

## Свободни незатихващи пространствени трептения на несиметрично твърдо тяло върху еластична основа

Анастас Иванов

*A Free three-dimensional vibrations of a nonsymmetrical rigid body on an elastic ground: This paper describes a free three-dimensional vibrations of a nonsymmetrical rigid body on an elastic ground. The body has six degree of freedom. The elastic ground by three coefficients of elasticity is determined. A system of differential equations, which are described the small vibrations, are obtained. These equations are solved by program of MATLAB.*

**Key words:** free vibrations, rigid body, elastic ground, dynamics.

### ВЪВЕДЕНИЕ

Към настоящия момент линейната теория на трептенията на механични системи е достатъчно структурно и методологично развита, например в [1, 2, 6]. По отношение на приложенията ѝ, обаче, все още се налага да се формулират и решават специфични моделни инженерни задачи, които изискват обобщена трактовка. Такъв пример е изследването на пространствените трептения на несиметрично твърдо тяло с произволна форма върху хоризонтална неподвижна еластична основа.

От курса по Теоретична механика [6] е известно, че свободните трептения биват незатихващи и затихващи. Обикновено изучаването на незатихващите трептения не създава особени затруднения от физически и математически характер [1, 2, 6]. Когато се изследват свободните затихващи трептения, обаче, ситуацията е много по-сложна. Тя се дължи на по-трудното идентифициране на дисипацията в системата, особено ако тя е от вътрешно триене, а не от обособени гасители. Тези трептения се решават и със сравнително по-сложен математически апарат. Усложнения в изследванията и на двата вида трептения могат да възникнат, ако в моделите се внесе нелинейност от геометрично и/или физично естество.

Когато се изследват вибрации с малки амплитуди и големи честоти, свободните незатихващи трептения имат основополагащо значение. Това е така, защото ако затихването на периодичното движение в малък (от порядъка на няколко секунди) времеви интервал на изследването е слабо, то може да се пренебрегне. Същото се отнася и за споменатите два вида нелинейности. При анализиране на размаха на т.н. „малки трептения“ в неголям работен диапазон, посочените усложнения, които биха компрометирали използването на линеен модел не могат да проявят напълно своето влияние.

Трябва да се има предвид, че единствено чрез изследване на свободните незатихващи трептения могат да се определят собствените честоти и собствените форми, без които е немислимо по-нататъшно изучаване на периодичното движение на тялото. Чрез собствените вектори и модалната матрица системата диференциални уравнения може да се декомпозира и да се премине в решаване на независими уравнения в главни координати. Така се улеснява моделирането, решаването и анализирването на процеса на затихване, особено за строителни конструкции, при които дисипацията се дължи предимно на вътрешното триене в материала [2].

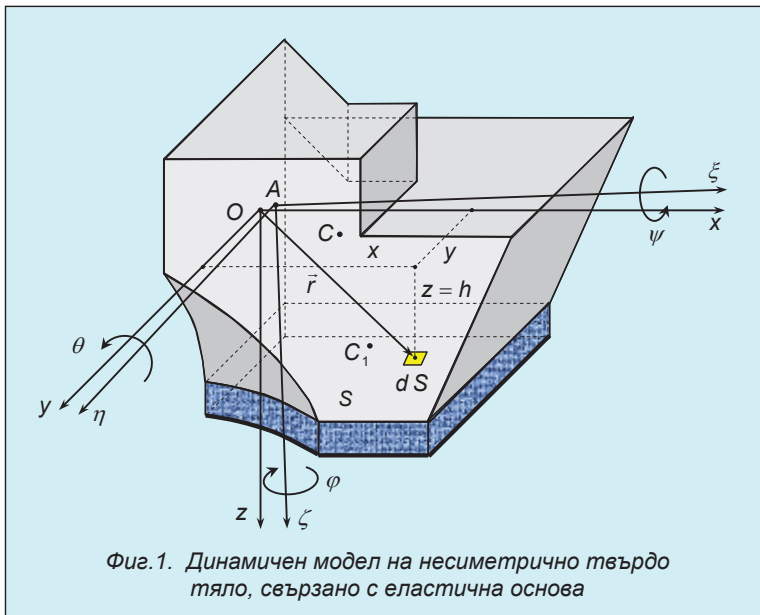
### ДИНАМИЧЕН МОДЕЛ

Разглежда се идеално твърдо тяло с маса  $m$  и произволна форма. В избран полюс  $O$ , се въвежда неподвижна координатна система  $Oxuz$  и свързана с тялото подвижна координатна система  $A\xi\eta\zeta$ ,  $A \equiv O$ . В началния момент осите на двете координатни системи съвпадат. Тялото извършва малки трептения около началното равновесно положение. Законът на движение на тялото се задава със следния вектор на независимите обобщени координати

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(t) = \langle x_A(t) \ y_A(t) \ z_A(t) \ \psi(t) \ \theta(t) \ \varphi(t) \rangle^T, \quad (1)$$

където  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  и  $\varphi(t)$  са т.н. Карданови ъгли [3].

Тялото е свързано двустранно с еластична основа, която има коефициенти на еластичност  $c_x$ ,  $c_y$  и  $c_z$  [N/m<sup>3</sup>]. Контактът на тялото с нея е ограничен в равнинна фигура с площ  $S$  [m<sup>2</sup>]. В устойчивото равновесно положение на разглежданата механична система се приема че тази равнина е хоризонтална и отстои от равнината  $Oxy$  на разстояние  $z = h$ . Масовият център на тялото е точка  $C$ , която в общия случай не съвпада с полюса  $O$ . Точката  $C_1$  е център на тежестта на фигурата, очертаваща контактната зона (Фиг.1).



### ИЗСЛЕДВАНЕ НА ТРЕПЕНИЯТА

Системата диференциални уравнения, описващи малките свободни незатихващи трептения има вида

$$\mathbf{A} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

където  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{J} \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & m \cdot z_C & (-m \cdot y_C) \\ 0 & m & 0 & (-m \cdot z_C) & 0 & m \cdot x_C \\ 0 & 0 & m & m \cdot y_C & (-m \cdot x_C) & 0 \\ 0 & (-m \cdot z_C) & m \cdot y_C & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ m \cdot z_C & 0 & (-m \cdot x_C) & -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ (-m \cdot y_C) & m \cdot x_C & 0 & -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}, \quad (3)$$

е матрицата на масовите и инерционни характеристики.

Матрицата на еластичните характеристики (матрицата на коравина) има вида

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x \cdot A & 0 & 0 & 0 & c_x \cdot h \cdot A & (-c_x \cdot y_{C_1} \cdot A) \\ 0 & c_y \cdot A & 0 & (-c_y \cdot h \cdot A) & 0 & c_y \cdot x_{C_1} \cdot A \\ 0 & 0 & c_z \cdot A & c_z \cdot y_{C_1} \cdot A & (-c_x \cdot x_{C_1} \cdot A) & 0 \\ 0 & (-c_y \cdot h \cdot A) & c_z \cdot y_{C_1} \cdot A & c_y \cdot h^2 \cdot A + c_z \cdot I_x & (-c_z \cdot I_{xy}) & (-c_y \cdot x_{C_1} \cdot h \cdot A) \\ c_x \cdot h \cdot A & 0 & (-c_x \cdot x_{C_1} \cdot A) & (-c_z \cdot I_{yx}) & c_x \cdot h^2 \cdot A + c_z \cdot I_y & (-c_x \cdot y_{C_1} \cdot h \cdot A) \\ (-c_x \cdot y_{C_1} \cdot A) & c_y \cdot x_{C_1} \cdot A & 0 & (-c_y \cdot h \cdot x_{C_1} \cdot A) & (-c_x \cdot h \cdot y_{C_1} \cdot A) & c_y \cdot I_y + c_x \cdot I_x \end{bmatrix} \quad (4)$$

Собствените кръгови честоти се определят от уравнението на честотите

$$\Delta(\omega^2) = \det(\mathbf{C} - \omega^2 \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (5)$$

Спектърът на честотите е от вида:  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_5 < \omega_6$ .

Собствените вектори на формата

$$\bar{\mathbf{u}}_k = \langle u_{1k} \ u_{2k} \ u_{3k} \ u_{4k} \ u_{5k} \ u_{6k} \rangle^T, \quad (k = 1, 2, \dots, 6), \quad (6)$$

се определят от хомогенните системи алгебрични уравнения

$$(\mathbf{C} - \omega_k^2 \cdot \mathbf{A}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{0}, \quad (k = 1, 2, \dots, 6). \quad (7)$$

Ортогоналността на собствените вектори се проверява с равенствата:

$$\bar{\mathbf{u}}_j^T \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k = 0, \quad \bar{\mathbf{u}}_j^T \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k = 0, \quad (j, k = 1, 2, \dots, 6; j \neq k). \quad (8)$$

Законите на движение, при начални положения  $\bar{\mathbf{q}}_0$  и начални скорости  $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_0$ , са

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \sum_{k=1}^6 \frac{\bar{\mathbf{u}}_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k^T \cdot \mathbf{A}}{\bar{\mathbf{u}}_k^T \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k} \cdot \left( \bar{\mathbf{q}}_0 \cdot \cos \omega_k \cdot t + \frac{\dot{\bar{\mathbf{q}}}_0}{\omega_k} \cdot \sin \omega_k \cdot t \right). \quad (9)$$

Те могат да се представят и във вида

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \sum_{k=1}^6 B_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k \cdot \sin(\omega_k \cdot t + \lambda_k), \quad (10)$$

$$\text{където: } B_k = \sqrt{H_k^2 + G_k^2}, \quad \lambda_k = \arctg \frac{H_k}{G_k}, \quad (11)$$

$$H_k = \frac{\bar{\mathbf{q}}_0^T \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k}{\bar{\mathbf{u}}_k^T \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_k^T \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{q}}_0}{\bar{\mathbf{u}}_k^T \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k}, \quad (12)$$

$$G_k = \frac{\dot{\bar{\mathbf{q}}}_0^T \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k}{\omega_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k^T \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_k^T \cdot \mathbf{A} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}}_0}{\omega_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k^T \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, 6). \quad (13)$$

Изследването на трептенията може да се проведе по няколко начина.

**Първи начин.** Решаване с просто изчислително средство, например научен калкулатор. Изчисленията се провеждат по формулите от (1) до (13). Известно затруднение може да възникне при решаването на уравнението на честотите (5). За него може да се използва итерационен метод (например на Нютон). Обикновено резултатите не се визуализират.

**Втори начин.** Изчисленията по формулите (1) – (13) се провеждат, например в програмната среда на MATLAB [4]. Резултатите могат лесно да се визуализират.

**Трети начин.** Числено решение. Такова решение е свойствено предимно за

нелинейни задачи. В случая системата е линейна и на пръв поглед не е необходимо да се прибягва до такова изследване. Независимо от това, обичайно е инженерите и изследователите да го предпочитат, защото могат лесно да променят входните данни и бързо да визуализират крайните резултати. Такова решение допуска и провеждане на оптимизация на определен брой параметри с оглед получаване на желани резултати [5].

Трябва да се има в предвид, че вградените модули в математическите пакети на Mathematica, Maple, MuPAD, MathCAD, MATLAB и др., които решават задачата за намиране на собствените честоти и собствените вектори на формата, и впоследствие интегрират системата линейни диференциални уравнения, изискват тя да се приведе в каноничен вид

$$\dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{y}}(t), \quad (14)$$

където 
$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \left\langle \bar{\mathbf{q}}(t)^T \quad \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t)^T \right\rangle^T \quad (15)$$

е нов вектор (матрица стълб) с размерност  $12 \times 1$ , а матрицата  $\mathbf{B}$  е

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{12 \times 12}. \quad (16)$$

Тогава уравнението на честотите (5) приема вида

$$\Delta_1(p) = \det(\mathbf{B} - p \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (17)$$

където: 
$$\mathbf{I} = \text{diag}[1]_6, \quad \mathbf{E} = \text{diag}[1]_{12}, \quad (18)$$

са единични матрици с размерности, съответно  $6 \times 6$  и  $12 \times 12$ . В този случай собствените числа  $p_k$  са двойка комплексно спрегнати от вида

$$p_k = 0 \pm \omega_k \cdot i, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (19)$$

От тях се извличат собствените кръгови честоти  $\omega_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ).

Собствените вектори на формата  $\bar{\mathbf{u}}_k$  се съдържат в комплексно спрегнатите собствени вектори  $\bar{\mathbf{r}}_k$ . Последните се получават след решаване на хомогенната система алгебрични уравнения

$$(\mathbf{B} - p_k \cdot \mathbf{E}) \cdot \bar{\mathbf{r}}_k = 0 \quad (20)$$

и имат вида

$$\bar{\mathbf{r}}_k = \bar{\mathbf{u}}_k \pm 0 \cdot i, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (21)$$

### ПРИМЕР

Числено е решен пример при следните стойности на параметрите на несиметричното твърдо тяло и еластичната основа:

$$\begin{aligned} m &= 500 \text{ kg}, J_x = 540 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_y = 380 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_z = 430 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_{xy} = 35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ J_{xz} &= 45 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_{yz} = -53 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, x_c = 0,24 \text{ m}, y_c = -0,15 \text{ m}, z_c = 0,33 \text{ m}, \\ S &= 4 \text{ m}^2, c_x = 1100 \text{ N/m}^3, c_y = 1200 \text{ N/m}^3, c_z = 2500 \text{ N/m}^3, h = 1 \text{ m}, \\ I_x &= 1,5 \text{ m}^4, I_y = 1,2 \text{ m}^4, I_{xy} = 0,25 \text{ m}^4, x_{c_1} = 0,30 \text{ m}, y_{c_1} = -0,25 \text{ m}. \end{aligned}$$

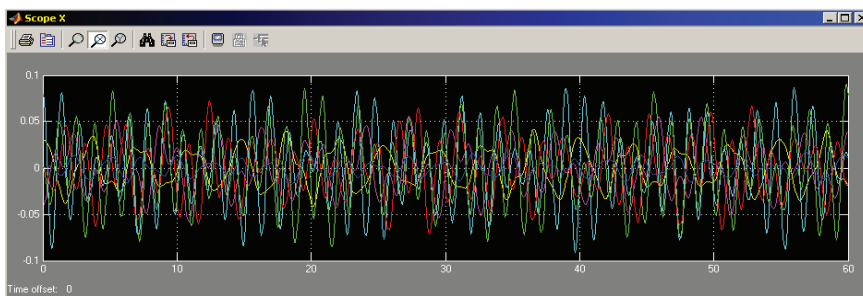
Съставена е MATLAB-програма, с която са получени следните резултати.

Собствените кръгови честоти в  $[\text{s}^{-1}]$  са:  $\omega_1 = 1,7209$ ,  $\omega_2 = 2,0520$ ,  
 $\omega_3 = 2,5343$ ,  $\omega_4 = 4,0376$ ,  $\omega_5 = 4,3601$ ,  $\omega_6 = 4,8278$ .

Собствени вектори на формата:

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 0,8429 \\ 0,5362 \\ 2,6388 \\ 1 \\ 0,5947 \\ 10,371 \end{bmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} -1,6430 \\ -0,6086 \\ 2,3268 \\ -0,2218 \\ 1 \\ -63,334 \end{bmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 6,4920 \\ -0,5280 \\ 0,2631 \\ -0,1134 \\ -0,0212 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{u}_4 = \begin{bmatrix} 0,1301 \\ 0,0923 \\ 1 \\ 0,8212 \\ -0,5317 \\ -61,941 \end{bmatrix}, \bar{u}_5 = \begin{bmatrix} -0,7504 \\ 1 \\ 3,3416 \\ -0,6122 \\ -0,2064 \\ -1,6420 \end{bmatrix}, \bar{u}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,1734 \\ -3,2007 \\ -0,0988 \\ 0,2486 \\ -4,9259 \end{bmatrix}.$$

Резултатът в графичен вид от численото интегриране на системата диференциални уравнения (14) в интервал  $t \in [0, 60]$ , [s], при начално положение на тялото  $\bar{q}(0) = \langle 0,03 \quad -0,04 \quad 0,08 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle^T$  и нулева начална скорост има вида:



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено е методологично описание на решаването на обобщена линейна моделна задача за изследване на малките пространствени свободни незатихващи трептения на твърдо тяло с произволна форма, двустранно свързано с неподвижна хоризонтална еластична основа.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Tse, F., I. Morse, R. Hinkle. Mechanical Vibrations. Allyn and Bacon, Boston, 1963.
- [2] Иванов, А.И. Динамика на строителните конструкции. Авангард прима, София, 2010.
- [3] Иванов, А.И. Теоретична механика. Кинематика в матрична форма. Авангард прима, София, 2012.
- [4] Йорданов, Й.Т. Приложение на MATLAB в инженерните изследвания. Части I–III, РУ „А.Кънчев“, Русе, 2010.
- [5] Йорданов, Й.Т., В.Г. Витлиев. Оптимизация с MATLAB. Прагматичен подход. РУ „А.Кънчев“, Русе, 2013.
- [6] Яблонский, А.А., С.С. Норейко. Курс теории колебаний. Лань, Санкт-Петербург, 2003.

## За контакти:

доц. д-р инж. Анастас Иванов Иванов, Катедра “Механика”, ВТУ „Тодор Каблешков“, тел.: 02 97 09 409, e-mail: aii2010@abv.bg.

Докладът е рецензиран.