Моделиране и числено решаване на задача за обем на непълна бъчва

Иван Георгиев, Стефка Караколева

***Резюме**: Проблемът е свързан с изчисляване на обем на хоризонтални 50-годишни бъчви във винарна в Австралия. Не са известни уравненията на повърхнината и липсват скали и таблици за пресмятане обема на виното в бъчвите в зависимост от нивото, измерено през малък отвор в горната част. В статията се анализира проблема, извеждат се аналитично уравненията на повърхнината и се намира обема чрез числено интегриране в системата за компютърни изчисления MATLAB. Създадена е файл-функция, описваща и решаваща проблема по зададени конкретни измервания на нивото на виното и по две измервания в най-тясната и в най-широката част на бъчвата.*

***Ключови думи**: моделиране, обем на тяло, числено интегриране, програмиране, MATLAB*

ВЪВЕДЕНИЕ

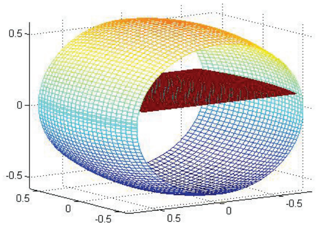
Проблемът е поставен от технолог във винарна в Австралия. Във винарната има хоризонтални 50-годишни дървени бъчви. Необходимо е да се измерят загубите от изпарение на виното в тях. Измерването на нивото на виното става чрез потапяне на стоманен метър през малък отвор, намиращ се в най-горната част на бъчвата. Долната и горна основа (разположени вертикално спрямо хоризонта) са елипси, а осното сечение е равнинна фигура с две успоредни и равни страни, другите две страни на която са криви, симетрични спрямо оста на бъчвата.

Проблемът е, че няма скали и таблици за определяне обема на виното спрямо измерено нивото h през горния отвор. Не е известен и обемът на бъчвите.

Могат да се измерят a - голяма полуос на долната и горната основа (разположени вертикално), b - малка полуос, височина на бъчвата $2L$, B-малка и A - голяма полуос на сечението на бъчвата с вертикална равнина, прекарана през отвора, намиращ се в най-широката част на бъчвата (най-високата точка спрямо хоризонта).

Моделиране на задачата

Нека фиксираме центъра на координатната система да е геометричният център на бъчвата [3,4], лежащ върху оста и на симетрия, оста Ox е разположена хоризонтално, Oz е вертикално, а Oy е перпендикулярна на равнината Oxz и минава през отвора в горния край на бъчвата.

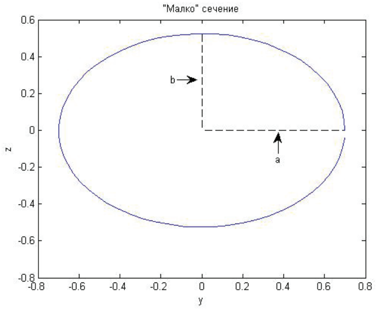


Фигура 1. Геометричен модел на бъчва с вино

От постановката на задачата имаме размерите на бъчвата в три сечения, като две от тях (двете дъна) са еднакви. Правим предположението, че всяко сечение между двете дъна, успоредно на тях, е елипса. Тогава, за едно междинно сечение (при фиксирано x между $-L$ и L) ще имаме уравнения

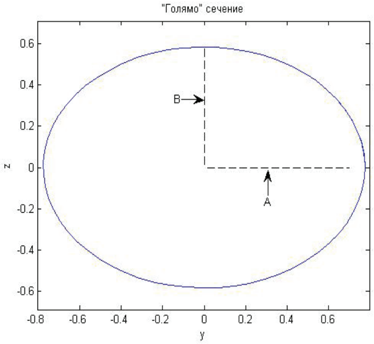
$$\left| \begin{array}{l} x = x_0, \\ y = f \cdot \cos\varphi, \\ z = g \cdot \sin\varphi, \end{array} \right.$$

където x_0 – число между $-L$ и L, а f и g са полуоси на междинното сечение, които засега са неизвестни. Можем да предполагаме, че f и g са функции само на променливата x, защото при изменение само на x, се изменят и полуосите на елипсата.



Фигура 2. Двете дъна на бъчвата (малки сечения)

От друга страна, в най-лявото сечение (Фиг.2) при $x = -L$ („лявото” дъно) знаем, че там f има стойност a, в за най-голямото сечение при $x = 0$ (Фиг.3) $f = A$ и в най-дясното сечение (Фиг.2) при $x = L$, $f = a$.



Фигура 3. Сечение на бъчвата с равнина през отвора (голямо сечение)

Аналогично за g: при $x = -L,\ g = b$, при $x = 0,\ g = B$ и при $x = L, y = b$.

Тогава $f = f(x)$ и $g = g(x)$ са функции на x. В равнината xOy кривата $f(x)$ минава през точките $A_1(-L, a),\ A_2(0, A)$ и $A_3(L, a)$.. В равнината xOz кривата $g(x)$ минава през точките $B_1(-L, b),\ B_2(0, B)$ и $B_3(L, b)$.

От предположенията на технолога и от съображението, че „най-елементарната” крива, която може да се построи през три точки, е парабола, можем да предполагаме, че $f(x)$ и $g(x)$ са квадратни уравнения.

Построяваме полином на Лагранж за $f(x)$ и $g(x)$ по съответните им три точки:

$$f(x) = \frac{a-A}{L^2}x^2 + A$$
$$g(x) = \frac{b-B}{L^2}x^2 + B, \quad -L \le x \le L$$

Тогава повърхнината ще има вида следния параметричен вид:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = \left(\dfrac{a-A}{L^2}u^2 + A\right)\cos\varphi, \quad -L \le u \le L, \\ z = \left(\dfrac{b-B}{L^2}u^2 + B\right)\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases} \tag{1}$$

Като изключим φ от (1) и заменим u с x получаваме

$$\frac{y^2}{\left(\dfrac{a-A}{L^2}x^2 + A\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\dfrac{b-B}{L^2}x^2 + B\right)^2} = 1, \quad -L \le x \le L. \tag{2}$$

Ако фиксираме $x = x_0 \in [-L, L]$, т.е пресечем повърхнината с равнина, перпендикулярна на оста Ox, ще получим крива, лежаща в равнината $x = x_0$ с уравнения:

$$\frac{y^2}{c_1^2} + \frac{z^2}{c_2^2} = 1. \tag{3}$$

Вижда се, че кривата (3), лежаща в равнината $x = x_0$ е елипса с полуоси

$$c_1 = \frac{a-A}{L^2}x_0^2 + A, \quad c_2 = \frac{b-B}{L^2}x_0^2 + B.$$

Нека сега в (1) фиксираме $\varphi = \varphi_0,\ 0 \le \varphi_0 \le 2\pi$, т.е. пресечем повърхнината с равнина, минаваща през ос Ox и сключваща с равнината xOy ъгъл φ_0. В тази равнина уравненията на получената крива са:

$$\begin{cases} y = c_1'\left(\dfrac{a-A}{L^2}x^2 + A\right), \\ z = c_2'\left(\dfrac{b-B}{L^2}x^2 + B\right), \quad -L \le x \le L, \end{cases}$$

където c_1' и c_2' са константи $c_1' = \cos\varphi_0,\ c_2' = \sin\varphi_0$.

В частните случаи $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ имаме съответно

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{a-A}{L^2}x^2 + A\right), \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = \left(\dfrac{b-B}{L^2}x^2 + B\right), \end{cases}$$

което означава, че сечението на повърхнината с равнини $xOy\ (z=0)$ и $xOz\ (y=0)$ са параболи. В общия случай сеченията не са параболи.

Ако в (2) заменим z със $z-B$, то цялата повърхнина се премества с B единици в посока Oz, т.е. цялата повърхнина ще лежи над равнината xOy, като се допира до нея в т.$O(0,0)$:

$$\frac{y^2}{\left(\frac{a-A}{L^2}x^2+A\right)^2}+\frac{(z-B)^2}{\left(\frac{b-B}{L^2}x^2+B\right)^2}=1, \quad -L\le x\le L. \tag{4}$$

Ако измереното ниво на виното означим с h, то течността ще бъде в областта D, ограничена както следва:

$$D:\begin{cases}\dfrac{y^2}{\left(\frac{a-A}{L^2}x^2+A\right)^2}+\dfrac{(z-B)^2}{\left(\frac{b-B}{L^2}x^2+B\right)^2}\le 1,\\ -L\le x\le L,\\ z\le h.\end{cases} \tag{5}$$

За да намерим обема, трябва да решим тройния интеграл

$$\mathrm{V}=\iiint\limits_D dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

Числено пресмятане на обема на бъчвата

За решаването на тройния интеграл (6) се използва системата за математически изчисления MATLAB [2]. Създадена е файл-функция за пресмятане на обема V=obem_bn(a,b,A,B,L,h), в която като входни параметри се въвеждат константите a,b,A,B,L, характеризиращи повърхнината и h е измереното ниво на течността:

```
function V=obem_bn(a,b,A,B,L,h)
    V=triplequad(@myfun,-L,L,-A,0,2*B,[],[],a,b,A,B,L,h);
    function u=myfun(x,y,z,a,b,A,B,L,h)
        u=(y.^2./((a-A).*x.^2./L.^2+A).^2+(z-B).^2./((b-B).*x.^2./L.^2+…
        B).^2-1<=0).*(z<=h).*(x<=L).*(-L<=x);
    end
end
```

Числени експерименти за проверка на модела

За проверка на модела пресмятаме обем на бъчва, за която технологът е измерил обема и размерите точно.

Дадени са размерите в метри, взети от вътрешната страна на бъчва, на която знаем приблизително обема $V_t=2,409\,m^3$. Данните са съответно: $a=0.85, b=0.625$, $A=0.925$, $B=0.710$, $L=0.6$. За да изчислим целия обем на бъчвата, приемаме, че е пълна до горе, т.е. $h=2B=1.42$.

Пресмятаме с MATLAB:

```
V=obem_bn(a,b,A,B,L,h)
V=2.315
```

Относителната грешка е

$$\frac{|\,V-V_t\,|}{V_t}\cdot 100\% = 3.9013\,\%$$

В резултат на проведения числен експеримент, се вижда, че между точната стойност и изчислената има разлика, чиято относителна грешка е 3.9013%, т.е. грешката е по-малка от 4%. Тази грешка се дължи на различни фактори:

- не всички дъски са еднакво дебели;
- не всички сечения са идеални елипси или параболи;
- в грешката се включва и грешката на числения метод за решаване на тройния интеграл.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставеният проблем от практиката е свързан с изчисляване на обем на хоризонтални бъчви със специфична форма чрез измерване на нивото през малък отвор в горната част. Необходимо е да се пресметнат загубите от изпарение на виното. Не е възможно да се прелива съдържанието на бъчвите (освен при бутилиране), а и не може да се долива или прелива вино от една бъчва в друга, тъй като всяко вмешателство би се отразило върху качествените показатели на материала. Моделирането и решаването на проблема числено не нарушава технологичните изисквания за качеството на виното и дава относителна грешка по-малка от 4%. Процесът на моделиране на задачата би бил полезен и при решаване на други подобни задачи от практиката. Моделът е съставен при зададена минимална информация. За по-близък до реалността модел могат да се направят допълнителни измервания, които да бъдат включени в модела.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Марков, К. Математическо моделиране, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2002, ISBN: 954-07-1694-2.

[2] Фирмена PDF документация на MATLAB, http://www.mathworks.com/help/

[3] Interactive mathematics:
http://www.intmath.com/applications-integration/4-volume-solid-revolution.php

[4] Had to know:
http://www.had2know.com/academics/barrel-volume-equation-calculator.html

За контакти:

гл. ас. Стефка Караколева, Катедра “Приложна математика и статистика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел. 082-888 606, e-mail: skarakoleva@uni-ruse.bg

ас. Иван Георгиев, Катедра “Приложна математика и статистика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел. 082-888 424, e-mail: irgeorgiev@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран.