

Математическое моделирование прогрева тестовой заготовки цилиндрической формы

Николай Десик, Юлия Теличкун, Владимир Теличкун

Mathematical modeling of heating of cylindrical dough pieces. In this paper presents modeling of heating cylindrical dough pieces with dimensions typical for the transition region from subtle to massive bodies and taking into account the efficiency thermal characteristics of the blanks, which are presented in the form of dependences obtained experimentally which take into account mass transfer processes during heating of the product.

Key words: Mathematical model, heating, bread, heat-mass transfer.

ВВЕДЕНИЕ

На хлебопекарных предприятиях выпечка хлеба происходит на печных агрегатах различной конструкции, принципа работы, способа обогрева и возможных режимов работы, что соответствующим образом отражается на качестве хлебобулочных изделий. На современном этапе хлебобулочная продукция высокого качества обеспечивается благодаря практическим знаниям и огромному опыту специалистов, а также теоретическим знаниям, которые необходимы для дальнейшего развития печной техники, детального изучения и моделирования процессов происходящих в заготовке при выпечке. Для этого успешно наряду с физическим моделированием используются инструменты вычислительной гидродинамики [1-4]. Тем не менее, в литературе отсутствуют модели прогрева тел, которые относятся к переходной области от тонких к массивным телам.

В работе представлено моделирование процесса прогрева цилиндрических тестовых заготовок с размерами характерными для переходной области от тонких к массивным телам.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

При выпечке хлебобулочных изделий в большинстве случаев процесс теплообмена осуществляется излучением, конвекцией и теплопроводностью, но доминирующее количество теплоты передается излучением.

При производстве заготовок цилиндрической формы, диаметр которых значительно меньше их длины, $d=0.015-0.030$ м., эти изделия можно рассматривать как неограниченный цилиндр.

Прогрев такого цилиндра имеет свои особенности, которые обусловлены его диаметром. Для тестовых заготовок в данных пределах диаметров находится переходная зона от тонких до массивных тел. Значение критерия Фурье ($0,01 \div 0,02$) [5, 6]. для изделий с диаметром находящимся в указанных пределах значительно превышает значения критерия Фурье для мелкоштучных изделий. Для минимального значения диаметра ($d=0,015$ м.):

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{R^2} = \frac{22 \cdot 10^{-8} \cdot 60}{0.0075^2} = 0.2347. \quad (1)$$

Для расчета прогрева изделий цилиндрической формы предложена математическая модель.

РЕЗУЛЬТАТЫ. Прогрев цилиндрических заготовок описывается дифференциальным уравнением теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right], \quad (2)$$

$$\tau > 0,$$

$$0 < r < R$$

При решении задачи прогрева тестовой заготовки, как правило, имеет место равномерное начальное распределение температуры в объеме заготовки, которую принимаем за начальную температуру. Тогда граничные условия формулируются так:

$$t(r, 0) = const; \quad (3)$$

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial r} = 0; t(0, \tau) \neq \infty; \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial r} = \alpha(t_c(\tau) - t(R, \tau)); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} t(r, \tau) &= f(\tau), \\ \tau &> 0, \\ 0 &\leq r \leq R \end{aligned} \quad (6)$$

где $t(r, \tau)$ – температурное поле цилиндрической заготовки, K ; λ – коэффициент теплопроводности, $Вт/(м^2 \cdot K)$; a – коэффициент температуропроводности, $м^2/с$; ρ – плотность, $кг/м^3$; c – удельная теплоемкость, $Дж/(кг \cdot K)$; α – коэффициент теплоотдачи, $Вт/(м^2 \cdot K)$.

Исходя из граничных условий (3, 4, 5, 6), а также введя безразмерные величины $X = \frac{r}{R}$, $Fo = \frac{\alpha \cdot \tau}{R^2}$ получим следующее уравнение и граничные условия:

$$\frac{\partial T(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T(X, Fo)}{\partial X^2} + \frac{1}{X} \cdot \frac{\partial T(X, Fo)}{\partial X}, \quad (7)$$

$$T(X, 0) = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial T(0, Fo)}{\partial X} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(1, Fo)}{\partial X} = -Bi(T(1, Fo) - \theta(Fo)), \quad (10)$$

где $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ – критерий Био.

В начале процесса выпечки тестовых заготовок с размерами, характерными для переходной области, невозможно рассматривать их как полуограниченного тело и пренебрегать повышением температуры их центра, как это обычно принимается при выпечке хлеба [7-9].

При нестационарном процессе переноса теплоты в неограниченном цилиндре радиусом R с равномерным начальным распределением температуры тепло передается поверхности цилиндрической заготовки.

В результате решения дифференциального уравнения теплопроводности должна быть найдена такая функция, которая одновременно удовлетворяет этому уравнению и определенным краевым условиям.

Решение задачи нестационарной теплопроводности, осложненной массообменными процессами, основано на решении дифференциального уравнения Фурье и предполагает использование теплофизических характеристик, которые не являются постоянными величинами и существенно изменяются в процессе выпечки.

Характер зависимости теплофизических характеристик от температуры образца изменяющихся в процессе выпечки можно установить в результате исследований на физической модели.

Теплофизические характеристики заготовок входящие в уравнение теплопроводности получены экспериментальным путем [10-13] и представлены эффективными теплофизическими характеристиками.

Эффективная теплопроводность теста-хлеба, Вт/(м·К):

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0.0068 \cdot t + 0.339 & \text{при } t = 30 \div 70^\circ\text{C} \\ \frac{1}{(55 - 0,533 \cdot t)^{\frac{1}{2,9}}} & \text{при } t = 70 \div 100^\circ\text{C} \\ 0.055 & \text{при } t > 100^\circ\text{C} \end{cases} \quad (11)$$

Эффективная теплоемкость теста-хлеба, кДж/(кг·К) :

$$c(t) = \begin{cases} 10^{0,1418+0,00694t} & \text{при } t = 30 \div 100^\circ\text{C} \\ 2.2 & \text{при } t > 100^\circ\text{C} \end{cases} \quad (12)$$

Эффективная плотность теста-хлеба, кг/м³ :

$$\rho(t) = \begin{cases} -6.875t + 952.5 & \text{при } t = 30 \div 70^\circ\text{C} \\ 470 & \text{при } t > 70^\circ\text{C} \end{cases} \quad (13)$$

Эффективные теплофизические характеристики зависят от температуры теста-хлеба и учитывают массообменные процессы протекающие при прогреве теста-хлеба. Таким образом, предложена математическая модель позволяет приблизительно провести расчет прогрева хлеба, являющимся сложным тепло-массообменным процессом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель прогрева теста-хлеба представлена дифференциальным уравнением теплопроводности в цилиндрической системе координат в критериальном виде. Для учета массообменных процессов, протекающих в хлебе при выпечке, использованы переменные эффективные теплофизические характеристики, которые полученные экспериментальным путем и являются функцией температуры образца.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Hasatani, N. Arai, H. Katsuyama, H. Harui, Y. Itaya, N. Fushida, N., Tatsukawa Heat and mass transfer in bread during baking in an electric oven, In: Mujumdar, A.S., Filkova, I. (Eds.), *Drying*, vol. 91. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991 - pp. 385–393.
- [2] . Zanoni, C. Peri, S. Pierucci A study of the bread-baking process. I: a phenomenological model. *Journal of Food Engineering* 19, 1993 – pp. 389–398.
- [3] Zanoni, B., Pierucci, S., Peri, C., 1994. Study of the bread baking process. II: mathematical modelling. *Journal of Food Engineering* 23, 321–336.
- [4] M.J. Wagner, T. Lucas, D. Le Ray, G. Trystram Water transport in bread during baking. *Journal of Food Engineering* 78, 2007 – pp. 1167–1173.
- [5] Володарский А.В. Исследование тепловых и гигротермических процессов при выпечке хлеба в тоннельных печах: автореф. диссертации канд. техн. наук: 05.175/А.В.Володарский. – К., 1969.-31с.
- [6] Острик А.С. Исследование процесса при выпечки при различных способах электрического обогрева: автореф. дис...канд. техн. наук: 05.175. – К., 1971.-32с.
- [7] М.Г. Десик, В.І. Теличкун, Ю.С. Теличкун, А.І. Германчук Дослідження впливу геометричних параметрів хліба на тепломасообмінні процеси. Харчова промисловість. - 2012. - №12. - с. 203-207.
- [8] А.І. Германчук, В.І. Теличкун, Ю.С. Теличкун, Н.Г.Десик Исследование тепло-масообменных процессов в камере гигротермической обработки тестовых заготовок, Научни трудове на русенски университет "Ангел Кънчев" - 2012, том 51, серия 9.2 Биотехнологии и хранителни технологии: г.Разград. с 44-48.
- [9] В.І. Теличкун, Ю.С. Теличкун, М.Г.Десик Вплив геометричних параметрів хліба на динаміку зовнішнього масообміну, 75-а наукова конференція молодих учених, аспірантів і студентів, 12-13 квітня 2009 р: тези доповідей. - Ч.2. - Київ, НУХТ. - 2009. - С. 115.
- [10] E. Purlis, V. O. Salvadori Bread baking as a moving boundary problem. Part 1: Mathematical modeling. *Journal of Food Engineering* 91, 2009 – pp.428–433.
- [11] E. Purlis, V. O. Salvadori Bread baking as a moving boundary problem. Part 2: Model validation and numerical simulation. *Journal of Food Engineering* 91, 2009 – pp. 434–442.
- [12] A. Mondal, A.K. Datta. Bread baking – a review. *Journal of Food Engineering* 86 (4), 2008 –pp. 465–474.
- [13] J. Zhang, A.K. Datta Mathematical modeling of bread baking process. *Journal of Food Engineering* 75. 2006-pp. 78–89.

Для контактов:

доцент, кандидат технических наук Николай Григорьевич Десик Кафедра "Машин и аппаратов пищевых и фармацевтических производств", Национальный университет пищевых технологий, e-mail: nikdesyk@gmail.com

доцент, кандидат технических наук Юлия Станиславовна Теличкун Кафедра "Машин и аппаратов пищевых и фармацевтических производств", Национальный университет пищевых технологий, e-mail: tvill@meta.ua

профессор, кандидат технических наук Владимир Иванович Теличкун Кафедра "Машин и аппаратов пищевых и фармацевтических производств", Национальный университет пищевых технологий, e-mail: tvill@meta.ua

Доклад был рецензирован