

## Динамика на вибробот

Иван Луканов, Венко Витлиемов, Ивелин Иванов

*Dynamics of a VibroBot: The mathematical model of a unidirectionally moving prototype of a mobile mechanical system with vibration propulsion is formulated. The results obtained from the numerical experiment with the robot dynamic model having linear elastic and dissipative characteristics are attached. The effects of variation of the robot's parameters upon its dynamics were investigated and analyzed.*

**Key words:** VibroBot, Vibrational drive, Mathematical Model, Dynamics, Numerical experiment.

### УВОД

Мобилните роботи с вибрационно задвижване (виброботи) са обект на засилен интерес, мотивиран от някои техни предимства при движение в нетрадиционни условия, съчетани със завишени изисквания за миниатюрност, енергоефективност и екологосъобразност. Виброботите имат проста конструкция, защото не изискват специални движещи механизми. Движението им се осъществява от инерционни сили, възникващи от периодично релативно движение на неуравновесени маси. Виброзадвижващият механизъм функционира в околност на основния резонанс. Това обуславя появата на нелинейни динамични процеси, които затрудняват изследването на този вид механични системи. Преобладаваща част от проведените изследвания върху виброботи са свързани с аналитично моделиране, експериментално прототипно проучване и компютърно симулиране на динамичното им поведение [4], [5], [6], [11]. В настоящата разработка е формулиран механо-математичен модел на колесен вибробот с едностранно движение, основан на експериментални данни от [9] за опитен образец, изследван в [7], [8]. С помощта на числен експеримент е проведен динамичен анализ на създадения модел.

### МЕХАНО-МАТЕМАТИЧЕН МОДЕЛ

На фиг. 1 е показан динамичен модел на реален опитен образец на вибробот [7]. В него е прието, че всички еквивалентни маси са разпределени в равнинни фигури, които се движат във вертикална равнина, която съвпада с равнината  $XOZ$  на абсолютната координатна система  $OXYZ$ .

Разглежданата механична система притежава динамична симетрия по направление на оста  $OY$ . Това допускане е вярно за възбуждащото въздействие на двете противоположно въртящи се неуравновесени маси  $m_3/2$  и за симетрично позиционираните еластични и дисипативни връзки, но е приблизително относно разположението на масовите центрове на съставните тела.

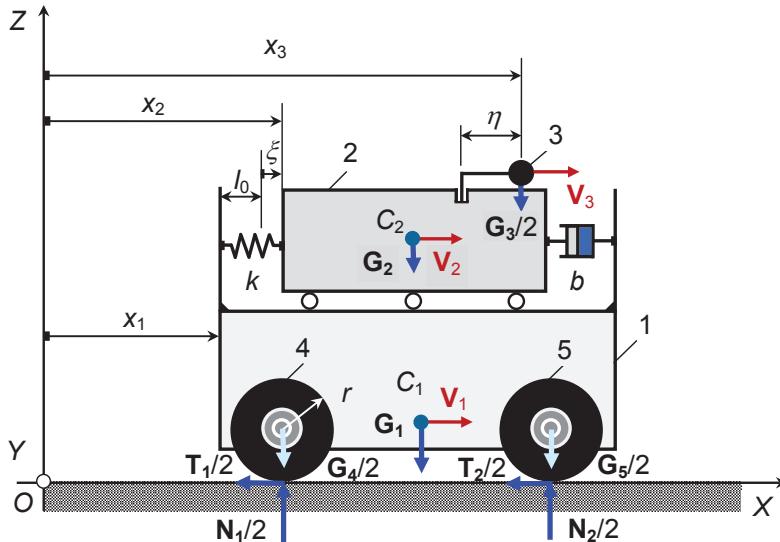
Телата 1 и 2 с тегла  $G_1$  и  $G_2$  се движат трансляционно-праволинейно. Възбуждащото действие на неуравновесените маси  $m_3/2$  е насочено по оста  $OX$ . То може да се симулира чрез периодично движение относно тяло 2 на еквивалентно тяло 3, моделирано като материална точка с тегло  $G_3 = m_3g$ , което се движи по зададен хармоничен закон  $\eta(t)$ .

Въвеждаме три обобщени координати  $x_1, x_2, x_3$ , които определят положението на телата 1, 2 и 3 спрямо координатната система  $XOZ$ . Координатите  $x_1, x_2$  и  $x_3$  са взаимосвързани чрез зависимостите  $x_2(t) = x_1(t) + l_0 + \xi(t)$ ,  $x_3(t) = x_2(t) + l_2 + \eta(t)$ , където:  $\eta(t) = \rho \sin(\omega t + \phi_0)$ ; разстоянията  $l_0$  (началната дължина на еквивалентната пружина),  $l_2$  и  $\rho$ , началната фаза  $\phi_0$  и ъгловата скорост  $\omega$  са зададени постоянни величини;  $\xi$  е мярката на изменението на дължината на еквивалентната пружина спрямо нейното начално статично състояние.

Колелата на количката, моделирани като твърди (еднакви по двойки) тела 4 и 5, извършват равнинно движение. Масовите им центрове имат скорости, еднакви със

скоростта  $V_1 \equiv dx_1/dt$  на тяло 1, защото се задвижват непосредствено от преместването на тяло 1.

Въвеждаме следните означения за абсолютните ускорения на телата от разглежданата механична система:  $a_1 \equiv d^2x_1/dt^2 \equiv dV_1/dt$ ,  $a_2 \equiv d^2x_2/dt^2 \equiv dV_2/dt$ ,  $a_3 \equiv d^2x_3/dt^2 = a_2 + d^2\eta/dt^2 = a_2 - \omega^2\eta$ ,  $\varepsilon = a_1/r$ , където  $\varepsilon$  е ъгловото ускорение на колелата при условие, че се търкалят без приплъзване.



Фиг. 1. Механо-математичен модел на вибротот

За да съставим диференциалните уравнения на движение по метода на кинестатиката [10], разделяме механичната система на съставлящите я тела и въвеждаме: активните сили  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ ; реакциите  $N_j$ ,  $T_j$ ,  $j = 1, 2$ ; силите на взаимодействие между телата  $R_v$ ,  $v = 1, 2, 3$ ,  $F_k$ ,  $F_b$ ; инерционните сили  $\Phi_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, 5$ ; инерционните моменти  $M_{\delta}^{\Phi}$ ,  $\delta = 4, 5$ . Тук  $G_i = m_i g$  са теглата на телата;  $F_k = -k\xi$ ,  $\xi = x_2 - (x_1 + l_0)$  е мярката на еквивалентната еластична сила  $F_k$  с начална стойност  $F_k(0) = k(s_0 - l_0)$ ,  $s_0 \equiv x_2(0)$ ;  $F_b = -b|V_2 - V_1|\sigma$  – мярката на резултантната дисипативна сила  $F_b$ ,  $\sigma \equiv \text{sign}(V_2 - V_1)$  – функцията на Кронекер;  $\Phi_l = -m_l a_l$  и  $M_{\delta}^{\Phi} = -(m_{\delta} r/2)a_1$  – Даламберовите инерционни сили и моменти.

В Таблица 1 са изобразени активните сили, реакциите, силите на взаимодействие между отделните тела и компонентите на динамите на инерционните сили, приложени на всяко тяло. Съгласно принципа на Даламбер, тези системи от сили са уравновесени. Неизвестни величини са мерките на реакциите  $R_1, R_2, R_3, P_1, P_2, P_3, P_4, N_1, T_1, N_2, T_2$  и ускоренията  $a_1, a_2$  (относно избраните им посоки), както и разстоянието  $l_3$ . От условията за равновесие определяме търсените величини:

$$a_1 = F_a / [m_1 + (3/2)(m_4 + m_5)], \quad a_2 = (m_3 \omega^2 \eta - F_a) / (m_2 + m_3),$$

$$a_3 = a_2 - \omega^2 \eta, \quad R_1 = -m_3 a_3, \quad R_2 = m_3 g, \quad R_3 = (m_2 + m_3) g,$$

$$l_3 = l_1 + \{m_3 [g(l_2 - l_1) - a_3 h_2] - F_a (h_3 - h_1)\} / (m_2 + m_3) g, \quad P_1 = (3/2) m_4 a_1,$$

$$(1) \quad P_2 = \{-F_a h_4 + [(m_2 + m_3)(d_1 - d_3) + m_1(d_1 - d_2)]g - m_1 a_1 h_5\} / d_1, \quad P_3 = (3/2)m_5 a_1,$$

$$P_4 = \{F_a h_4 + [(m_2 + m_3)d_3 + m_1 d_2]g + m_1 a_1 h_5\} / d_1,$$

$$N_1 = m_4 g + \{-F_a h_4 + [(m_2 + m_3)(d_1 - d_3) + m_1(d_1 - d_2)]g - m_1 a_1 h_5\} / d_1,$$

$$T_1 = (1/2)m_4 a_1, \quad T_2 = (1/2)m_5 a_1,$$

$$N_2 = m_5 g + \{F_a h_4 + [(m_2 + m_3)d_3 + m_1 d_2]g + m_1 a_1 h_5\} / d_1,$$

където  $F_a = k(x_2 - x_1 - l_0) + b|V_2 - V_1|\sigma$ .

Таблица 1. Схеми на приложените активни, реактивни и инерционни сили

Тяло	Сили
Тяло 3	<p>Diagram of body 3 showing forces <math>R_1</math> (up), <math>R_2</math> (down), <math>R_3</math> (left), <math>G_3</math> (down), <math>a_3</math> (right), and rotation <math>\Phi_3</math> (counter-clockwise).</p>
Тяло 2	<p>Diagram of body 2 showing forces <math>F_k</math> (left), <math>F_b</math> (right), <math>R_1</math> (up), <math>R_2</math> (down), <math>R_3</math> (up), <math>G_2</math> (down), <math>a_2</math> (right), and rotation <math>\Phi_2</math> (counter-clockwise). Dimensions <math>l_1, l_2, l_3, h_1, h_2, h_3</math> are indicated.</p>
Тяло 1	<p>Diagram of body 1 showing forces <math>F_k</math> (left), <math>F_b</math> (right), <math>P_1</math> (left), <math>P_2</math> (right), <math>P_3</math> (left), <math>P_4</math> (right), <math>R_3</math> (down), <math>G_1</math> (down), <math>a_1</math> (right), and rotation <math>\Phi_1</math> (counter-clockwise). Points A and B are marked. Dimensions <math>d_1, d_2, d_3, d_4, h_4, h_5</math> are indicated.</p>
Тела 4, 5	<p>Diagrams of bodies 4 and 5. Body 4 shows forces <math>P_2</math> (up), <math>T_1</math> (left), <math>N_1</math> (up), <math>G_4</math> (down), <math>a_1</math> (right), and rotation <math>\Phi_4</math> (counter-clockwise). Body 5 shows forces <math>P_4</math> (up), <math>T_2</math> (left), <math>N_2</math> (up), <math>G_5</math> (down), <math>a_1</math> (right), and rotation <math>\Phi_5</math> (counter-clockwise). Radius <math>r</math> is indicated.</p>

Диференциалните уравнения с начални условия на движението на разглежданата механична система имат вида

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= V_1, \quad x_1(0) = 0, \\ (2) \quad dV_1/dt &= [k(x_2 - x_1 - l_0) + b|V_2 - V_1|\sigma] / [m_1 + (3/2)(m_4 + m_5)], \quad V_1(0) = 0, \\ dx_2/dt &= V_2, \quad x_2(0) = s_0, \\ dV_2/dt &= m_3\omega^2\rho \sin(\omega t + \phi_0) - [k(x_2 - x_1 - l_0) + b|V_2 - V_1|\sigma] / (m_2 + m_3), \quad V_2(0) = 0, \end{aligned}$$

където:

$$(3) \quad V_1 = V_1(t), \text{ при } V_1(t) > 0; \quad V_1 = 0, \text{ при } V_1(t) \leq 0.$$

Условията (3) за еднопосочно движение на колелката се осъществяват с помощта на вградени еднопосочни ролкови лагери в главините на колелата, които разрешават движение напред и блокират въртенето в противоположна посока.

Моделът (1)-(3) има физически смисъл ако за всеки момент  $t$  е изпълнено условието за непрекъснат контакт между колелата и опорната равнина  $N_j^\circ = \min_t N_j(t) > 0, j = 1, 2$ . При отсъствие на приплъзване на кое да е колело, силите на триене между него и опорната равнина са по-малки или равни на граничната стойност на съответната сила на триене  $T_j \leq \mu_0 N_j^\circ$ , където  $\mu_0$  е статичният коефициент на триене. По-нататък приемаме, че при установено движение на вибробота тези условия са изпълнени.

Механичното съвършенство на вибробота може да се оценява с разнообразни критерии [1]. Основен показател за оценка в кинематичен аспект на еднопосочното движение на вибробота е средната му скорост в зададен времеви интервал

$$(4) \quad \langle V_1 \rangle = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} V_1(t) dt,$$

където  $V_1(t)$  удовлетворява условието (3).

За оценяване на динамичната напрегнатост в интервала  $t \in [t_0, t_f]$ ,  $t_0 > 0$  с установено движение може да се използва осреднената стойност

$$(5) \quad \langle K \rangle = \langle P_1(t) + P_3(t) \rangle^+ / \langle R_1(t) \rangle^+,$$

на приложената върху колелата хоризонтална резултантна движеща сила към задвижващата инерционна сила в моментите  $t$ , за които  $P_1(t) + P_3(t) > 0$  и  $R_1(t) > 0$ .

## РЕЗУЛТАТИ ОТ ЧИСЛЕН ЕКСПЕРИМЕНТ

Моделът (1)-(5) позволява да се симулират основни кинематични и динамични характеристики на разглеждания вибробот, както и да се анализира влиянието на изменението на параметрите на модела върху тях.

Проведен е числен експеримент с номинални стойности на параметрите на модела (1)-(3) от [9], представени в Таблица 2. За числено интегриране на диференциалните уравнения (2), (3) в интервала  $t \in [0, t_f]$  е използвана MATLAB-програмата ode113 с относителна точност  $10^{-6}$  и абсолютна точност  $10^{-8}$ .

На фиг. 2 са изобразени симулираните основни кинематични характеристики на вибробота: преместванията, скоростите и ускоренията при постъпателно движение на телата с маси  $m_1, m_2$  и  $m_3$ .

Функциите  $x_1(t), v_1(t), a_1(t)$  имат в установен режим на движение на вибробота периодичен характер на изменение, което обуславя неговото неравномерно движение. Знакопроменливото изменение на ускоренията  $a_3(t), a_2(t), a_1(t)$  е специфична особеност на вибрационно задвижваните работи (фиг. 2с). То прави невъзможно реализирането на равномерно изменение на ускорението  $a_1(t)$ . Постигането на максимално възможна асиметрия на функциите  $a_3(t)$  и  $a_1(t)$  е осъществимо с помощ-

та на програмно управляван задвижващ механизъм при специален клас колесни работи – т.н. инерцоиди [2].

Хоризонталните компоненти на реакциите в лагерите на колелата се изменят синфазно (фиг. 2d), а вертикалните – противофазно, като натоварването на лагерите на задните колела е по-голямо от натоварването в предните (фиг. 2d,e). По аналогичен начин, с точност до постоянна величина, се изменят и компонентите на реакциите на опорната равнина в точките D и E от телата 4 и 5.

Фигурата 2f илюстрира изменението на отношенията  $\mu_1 = |T_1(t)/N_1(t)|$ ,  $\mu_2 = |T_2(t)/N_2(t)|$  като функции на времето. Стойностите на тези величини са значително по-малки от реалните стойности на коефициента на статично триене  $\mu_0 \in [0.35, 0.75]$ , установен експериментално с помощта на прототипа на разглеждания вибробот за опорни повърхнини с различна грапавост. Това гарантира движение без приплъзване на колелата.

Таблица 2. Параметри на модела

Означение	Стойност	Изм. единица	Означение	Стойност	Изм. единица
$l_0$	0.045	m	$h_5$	0.019	m
$l_1$	0.012	m	$\rho$	0.0125	m
$l_2$	0.040	m	$r$	0.038	m
$l_3$	изчисляем	m	$m_1$	1.500	kg
$s_0 \equiv x_2(0)$	0.060	m	$m_2$	1.165	kg
$d_1$	0.200	m	$m_3$	0.120	kg
$d_2$	0.099	m	$m_4$	0.240	kg
$d_3$	$d_3 = l_3 + 0.06$	m	$m_5$	0.160	kg
$d_4$	0.050	m	$\omega$	40.19	rad/s
$h_1$	0.035	m	$k$	2123	N/m
$h_2$	0.015	m	$b$	6.215	Ns/m
$h_3$	0.014	m	$\varphi_0$	0	rad
$h_4$	0.004	m	$t_f$	4	s

Съвместното влияние на изменението на всеки два параметъра на модела в интервалите  $\phi_0 \in [0, 360]^\circ$ ,  $s_0 \in [0, 0.1]$  m,  $\omega \in [30, 80]$  rad/s,  $b \in [5, 25]$  Ns/m,  $k \in [1000, 4000]$  N/m върху средната скорост  $\langle V_1 \rangle$  на движение на вибробота е показано на фиг. 3.

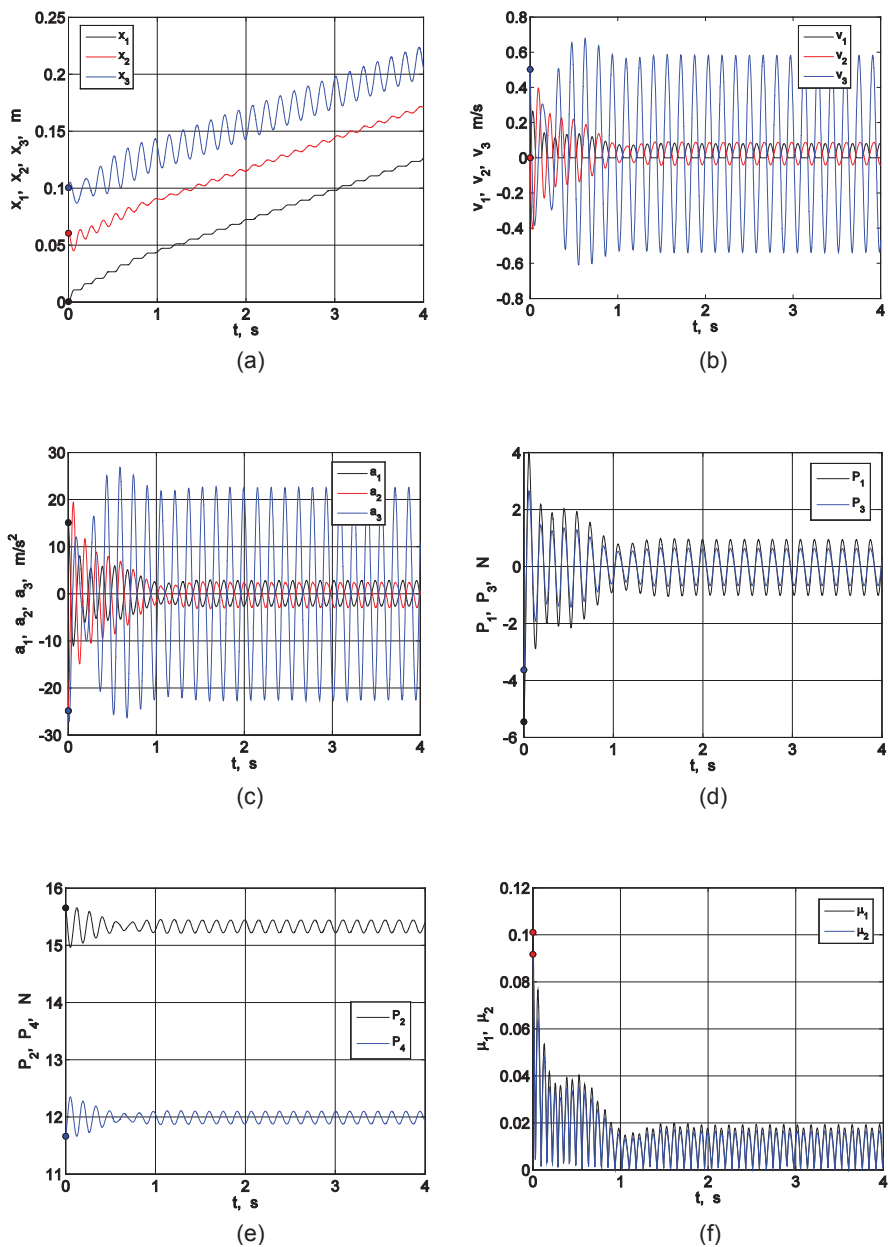
Фигурата 3а обосновава необходимостта от съгласуван избор на стойностите на параметрите  $\omega$  и  $k$  за функциониране на виброзадвижващия механизъм в околност на основния резонанс.

От фигурите 3(b,c,d,e) установяваме, че предварителното деформиране на еквивалентната пружина при изменение на параметъра  $s_0$  може ограничено да увеличи средната скорост на движение.

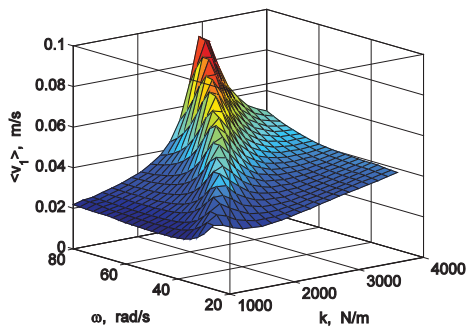
Фигурите 3(b,f,g,j) илюстрират специфична особеност на вибрационното задвижване на вибробота – средната скорост  $\langle V_1 \rangle$  е силно чувствителна към изменение на началната фаза  $\phi_0$ . По тази причина в началото на движението трябва да се осигурява близка до най-благоприятната стойност на  $\phi_0$ .

Нелинейният характер на изменение на функцията  $\langle V_1 \rangle$  разкрива потенциална възможност за интензивно нарастване на средната скорост при намаляване на дисипацията на енергия в задвижващия механизъм (фиг. 3(e,h,i,j)).

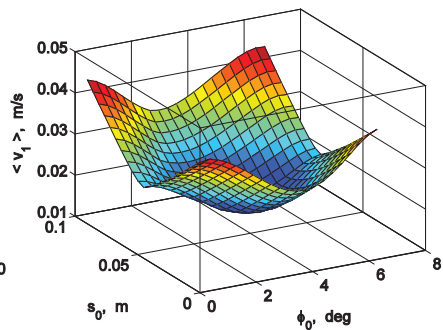
Изменението на показателя за динамична напрегнатост  $\langle K \rangle$  при съвместно вариране на параметрите  $\omega$  и  $k$  е показано на фиг. 4. Функцията  $\langle K(\omega,k) \rangle$  е многоекстремална със стръмни възвишения по хребет, който е характерен и за по-плавно изменящата се функция  $\langle V_1(\omega,k) \rangle$  на фиг. 3а. Изборът на рационални стойности на параметрите  $\omega$  и  $k$  трябва да се основава на достигане на компромисно съгласувани стойности на показателите (4) и (5).



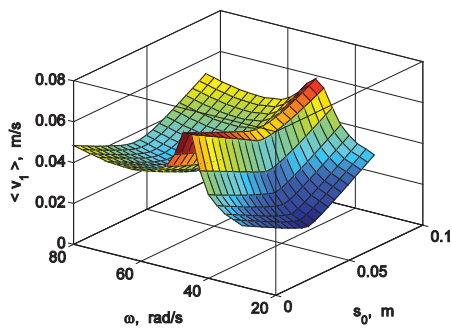
Фиг. 2. Симулирани кинематични и динамични характеристики



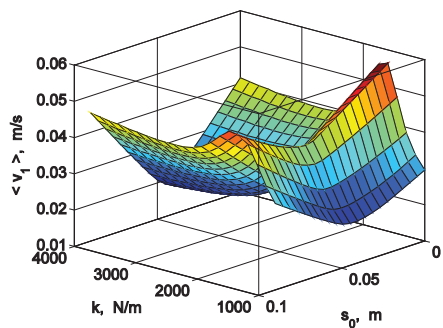
(a)



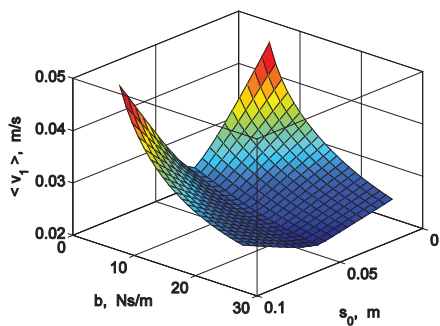
(b)



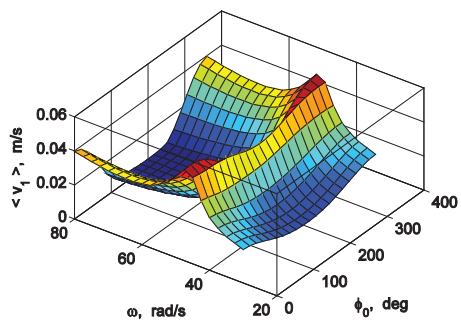
(c)



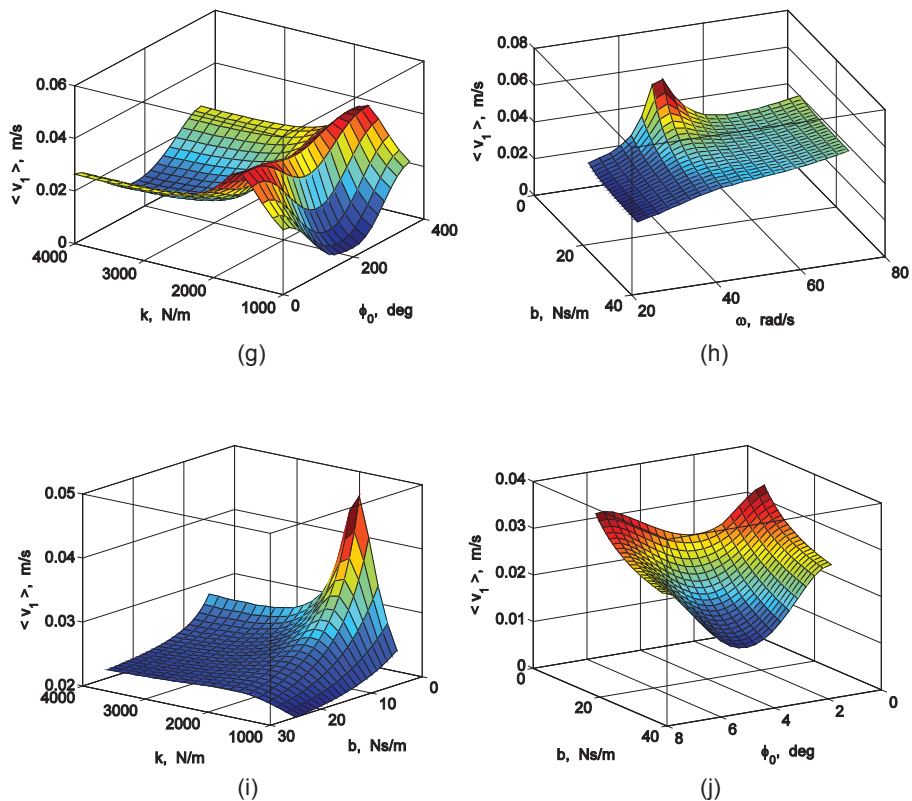
(d)



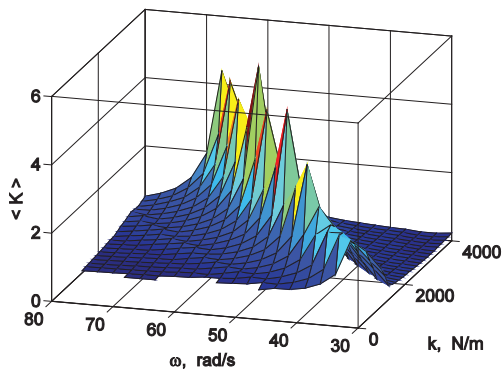
(e)



(f)



Фиг. 3. Изменение на средната скорост на виброта като функция на два параметъра



Фиг. 4. Изменение на показателя  $\langle K \rangle$  като функция на параметрите  $\omega$  и  $k$



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резултатите от проведения числен експеримент с предложени модел на вибробот разкриват силна чувствителност на средната скорост на движение към изменението на предварителната напрегнатост на еквивалентната пружина, началната фаза на периодичното движение на неуравновесените маси и дисипацията на енергия в задвижващия механизъм. Пасивният характер на задвижване на колелата на вибробота осигурява търкаляне без приплъзване по повърхнини с различна грапавост. Резонансният режим на виброзадвижване е най-благоприятен за постигане на максимална средна скорост на движение, но е съпроводен от завишена динамична напрегнатост на елементите на механичната система.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горский, Б.Е. Динамическое совершенствование механических систем. Техника, Киев, 1987.
- [2] Толчин, В.Н. Инерциод. Силы инерции как источник поступательного движения. Пермское книжное издательство, Пермь, 1977.
- [3] Blekhnman, I.I. Vibrational Mechanics: Nonlinear dynamic effects, General approach, Applications. World Scientific, Singapore, 2000.
- [4] Bolotnik, N., I. Zeidis, K. Zimmermann, S. Yatsun. Vibration-driven robots. 56th International Scientific Colloquium. Ilmenau University of Technology, 2011.
- [5] Jatsun, S., N. Bolotnik, K. Zimmerman, I. Zeidis. Modeling of motion of vibrating robots. 12-th IFToMM World Congress, Besançon, France, (6 pages), 2007.
- [6] Jatsun, S., V. Dyshenko, A. Yatsun, A. Malchikov. Modelling of robot's motion by use of vibration of internal masses. Proceedings of EUCOMES 08, The Second European Conference on Mechanism Science. M. Ceccarelli (Ed.), Springer, New York, 262–270, 2009.
- [7] Loukanov, I.A. Applications of inertial forces for generating unidirectional motion. Proceedings on University of Rouse. Vol. 53, Book 2: Mechanics, Mechanical and Manufacturing Engineering, 9–19, 2014.
- [8] Loukanov, I.A. Inertial propulsion of a mobile robot. IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering, Vol. 12, No. 2, 23–33, 2015.
- [9] Loukanov, I.A., V.G. Vitliemov, I.V. Ivanov. Vector identification of forced characteristics of a VibroBot, 2015 (sent for publication).
- [10] Meriam, J.L., L.G. Kraige. Engineering Mechanics. Vol. 2. Dynamics. John Wiley & Sons, New York, 2012.
- [11] Provatidis, C.G. Design of a propulsion cycle for endless sliding on friction ground using rotating masses. Universal Journal of Mechanical Engineering, Vol. 2, No. 2, 35–43, 2014.

## За контакти:

Доц. д-р инж. Иван Антонов Луканов, Катедра „Машинно инженерство“,  
Университет на Ботсвана, Габороне, Ботсвана. тел.: +267 3554356, e-mail:  
loukanov@moripi.ub.bw

Доц. д-р инж.-мат. Венко Георгиев Витлиемов, Катедра “Техническа механика”,  
Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 622, e-mail: venvit@uni-ruse.bg

Доц. д-р инж. Ивелин Великов Иванов, Катедра “Техническа механика”,  
Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 472, e-mail: ivivanov@uni-ruse.bg

**Докладът е рецензиран.**