

Двукритериално изглаждане на данни с филтър на Savitzky – Golay

Венко Г. Витлиемов, Ивелин В. Иванов, Иван А. Луканов

Bi-criteria smoothing of data by Savitzky-Golay filter: An approach for interactive bi-criteria smoothing of experimental data is proposed using the system (S-G) filter of Savitzky-Golay. An optimization problem is formulated, which has opposite criteria: "total absolute error" and "integral smoothness", for the choice of adjusting parameters of the filter – the degree of the approximation polynomial and the number of the supporting points used. A Pareto-optimal solution set is found for the problem. Then subsets of Pareto-optimal solutions are determined by the μ -selection method, which are ranged by their trade efficiency. The solution with the highest rank efficiency is the Salukvadze-optimum of the formulated extremal problem. The proposed approach allows us to choose reasonably a variant of (S-G) data filter parameters having adequate representation and smoothness. An example of smoothing the measured values of acceleration in free vibrations with damping of the driving mechanism of a vibrobot is given.

Key words: data smoothing; filter of Savitzky-Golay; bi-criteria optimization; Pareto-set; μ -selection; Salukvadze-optimum.

УВОД

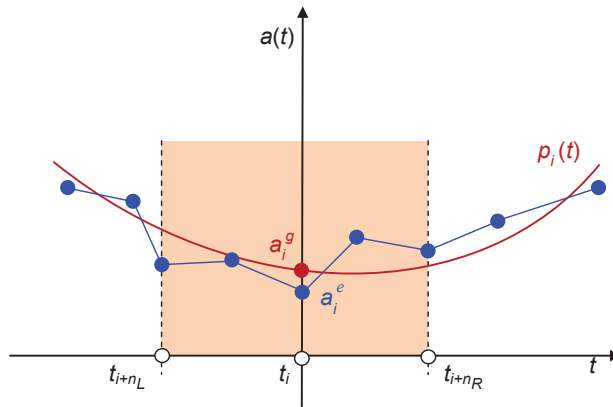
Много често данните за измерени стойности на някаква променлива величина са зашумени от неустановени допълнителни смущения, което може да компрометира определените с тези данни характеристики на разглеждания процес. Например параметричната идентификация на затихващите едномерни трептения на квазилинеен обект с високочестотно смущение е затруднено от неточно определяне на амплитудните стойности, квазипериода и логаритмичния декремент на затихване. В такива случаи анализът на експерименталните данни и синтезът на адекватен теоретичен модел за тяхното симулиране обикновено изискват предварителното им изглаждане. За тази цел се използват разработени методи и процедури за обработка на сигнали с помощта на изглаждащи филтри [10]. Създадени са филтри с различна сложност, точност, степен на гладкост, адаптивност и ефективност [1], [4], [5], [9], [10], [11], [16]. Съществуващото многообразие от филтри е обусловено от противоречивостта на посочените характеристики и невъзможността от тяхното съвместно реализиране в универсален филтър.

Разработването на по-съвършени филтри не може да реши еднозначно основната дилема при всяко филтриране – постигането на достатъчна гладкост чрез отстраняване на голяма част от шума и приемливо малка загуба на адекватност спрямо данните от физическия експеримент [5]. Изборът на еднозначно компромисно решение при противоречиви критерии е винаги субективен акт. В настоящата работа е предложен интерактивен подход, подпомагащ решаването на този проблем чрез обосноваван избор на стойности на регулиращите параметри на системен филтър от ранжирани по компромисна ефективност Парето-оптимални решения.

ФИЛТЪР НА SAVITZKY – GOLAY

В [4] е разгледан класически вариант на изглаждащ филтър, основан на метод, предложен в [13]. Идеята на метода е илюстрирана на фиг. 1. Изгладената по метода на най-малките квадрати (МНК) стойност a_i^g в точката t_i се получава като стойност в тази точка на полином $p_i(t) \equiv p(t_i)$ от степен n , апроксимиращ съвкупност от пълзящ фиксиран брой съседни измерени точки a_i^e , $i = 1, 2, \dots, n_e$. На фиг. 1 с n_L е означен броят на точките, разположени вляво на точката t_i , а с n_R – на разположените вдясно. Полиномът $p_i(t)$ използва като опорни $m = n_L + n_R + 1$ точки. В процеса на изглаждане ивицата, която съдържа m точки, се премества постъпково

надажно. При всяка нова стъпка в нея се включва нова точка отдажно и се изключва крайната точка отляво.



Фиг. 1. Изглаждане с полином $p_i(t)$, определен по МНК

Ефективни методи и компютърни програми за определяне на коефициентите b_k на апроксимиращия полином $p_i(t) = \sum_{k=0}^n [b_k(t - t_i)/(t_{i+1} - t_i)]^k$ са описани например в [4] и [10]. За реализиране на изглаждането с (S-G)-филтър тук е използвана функцията `sgolayfilt` от Signal Processing Toolbox на системата MATLAB [14].

КРИТЕРИИ ЗА ОПТИМАЛНОСТ

Изборът на регулиращите параметри на филтъра (S-G) – степен n на апроксимиращия полином и брой m на опорните точки в подвижната изглаждаща ивица е целесъобразно да се осъществи от Парето-оптималните [3] им стойности, определени за противоречивите критерии „сумарна абсолютна грешка“

$$(1) \quad J = \sum_{i=1}^{n_e} |a_i^e - a_i^g|,$$

и „интегрална гладкост“

$$(2) \quad I = \int_0^{t_f} [d^2 a^g(t)/dt^2]^2 dt,$$

където: $a_i^e \equiv a^e(t_i)$ и $a_i^g \equiv a^g(t_i)$ са съответно измерените и изгладените стойности на функцията $a(t)$; n_e е броят на дискретните стойности a_i^e за $t_i \in [0, t_f]$, $i = 1, 2, \dots, n_e$.

Критерият (1) е мярка за адекватност на изгладените a_i^g спрямо измерените a_i^e стойности, а критерият (2) характеризира степента на изглаждане на апроксимиращата функция a_i^g . Тъй като a_i^g е дискретна функция, функционалът (2) се заменя с

точност до константа от диференчен аналог $I \approx \sum_{i=2}^{n_e-1} (a_{i+1}^g - 2a_i^g + a_{i-1}^g)^2$. За определяне

на втората производна $[a^g(t_i)]''^2$ е използвана MATLAB-функцията `diff` [15].

ОПТИМИЗАЦИОННА ЗАДАЧА

Изборът на оптимални в смисъла на критериите (1) и (2) компромисни стойности на регулиращите параметри n и m на (S-G)-филтъра може да се осъществи след решаването на двукритериална екстремална задача

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \arg \text{Pmin}_{\mathbf{u} \in \mathbf{D}} \mathbf{f}(\mathbf{u}), \\ \mathbf{f} &= [J(\mathbf{u}), l(\mathbf{u})], \quad \mathbf{u} = [n, m], \\ \mathbf{D} &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{E}^2 : \mathbf{u}^- \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^+\}, \end{aligned}$$

където „Pmin” е оператор за определяне на глобално Парето-минимални [3] компромисни стойности на векторния критерий \mathbf{f} при удовлетворяване на условието за принадлежност на двумерния вектор \mathbf{u} на допустимото множество \mathbf{D} – правоъгълна област, определена от зададени гранични стойности \mathbf{u}^- и \mathbf{u}^+ на вектора \mathbf{u} .

ОПТИМИЗАЦИОННА ПРОЦЕДУРА

За решаването на задача (3) е използван модифициран вариант на програмата `rs1ms` за многокритериална параметрична оптимизация, документирана в [6]. Оптимизацията се осъществява в два етапа [2].

В Етап 1 се изпълнява постъпково пресмятане на векторния критерий $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ за всички точки от зададена мрежа в допустимата област \mathbf{D} . За тези точки се определят приблизително Парето-оптимални дискретни множества \mathbf{D}^* и \mathbf{P}^* , съответно в параметричната област \mathbf{D} и в достижимата критериална област \mathbf{P} .

В Етап 2 се селектират ранжирани по компромисна ефективност Парето-подмножества с помощта на минималните стойности μ_k^* , $k \in \mathbf{I}_k \equiv \{1, 2, 3\}$ на компонентите на векторен критерий $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \mu_3]$ от множеството $\mathbf{M} \equiv \{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{f}^*) \in \mathbf{E}^3 : \mathbf{f}^* \in \mathbf{P}^*\}$. Те съответстват на разстоянията между три характерни точки: положителната утопична точка \mathbf{f}^U с компоненти безкомпромисните минимума на частните критерии; текущата компромисна точка \mathbf{f}^* и нейната проекция \mathbf{f}^{UN} върху правата UN , която съединява двете утопични точки – положителната \mathbf{f}^U и негативната \mathbf{f}^N с компоненти безкомпромисните максимуми на частните критерии. В общия случай минималните разстояния μ_k^* съответстват на различни Парето-оптимални точки \mathbf{f}^* .

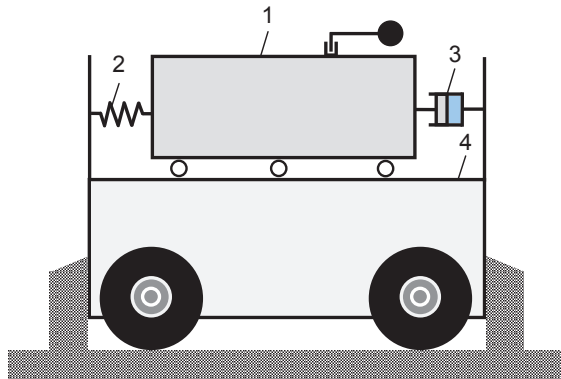
С помощта на векторния критерий $\boldsymbol{\mu}^s = [\mu_1^s, \mu_2^s, \mu_3^s]$, $s \in \mathbf{I}_s \equiv \{1, 2, \dots, N_p\}$, за всяка Парето-оптимална точка $\mathbf{f}^{*s} \in \mathbf{P}^*$ множеството \mathbf{P}^* се трансформира в точка на множество $\mathbf{M} \equiv \{\boldsymbol{\mu}^s \in \mathbf{E}^3 : s \in \mathbf{I}_s\}$ в тримерно $\boldsymbol{\mu}$ -пространство. В \mathbf{M} се изследват всички възможни комбинации от два критерия $\{\mu_t^s, \mu_h^s\}$, $t \neq h$, $t, h \in \mathbf{I}_k$. За всяка двойка критерии се селектират подмножества от Парето-оптимални точки $\mathbf{M}_\rho \equiv \{\boldsymbol{\mu}^s \in \mathbf{E}^3 : \mu_t^{*s,t} \leq \mu_t^s \leq \mu_t^{*s,h}, h \neq t, t, h \in \mathbf{I}_k, s \in \mathbf{I}_s\} \subset \mathbf{M}$, $\rho \in \mathbf{I}_\rho \equiv \{1, 2, \dots, 6\}$, където минимизиращата точка $\mu_h^{*s,h} = \min_{s \in \mathbf{I}_s} \{\mu_h^s\}$ на даден критерий μ_h^s , $h \in \mathbf{I}_k$ се използва като горна граница при селекцията по друг критерий μ_t^s , $t \neq h$, $t \in \mathbf{I}_k$, а точката минимум $\mu_t^{*s,t} = \min_{s \in \mathbf{I}_s} \{\mu_t^s\}$ на критерия μ_t^s – като долна граница. Всяка селектирана по този начин точка $\boldsymbol{\mu}^\rho \in \mathbf{M}_\rho$, $\rho \in \mathbf{I}_\rho$, а следователно и съответстващата ѝ точка $\mathbf{f}^\rho \in \mathbf{P}_R^* \subset \mathbf{P}^*$, получават като индивидуална оценка число $R_E = \max \{\rho\}$, което определя нейния ранг на компромисна ефективност. Това число съответства на броя ρ на подмножествата \mathbf{M}_ρ в обединеното множество $\mathbf{M}_R \equiv \{\cap_{\rho \in \mathbf{I}_\rho} \mathbf{M}_\rho\}$, на което принадлежи $\boldsymbol{\mu}^0 \equiv \boldsymbol{\mu}(\mathbf{f}^0)$.

Подмножеството на \mathbf{P}_R^* с най-висок ранг $R_E = 6$ обикновено съдържа само една точка $\mathbf{f}^S \equiv \mathbf{f}(\mathbf{u}^S)$, която съответства на Салуквадзе-оптималното [12] решение ($\mathbf{u}^S \equiv \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{D}} \mathbf{f}_3(\mathbf{u})$, $\mathbf{f}^S \equiv \mathbf{f}(\mathbf{u}^S)$) на задача (3). Това решение разкрива потенциалните възможности за равномерно доближаване на частните критерии до техните безкомпромисни оптимални стойности при допускането, че те са равноценни.

Окончателното компромисно решение ($u^{\#}$, $f^{\#}$) може да се избере след анализ на ранжираните Парето-оптимални подмножества в P_R^* . Първо се анализира Салуквадзе-оптималното решение. Ако то се оцени като неприемливо относно достигнатото ниво на компромис по някой от частните критерии, последователно се анализират подмножествата на P_R^* с по-нисък ранг докато се направи еднозначен избор.

ПРИМЕР

Предложеният оптимизационен подход ще приложим за изглаждане на измерено в [8] ускорение при свободни затихващи трептения на задвижващия механизъм на опитен образец на вибротот от [7], показан схематично на фиг. 2.



Фиг. 2. Механичен модел на вибротот: 1 – виброзадвижващ механизъм; 2 – еквивалентна пружина; 3 – еквивалентен демпер; 4 – обездвижено шаси

На фиг. 3 е показана диаграмата на измереното ускорение $a_i^e \equiv a^e(t_i)$ в дискретни моменти от времето t_i с постоянна стъпка 0.001 s след отклоняване и освобождаване на задвижващия механизъм от равновесното му положение. Измерените данни съдържат високочестотно смущение, което затихва постепенно заедно с основното трептливо движение. На фиг. 4 е представен фрагмент от изменението на абсолютните стойности $|a_i^e|$, които илюстрират в по-едър план смущението.

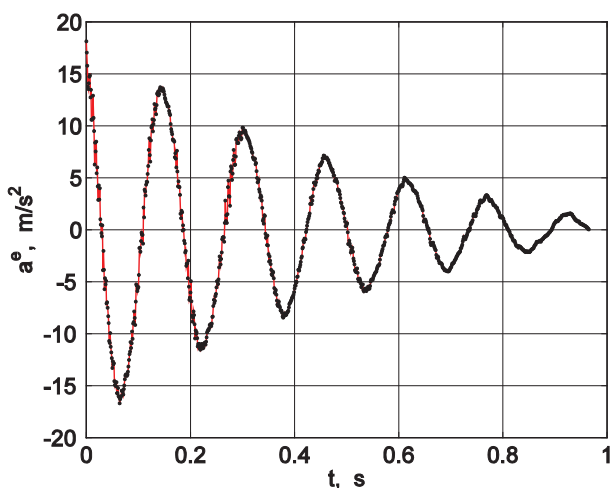
За компромисно изглаждане на ускорението a_i^e с (S-G)-филтър, задачата (3) е решена в област D с гранични стойности $u^- = [2, 31]$, $u^+ = [10, 71]$ на параметричния вектор u . В D е построена мрежа от 189 пробни точки, от които 33 са Парето-оптимални.

Намерените утопични точки $f^U = [202.4, 0.2815]$, $f^N = [288.7, 6.173]$ определят права UN в критериалното пространство, която дефинира направление на съгласувано подобряване на стойностите на частните критерии (в посока от N към U). Компонентите на идеалната точка f^U са безкомпромисните минимума J^* и I^* на въведените частни критерии (1) и (2).

С помощта на μ -селекция от Парето-оптималното множество са определени пет непусты подмножества с ранг $R_E \in \{6, 5, 4, 2, 1\}$. Резултатът от тази селекция е представен частично в Таблица 1. Компромисното решение S с най-висок ранг $R_E = 6$ е Салуквадзе-оптимум на задача (3).

Таблица 1. Ранжирани Парето-оптимални решения

Решение	R_E	u		f	
		n	m	$J, m/s^2$	$I, m^2/s^4$
S	6	8	57	229.4	1.411
A	5	6	41	229.0	1.867
	5	8	71	236.1	0.8768
	4	7	51	231.5	1.327
	4	7	71	238.4	0.5843
	2	10	51	225.3	2.474
	2	5	59	241.3	0.5009
B	1	10	49	221.1	2.739
C	1	5	71	246.7	0.3988



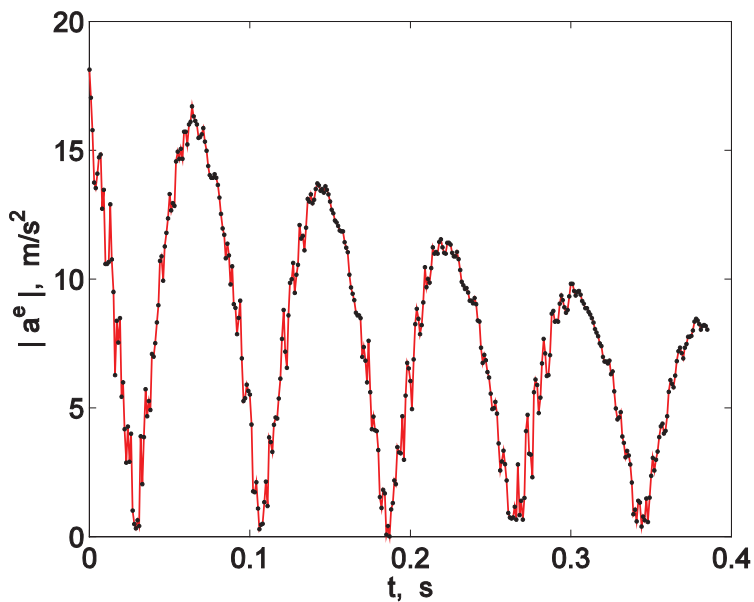
Фиг. 3. Измерени стойности (\cdot) на ускорението $a^e(t)$

Фигурата 5 илюстрира достигнатата гладкост и близост на Салуквадзе-оптималното до измереното ускорение.

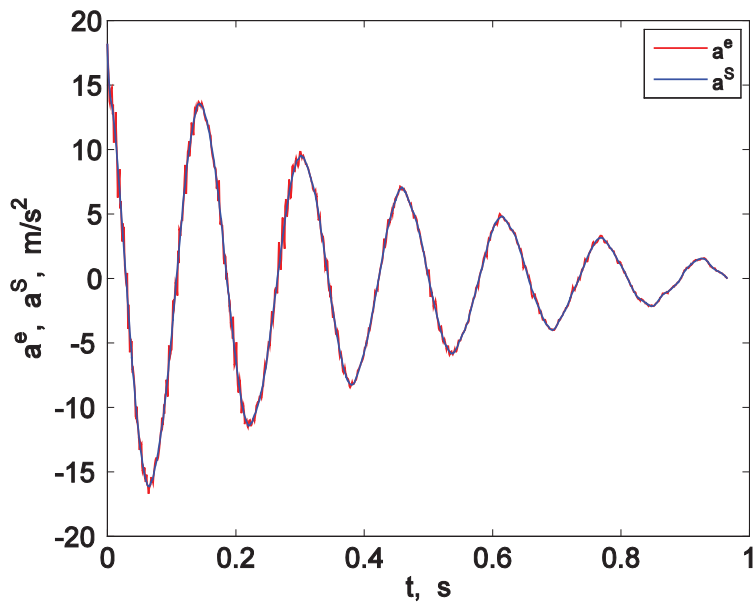
На фиг. 6 са показани всички пробни точки в областта D след осъществяване на Етап 2 от оптимизационната процедура. На тази и на следващите фигури точката с най-висок ранг $R_E = 6$ е означена със символа (\blacksquare), а точките с ранг 5, 4, 2, 1 – съответно с (\bullet , \blacktriangle , \blacktriangleleft , \blacklozenge).

Фигурата 7 дава нагледна престава за разположението на Парето-оптималните точки в μ -пространството относно утопичните точки μ^U и μ^N в това пространство, означени със символа (\bullet), и правата, която ги съединява. Тази фигура позволява да се направи визуална оценка на близостта на ранжираните точки до утопичната точка μ^U и да се открият алтернативни варианти на решения в критериалното пространство.

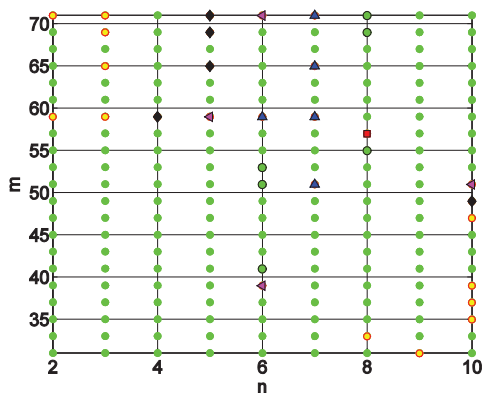
На фиг. 8 е изобразен нормираният по схемата $J^\circ = J/(J^N - J^U)$, $I^\circ = I/(I^N - I^U)$ Парето-фронт и ранжираните точки от проведената μ -селекция.



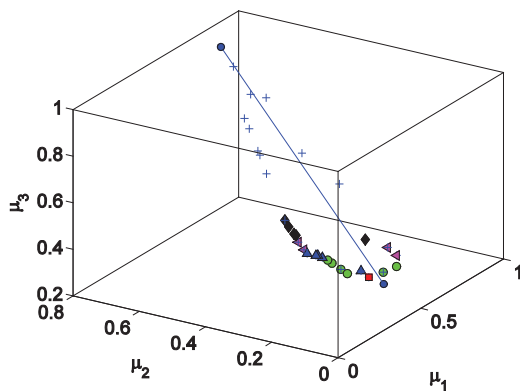
Фиг. 4. Абсолютни стойности $|a^e(t)|$ на измереното ускорение $a^e(t)$ за $t \in [0, 0.4]$



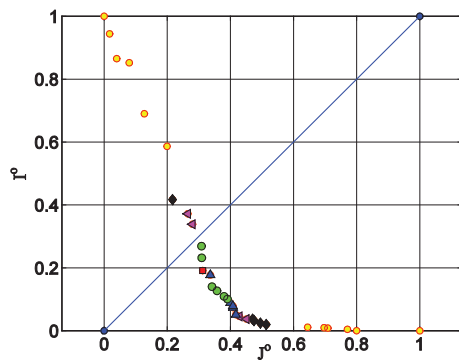
Фиг. 5. Измерено a^e и изгладено Салуквадзе-оптимално ускорение a^s



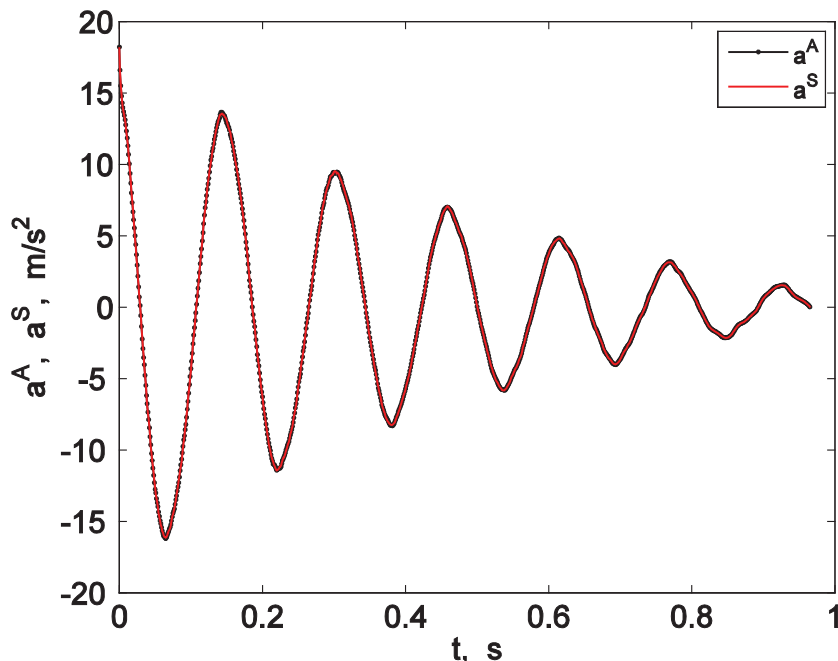
Фиг. 6. Допустими (●), Парето-оптимални (○) и ранжирани точки в областта D



Фиг. 7. Парето-оптимални (+) и ранжирани точки в μ -пространството



Фиг. 8. Нормирани Парето-оптимални (●) и ранжирани критерии



Фиг. 9. Изгладени Парето-оптимални ускорения a^S и a^A

Анализът на представените в Таблица 1 решения показва, че ранжираните подмножества съдържат потенциално алтернативни варианти на решението S. Вариантът A има близка до решението S адекватност, по-малки гладкост, степен на апроксимация полином и брой на опорните точки. Вариантът B е с най-добра адекватност за сметка на влошена гладкост, а решението C – с най-добра гладкост при занижена адекватност.

От фиг. 9 установяваме, че решенията a^S и a^A са графично трудно различими. Това може да е основание вместо S за окончателно компромисно решение ($u^\#, f^\#$) на задача (3) да предпочетем вариант A.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложеният подход за интерактивно двукритериално изглаждане със системен (S-G)-филтър позволява обосновано да се апроксимират експериментални данни с избрана гладкост и адекватност.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Browne, M., N. Mayer, T.R.H. Cutmore. A multiscale polynomial filter for adaptive smoothing. Digital Signal Processing, Vol. 17, 69–75, 2007.
- [2] Cheshankov, B.I., I.V. Ivanov, V.G. Vitliemov, P.A. Koev. PSI-method Multicriteria Optimization Contracting the Set of Trade-off Solutions. 15th International Conference on Systems Science, Wroclaw, Poland, Vol. 1, 281-288, 2004.
- [3] Ehrgott, M. Multicriteria Optimization. Springer, Berlin, 2005.
- [4] Gander, W., J. Hřebíček. Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and MATLAB. Berlin, Springer, Berlin, 2004.

- [5] Hamming, R.W. Digital Filters. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [6] Йорданов, Й.Т., В.Г. Витлиемов. Оптимизация с MATLAB. Прагматичен подход. Университетско издателство „Ангел Кънчев“, Русе, 2013, http://ecet.ecs.uni-ruse.bg/else/subjects/_index.php?cid=2130211020910970 .
- [7] Loukanov, I.A. Inertial Propulsion of a Mobile Robot. IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering, Vol. 12, No. 2, 23-33, 2015a.
- [8] Loukanov I.A., S.P. Stoyanov. Experimental determination of dynamic characteristics of a vibration-driven robot. IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering, Vol. 12, No. 3, 62-73, 2015b.
- [9] Oppenheim, A.V., R. W. Schaffer. Discrete-Time Signal Processing. Pearson, Upper Saddle River, NJ, 2010.
- [10] Orfanidis, S.J. Introduction to Signal Processing. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2009, <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp> .
- [11] Persson, P.-O., G. Strang. Smoothing by Savitzky-Golay and Legendre filters. J. Rosenthal et al. (Eds.), Mathematical Systems Theory in Biology, Communications, Computations, and Finance. Springer, New York, 301–316, 2003.
- [12] Salukvadze, M.E. Vector-Valued Optimization Problems in Optimal Control Theory, Academic Press, New York, 1979.
- [13] Savitzky, A., M.J.E. Golay. Smoothing and differentiation of data by simplified least-squares procedures. Analytical Chemistry, Vol. 36, No. 8, 1627–1639, 1964.
- [14] Signal Processing Toolbox™ User's Guide. MathWorks, Inc., Natick, MA, 2015, http://www.mathworks.com/help/pdf_doc/signal/signal_tb.pdf .
- [15] Symbolic Math Toolbox™ User's Guide. MathWorks, Inc., Natick, MA, 2015, https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/symbolic/symbolic_tb.pdf .
- [16] Wrobel, I., Zietak, K. On the Legendre-based filters of Persson and Strang. Applied Mathematics and Computation. Vol. 218, No. 8, 4216-4233, 2011.

За контакти:

Доц. д-р инж.-мат. Венко Георгиев Витлиемов, Катедра “Техническа механика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 622, e-mail: venvit@uni-ruse.bg

Доц. д-р инж. Ивелин Великов Иванов, Катедра “Техническа механика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 472, e-mail: ivivanov@uni-ruse.bg

Доц. д-р инж. Иван Антонов Луканов, Катедра „Машинно инженерство“, Университет на Ботсвана, Габороне, Ботсвана. тел.: +267 3554356, e-mail: loukanov@moripi.ub.bw

Докладът е рецензиран.