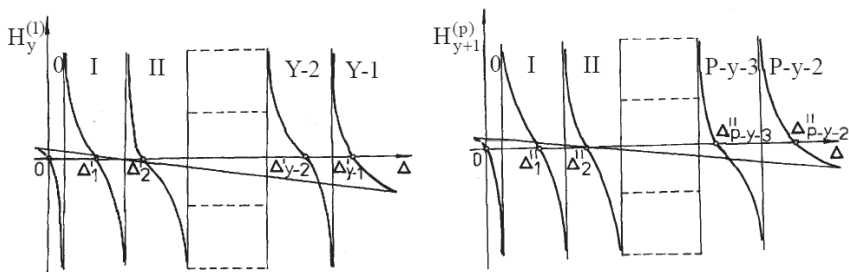
Δ - квадрата на собствена честота;

$E_{y,y-1}$ - варируемата податливост ;

p - брой на масите на системата.

От (2) се вижда, че функцията $E_{y,y+1}$ е еднозначно определена и дефинирана за всяка стойност на Δ , освен тези, за които имаме:

$$H_y^{(1)}(\Delta) = 0 \quad H_{y+1}^{(p)}(\Delta) = 0 \quad (4)$$



Фиг.2. Графична интерпретация на решението на честотните уравнения (4)

Условно можем да приемем, че системата от фиг.1 е съставена от две подсистеми - лява и дясна. Лявата подсистема е с масови и еластични параметри \mathcal{G}_i и $E_{j,j+1}$, където съответно $(i=1, 2, \dots, y)$ и $(j=1, 2, \dots, y-1)$, а дясната с масови и еластични параметри \mathcal{G}_i и $E_{j,j+1}$, където съответно $(i=y+1, y+2, \dots, p)$ и $(j=y+1, y+2, \dots, p-1)$. В такъв случай зависимости (4) ще представляват честотните уравнения за лявата и дясна подсистеми. Следователно (2) не е дефинирана за тези стойности на Δ , които съвпадат със собствените честоти на двете подсистеми. Нека приемем, че сме определили тези стойности, т.е. решили сме уравненията (4) и че сме ги подредили по големина:

$$0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_{i-1} < \Delta_i < \Delta_{i+1} < \dots < \Delta_{p-2} \quad (5)$$

Следователно функцията (2) е дефинирана в отворените интервали:

$$(0, \Delta_1); (\Delta_1, \Delta_2); \dots; (\Delta_{i-1}, \Delta_i); (\Delta_i, \Delta_{i+1}); \dots \dots; (\Delta_{p-3}, \Delta_{p-2}); (\Delta_{p-2}, \infty) \quad (6)$$

Изследваме поведението на (2) във всеки един от интервалите (6). Доказва се [1], че функциите (4) имат вида както е показан на фиг.2, където Δ'_i и Δ''_i принадлежат на реда (5), като при това са валидни следните граници:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow \Delta'_i + 0} \frac{1}{H_y^{(1)}} &= -\infty; & \lim_{\Delta \rightarrow \Delta'_i - 0} \frac{1}{H_y^{(1)}} &= +\infty; & \lim_{\Delta \rightarrow \Delta'_i + 0} \frac{1}{H_{y+1}^{(p)}} &= -\infty; \\ \lim_{\Delta \rightarrow \Delta''_i - 0} \frac{1}{H_{y+1}^{(p)}} &= +\infty; & \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{H_y^{(1)}} &= -\infty; & \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{H_{y+1}^{(p)}} &= -\infty; \\ \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{H_y^{(1)}} &= 0; & \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{H_{y+1}^{(p)}} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

където Δ_i е една коя да е стойност от реда (5). Следователно за (2) ще имаме:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow \Delta'_i + 0} E_{y,y+1}(\Delta) &= +\infty; & \lim_{\Delta \rightarrow \Delta_i - 0} E_{y,y+1}(\Delta) &= -\infty; \\ \lim_{\Delta \rightarrow +0} E_{y,y+1}(\Delta) &= +\infty; & \lim_{\Delta \rightarrow -0} E_{y,y+1}(\Delta) &= -\infty; \end{aligned} \quad (8)$$

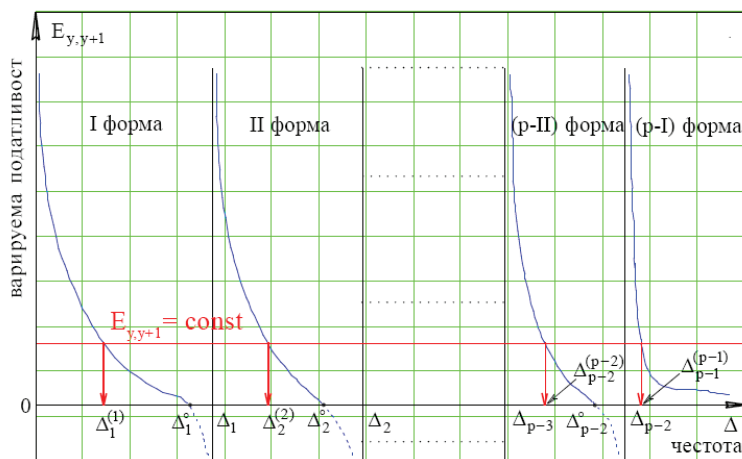
Ще докажем, че във всички отворени интервали (6), за които е дефинирана, функцията (2) е намаляваща. За целта разглеждаме производната на (2) спрямо Δ :

$$\frac{dE_{y,y+1}}{d\Delta} = \frac{\frac{d}{d\Delta} H_y^{(1)}}{\left(H_y^{(1)}\right)^2} + \frac{\frac{d}{d\Delta} H_{y+1}^{(p)}}{\left(H_{y+1}^{(p)}\right)^2} \quad (9)$$

и вземайки предвид, че $\left(dH_y^{(1)}/d\Delta\right) < 0$ и $\left(dH_{y+1}^{(p)}/d\Delta\right) < 0$, от (9) следва, че:

$$\frac{dE_{y,y+1}}{d\Delta} < 0. \quad (10)$$

Ще докажем още, че функцията (2) приема стойност нула за краен



Фиг. 3. Графично представяне на функцията $E_{y,y+1}(\Delta)$.

брой стойности на аргумента Δ в интервала $(0, \infty)$ и този брой е равен на $p-1$. Представяме (2) във вида:

$$E_{y,y+1} = \frac{H_y^{(1)} + H_{y+1}^{(p)}}{H_y^{(1)} \cdot H_{y+1}^{(p)}} = \frac{H_y + H_{y+1} + \frac{1}{E_{y-1,y}^{(1)}} + \frac{1}{E_{y+1,y+2}^{(p)}}}{H_y^{(1)} \cdot H_{y+1}^{(p)}}. \quad (11)$$

Числителят на (11) можем да разглеждаме като честотно уравнение на една дискретна система от вида на фиг.1, при която $E_{y,y+1} = 0$, а масите с индекс "y" и "y+1" са обединени. Такава една система има "p-2" на брой собствени честоти. Отбелязваме ги с Δ_i° ($i=1,2,\dots,p-2$). Към техния

брой трябва да прибавим съгласно (8) и $\Delta \rightarrow \infty$. От (2) се вижда, че функцията е еднозначна, а от (10) и (8) следва, че е постоянно намаляваща и непрекъсната в отворените интервали (6), като в краищата на всеки интервал, без последния, клони към $\pm\infty$. Следователно $E_{y,y+1} = 0$ само за една стойност на Δ във всеки интервал, т.е. във всеки интервал (6) имаме само по една стойност от реда Δ_i° ($i=1,2,\dots,p-2$), за който е изпълнено:

$$\Delta_i < \Delta_i^\circ < \Delta_{i+1}, \quad (12)$$

където (Δ_i, Δ_{i+1}) е кой да е от интервалите (6). От направените разглеждания до тук следва, че обратната на (2) функция $\Delta = f(E_{y,y+1})$ е еднозначна във всеки един от интервали (6), т.е. на всяка стойност на $E_{y,y+1}$ съответства по една стойност на Δ във всеки един от интервалите (6). Включвайки и последния интервал от (6), броя на честотите $\Delta_k^{(k)}$ за всяка една стойност на $E_{y,y+1}$ е равен на "p-1", т.е. точно колкото е и броя на интервалите. Следователно на всеки интервал съответствува по една форма на трептене (фиг.3).

От направеното изследване за функцията (2) се установиха следните свойства:

1. Тя има вида, показан на фиг.3.
2. Има краен брой точки на прекъсване, като стойностите на аргумента, за които функцията $E_{y,y+1}(\Delta)$ е неопределена, се получават като корени на честотните уравнения (4).
3. Дефинирана е в отворените интервали (6), като всеки интервал отговаря на една форма на трептене. Вътре в даден интервал кривата има форма на тангенсоид, който с нарастването на аргумента представлява постоянно намаляваща функция и взема всичките си стойности от $-\infty$ до $+\infty$ по един път.
4. Във всеки един от интервалите (6) се нулира само веднъж, като съответните стойности на аргумента се получават от честотното уравнение (13):

$$H_y^{(1)} + H_{y+1}^{(p)} = 0 \quad (13)$$

$$H_y + H_{y+1} + \frac{1}{E_{y-1,y}^{(1)}} + \frac{1}{E_{y+1,y+2}^{(p)}} = 0.$$

Разглеждаме следните частни случаи:

1. $\Delta_i = \Delta_{i+1}^\circ < \Delta_{i+1}$;
2. $\Delta_i < \Delta_{i+1}^\circ = \Delta_{i+1}$;
3. $\Delta_i = \Delta_{i+1}^\circ = \Delta_{i+1}$.

Ще докажем, че е възможен само третия частен случай. Нека допуснем, че $\Delta_i < \Delta_{i+1}^\circ < \Delta_{i+1}$, където Δ_i е примерно корен на първото уравнение от (4), Δ_{i+1}° е корен на честотното уравнение (13), а Δ_{i+1} е

примерно корен на второто уравнение от (4). Ако $\Delta_i = \Delta_{i+1}^\circ$, то следва от уравнението $H_y^{(1)} + H_{y+1}^{(P)} = 0$, на което Δ_{i+1}° е корен, че Δ_i е корен и на второто уравнение от (4). Следователно, ако имаме равенството $\Delta_i = \Delta_{i+1}^\circ$ се изпълнява и равенството $\Delta_i = \Delta_{i+1}$, т.е. възможен е само третия случай.

Ако за един от интервалите (6) е изпълнен трети частен случай, т.е. въпросния интервал се изражда във вертикална линия, то за него функцията (2) става неопределена, еднозначността ѝ се нарушава. В този случай каквато и стойност да вземе $E_{y,y+1}(\Delta)$ честотата на съответната

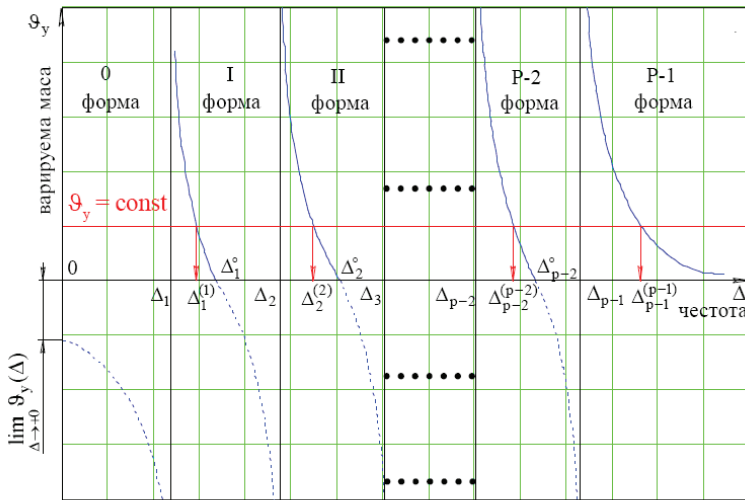
форма на трептене ще остане една и съща $\Delta = \Delta_i = \Delta_{i+1}^\circ = \Delta_{i+1}$. Ясно е, че ако сме избрали дадена податливост за варируем елемент и искаме да избегнем резонанса с дадена форма на трептене и ако последната спрямо варируемия параметър е от типа на третия случай, то не можем да постигнем поставената цел. В този случай имаме явление 'инвариантност' на собствената честота спрямо някои от масовите и еластични параметри. Същото би важило и ако сме решили да синтезираме нелинейна податливост $E_{y,y+1}$. И в този случай, ако честотата на дадена форма се получава инвариантна или "почти" инвариантна относно $E_{y,y+1}$, т.е.

$\Delta_i \approx \Delta_{i+1}$, то явлението резонанс не може да избегнем. Открит остава въпроса: как ще се мени самата форма на трептене? Следователно варируемия параметър трябва така да изберем, че спрямо него честотния интервал на съответната форма на трептене да бъде достатъчно голям, т.е. разликата $\Delta_{i+1} - \Delta_i$ да бъде относително голяма.

Ако фиксираме определена стойност на $E_{y,y+1} = const$, ще получим определен ред на собствени честоти $\Delta_k^{(k)}$ и форми на трептене. По този начин имаме възможност чрез промяна на податливостта $E_{y,y+1}$ да променяме собствената честота на дадена форма на трептене в определени граници, задавани от уравнението $E_{y,y+1}(\Delta) = 0$, (фиг.3) и да избегнем резонанса с тази честота в работния честотен диапазон, ако е възможно от техническа гледна точка.

Доказателствата за възможността за еднопараметрово вариране, когато за варируем параметър се избере маса са аналогични, поради което ще изложим само основните положения за този случай. За целта изхождаме от честното уравнение на системата от фиг.1, записано във вида [1, 4]:

$$H_y + \frac{1}{E_{y-1,y}^{(1)}} + \frac{1}{E_{y,y+1}^{(P)}} = 0, \quad (14)$$



Фиг. 4. Графично представяне на функцията $\mathcal{G}_y(\Delta)$.

което решаваме относно избраната за вариране маса:

$$\mathcal{G}_y = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{E_{y-1,y}^{(1)}} + \frac{1}{E_{y,y+1}^{(p)}} \right). \quad (15)$$

За функцията (15) се установяват следните свойства:

1. Тя има вида, показан на фиг. 4.
2. Има краен брой точки на прекъсване, като стойностите на аргумента, за които функцията $\mathcal{G}_y(\Delta)$ е неопределена, се получават като корени на честотните уравнения:

$$E_{y-1,y}^{(1)} = 0 \text{ и } E_{y,y+1}^{(p)} = 0. \quad (16)$$

3. Дефинирана е в отворените интервали (6), получени от стойностите на решенията на уравнения (16), като всеки интервал отговаря на една форма на трептене. Вътре в даден интервал кривата има формата на тангенциод, който с нарастването на аргумента представлява постоянно намаляваща функция и взема всичките си стойности от $+\infty$ до $-\infty$ по един път. Стойности на аргумента, за които се нулира функцията (15) се получават от честотното уравнение (17).

$$E_{y-1,y} + E_{y,y+1} + \frac{1}{H_{y-1}^{(1)}} + \frac{1}{H_{y+1}^{(p)}} = 0 \quad (17)$$

4. И тук съществува възможността за инвариантност на дадена собствена честота относно избраната маса за вариране. От изследванията на авторите може да се посочи, че случаи на инвариантност се получават при разклонени системи (каквито се явяват динамичните модели за усукващи трептения в трансмисиите на автомобилите), когато за варируен параметър се избере маса или податливост от основния клон, а се иска

промяна на резонансните условия за форма на трептене, която има 'възел' в отклоненията.

Ако фиксираме определена стойност на $\mathcal{G}_y = const$, ще получим определен ред на собствени честоти $\Delta_k^{(k)}$ и форми на трептене. По този начин имаме възможност чрез промяна на масовия параметър \mathcal{G}_y да променяме собствената честота на дадена форма на трептене в определени граници, задавани от уравнението $\mathcal{G}_y(\Delta) = 0$ (фиг.4) и да избегнем резонанса с тази честота в работния честотен диапазон, ако е възможно от техническа гледна точка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказва се възможността за еднопараметрово вариране на масовите и еластични параметри на дискретен, многомасов, динамичен модел на машинни агрегати с двигател с вътрешно горене с цел избягване на нежелани резонанси, без да е необходимо опростяване на системата до тримасов или петмасов динамичен модел. При това функциите, които трябва да се изследват, имат сравнително 'прост' вид, като отбелязваме, че тяхното програмиране е удобно и програмите имат компактен вид и могат да се използват и при изследване на инвариантността или 'почти' инвариантността на собствени честоти относно дадени масови и еластични елементи на многомасовите системи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Терских В.П., Расчеты крутильных колебаний силовых установок, Спр. т I, Ленинград, 1993г.
- [2]. Истомин П.А. Крутильные колебания в судовых ДВС, Судостроение, Ленинград, 1988 г..

За контакти:

Доц. д-р Неделчо Стойчев Иванов, Катедра "Транспортна техника и технологии", Технически университет Варна, тел.: 052-383 315, e-mail: nidial@abv.bg.

Доц. д-р Здравко Динчев Иванов, Катедра "Транспортна техника и технологии", Технически университет Варна, тел.: 052-383 464, e-mail: zdravko.ivanov@tu-varna.acad.bg.

Докладът е рецензиран.