

Динамичен модел на стенд за вибрационно изпитване на умора при случайно натоварване

Диян Димитров

Fatigue tests with random broadband spectrum loading can be provided on a vibration stand which is designed as a cantilever beam with two lumped masses excited by an electrodynamic shaker. In this paper dynamic model of the stand is described. Equations of motion are solved. Eigenvalues and eigenvectors for three different position and weight of the masses are calculated. As a result it is shown that if an input is a white noise, output is an broadband random signal with two maxima around eigenfrequencies of the system.

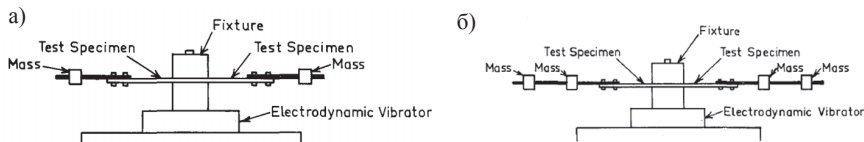
Key words: fatigue test, cantilever beam, dynamic modeling

ВЪВЕДЕНИЕ

Оценката на уморната дълготрайност е една от основните задачи при проектиране на конструкциите. Тази оценка се базира на кривата на Вюлер (S-N крива), получена при експериментално определяне на броя цикли до разрушаване за циклично натоварване с постоянна амплитуда. Реалните експлоатационни натоварвания на конструкциите в общия случай са нециклични. Нецикличното натоварване може да бъде детерминистично (закона на изменение на напреженията е известен) или случайно (вълново натоварване на морски конструкции, ветрово натоварване и др). При детерминистично натоварване се групират циклите с еднакви амплитуди, най-често по правилото на „дъждовния поток“ (rainflow rule) Случайното натоварване е случаен процес и се задава със спектралната си плътност $S_s(\omega)$ показваща разпределението на енергията по хармоници. Тъй като, липсва фазовия спектър от спектралната плътност може да се генерира множество реализации на случайния процес във времето. За намаляване на изчислителната работа в този случай са разработени методики базирани на връзката между хистограмата на разпределение на пиковите амплитуди и спектралните моменти. Методиките се различават в зависимост от лентата на спектъра (теснолентов и широколентов спектър).

За провеждане на експерименти при нециклично натоварване най-често се използва схема на натоварване „опън-натиск“ реализирана на хидравлични машини. При тези машини може да се реализира практически всеки закон на изменение на напреженията в образеца. Основният им недостатък е бавната скорост (около 10Hz), което предполага продължителни експерименти.

Изпитването може да се ускори ако се използват вибрационни методики. В [1,2,3] са показани методики за изпитване на конзолно закрепени греди върху електродинамичен актуатор, В [4] авторите използват образец с Y-форма. На фиг.1 е показано реализирано изпитване на тънки пластини при случайно натоварване с тясна и широка лента.



Фиг.1. Схеми на вибрационно изпитване на умора на тънки пластини [1]

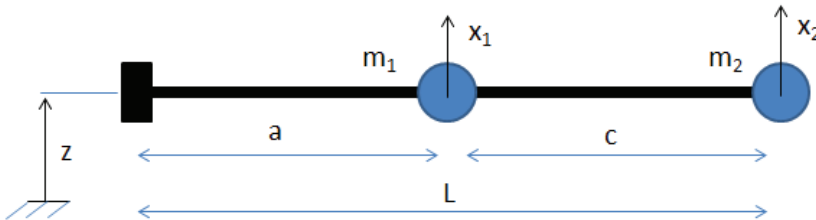
На база на досегашния опит на автора при провеждане на уморни изпитания [5,6], се дефинира и целта за създаване на стенд за реализиране на случайно натоварване със широлентов спектър използвайки схемата показана на фиг.1(б).

Първата стъпка, описана в настоящата публикация е създаване на динамичен модел.

ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Уравнения на движение

Моделираме стенда като безмасова конзолно закрепена греда с две съсредоточени маси поставена върху динамичен актуатор, *фиг.2*. Системата е с две степени на свобода. За обобщени координати са избрани преместванията на масите, съответно x_1 и x_2 , мерени от равновесното положение. При кинематично възбуждане в ролята на външно натоварване влизат инерционните сили.



Фиг.2.Динамичен модел на конзолна греда с две степени на свобода

Системата уравнения на движение записана в матрична форма е:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F(t) \quad (1)$$

,където

$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ -инерционна матрица; $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ -матрица на демпфиране;

$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$ - еластична матрица; $F(t) = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{z} \\ -m_2 \ddot{z} \end{Bmatrix}$ –вектор на външните сили при

кинематично възбуждане, а $\ddot{x} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}$, $\dot{x} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}$, $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ -вектори на ускорението, скоростта и преместването.

Максималният огъващ момент е в запънатото сечение. Така за максималната стойност на нормалното напрежение се получава:

$$\max \sigma = \frac{(m_1 \ddot{x}_1) \cdot a + (m_2 \ddot{x}_1) \cdot L}{W_y} \quad (2)$$

, където W_y -съпротивителен момент на сечението.

1.1.Собствени честоти и собствени форми

Премахваме демпфирането и външните сили от уравнение (1) и го представяме във вида (3). Собствените честоти и форми удовлетворяват матричното уравнение (4). Честотите се пресмятат като приравним детерминантата (5) на нула. На всяка от собствените честоти съответства вектор на собствените форми $V^{(j)}$ представляващ

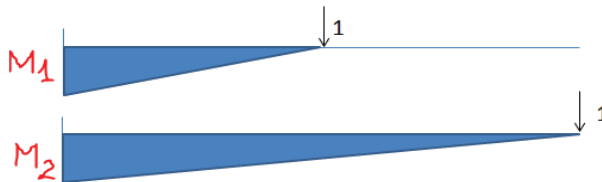
съотношението на амплитудите на преместването на двете маси при трептене със съответната собствена честота ω_n . Коефициентите на тези вектори v_{ij} се определят като зададем стойност 1 за единия от тях в уравнение (3) [7]

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (3)$$

$$(K - \omega_n^2 M)V = 0 \quad (4)$$

$$\det(K - \omega_n^2 M) = 0 \quad (5)$$

Коефициентите в еластичната матрица могат да се пресметнат след съставяне на матрицата на едничните податливости F и използване на връзката податливост-коравина ($K=F^{-1}$)[8]. Коефициентите в матрицата на податливост f_{ij} (6), представляващи преместване в точка i от единична сила приложена в точка j , се пресмятат лесно по метода на Максвел-Мор, като се преумножат диаграмите на огъващите моменти от единични сили, фиг.3 [9].



Фиг.3. Диаграми на огъващите моменти от единична фиктивна сила

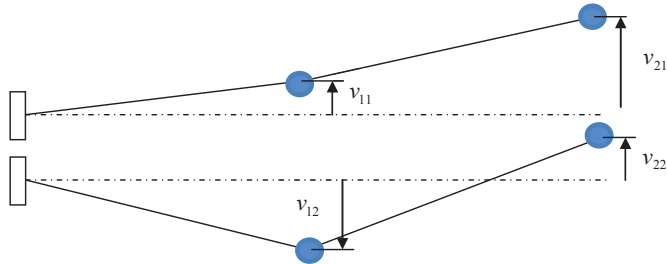
$$f_{11} = \frac{a^3}{3EI} ; f_{22} = \frac{l^3}{3EI} ; f_{12} = f_{21} = \frac{a^2(2l+c)}{6EI} \quad (6)$$

,където EI - обща коравина на огъване на гредата

Пресметнатите , еластична матрица, собствени честоти и вектори на собствените форми за три конкретни случая са показани в табл.1, а собствените форми са показани на фиг.4. Вижда се, че при първата собствена честота двете маси трептят във фаза, а при втората в противофаза. В основния случай (1-табл.1) при равни маси и равни разстояния между тях амплитудите на трепене на масите са в отношение около 3.

Таблица 1
Еластична матрица, собствени честоти и форми на конзолна гредка с две степени на свобода (фиг.2)

№	Параметри на системата	Еластична матрица , $K=F^{-1}$	Собствени честоти , $diag(\omega_n^2)$	Вектори на собствените форми $V = (v^{<1>} , v^{<2>})$
1	$a=l/2 ; c=l/2$ $m_1 = m ; m_2 = m$	$\frac{48EI}{7l^3} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{EI}{ml^3} \begin{pmatrix} 2,727 & 0 \\ 0 & 120,702 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,32 & -3,12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2	$a=l/2 ; c=l/2$ $m_1 = 2m ; m_2 = m$	$\frac{48EI}{7l^3} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{EI}{ml^3} \begin{pmatrix} 2,49 & 0 \\ 0 & 66,081 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,327 & -1,527 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3	$a=l/3 ; c=2l/3$ $m_1 = m ; m_2 = m$	$\frac{81EI}{11l^3} \begin{pmatrix} 27 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{EI}{ml^3} \begin{pmatrix} 2,935 & 0 \\ 0 & 203,247 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,15 & -6,65 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



Фиг.4. Собствени форми V на конзолна греда с две степени на свобода

1.2. Коефициенти на матрицата на демпфиране

Примемаме условие за пропорционалност на матрицата на демпфиране (7):

$$C = \alpha.M + \beta.K \quad (7)$$

, където коефициентите на пропорционалност α, β - се определят съгласно правилото на Рейли от системата уравнения (8):

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_1} & 2\omega_1 \\ \frac{1}{2\omega_2} & 2\omega_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (8)$$

,където ζ_j -модален безразмерен коефициент на демпфиране на съответната собствена форма.

Коефициентите ζ_j могат да се определят експериментално като се изследва затихването на свободните трептения при начални условия удовлетворяващи съответната форма.

1.3. Решение на уравненията на движение при хармонично възбуждане. Предавателни функции

Кинематичното възбуждане по хармоничен закон, съответно скорост и ускорение се представя във вида (9)

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}, \quad \dot{z}(t) = i\omega z_0 e^{i\omega t}, \quad \ddot{z}(t) = -\omega^2 z_0 e^{i\omega t} \quad (9)$$

,където z_0 - вектор на амплитудните стойности на вибропреместването на основата

Решението търсим във вида (10):

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t} \quad (10)$$

След заместване на (9) и (10) в уравненията на движение (1) разделяме от двете страни на $e^{i\omega t}$ получаваме (11)

$$[-\omega^2 M + i\omega C + K]x_0 = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \omega^2 z_0, \quad (11)$$

Записваме уравнения (11) по следния начин:

$$Z(i\omega).x_0 = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \omega^2 z_0 \quad (12)$$

, където матрицата $Z(i\omega) = [-\omega^2 M + i\omega C + K]$ - механичен импеданс на системата.

Решаваме системата уравнения (12) като умножим от ляво и дясно със Z^{-1} :

$$x_0 = H(i\omega) \cdot z_0$$

, където матрицата $H(i\omega) = Z(i\omega)^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \omega^2$ - матрица на

предавателните функции на системата

Частното решение на уравненията на движение представяме във вида (14):

$$x_i(t) = x_{0i} \cdot \cos(\omega t - \phi_i)$$

, където амплитудата е равна на $x_{0i} = (|H_{i1}| + |H_{i2}|)z_0$ а фазовият

$$\text{ъгъл } \phi_i = a \tan\left(\frac{\text{Im}(H_i)}{\text{Re}(H_i)}\right) \quad (14)$$

2. Числен пример

Приемаме следните стойности за входните параметри:

Параметри на системата:

$$a = 0,04m, c = 0,04m, m_1 = m_2 = 0,02kg$$

Напречно сечение и материал на гредата: $b = 0,010m, h = 0,0015m, E = 2,14 \cdot 10^{11} Pa$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}, W_y = \frac{b \cdot h^2}{6}, EI = 0,1783 Nm^2$$

Модално демпфиране (3%):

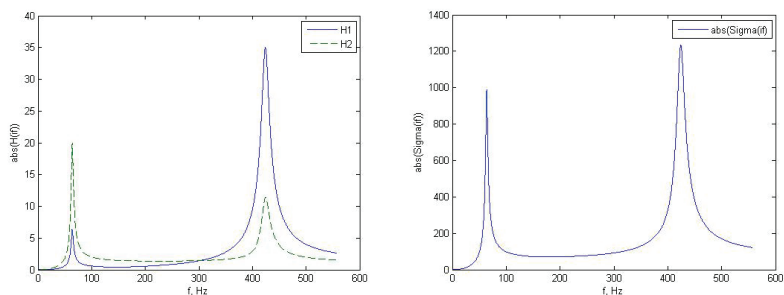
$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0,03$$

Определяме собствените честоти и форми (собствените честоти са дадени и в Hz $f = \omega/2\pi$), коефициентите на еластичната и матрицата на демпфирането. Предавателните функции $H_1 = H_{11} + H_{12}$; $H_2 = H_{21} + H_{22}$ и пресметнатото по (2) максимално напрежение при константно входно ускорение $a_z = 100m/s^2$ показани на *фиг. 5*.

$$f_1 = 63,72Hz, \omega_1 = 400,3Hz, K = \begin{pmatrix} 3,8214 & -1,1942 \\ -1,1942 & 0,4777 \end{pmatrix} 10^4, C = \begin{pmatrix} 0,9242 & -0,2124 \\ -0,2124 & 0,3296 \end{pmatrix}$$

Известно е [10], че ако входа на линейна система представлява случаен процес от типа „бял шум“ (константна спектрална плътност) изхода също е случаен процес чиито спектър е идентичен с предавателната функция на системата *фиг. 5* дясно, (15).

$$S_\sigma(\omega) = |H(i\omega)|^2 \cdot s_{a_z}(\omega) \quad (15)$$



Фиг.5. Предавателни функции на масите $H1_{x1/z}$ и $H2_{x2/z}$ (ляво) и предавателна функция на максималното напрежение $H_{\sigma/az}$ (дясно)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Съставен е динамичен модел на стенд за вибрационно изпитване на умора представляващ конзолна греда с две съсредоточени маси. Изведени са уравненията на движение. Пресметнати са собствените честоти и векторите на собствените форми за три случая на разположение и големина на масите. Пресметнати са предавателните функции на системата. Показано е, че ако входа е случаен процес тип „бял шум“ изхода е също случаен процес със спектър с широка лента, където максималните стойности са групирани в зоните на двете собствени честоти на системата.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът е финансиран от Технически университет –Варна в рамките на присъщата му научно-изследователска дейност по проект НП-17/2015

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jens Trampe Broch, Peak Distribution Effects in Random Load Fatigue, TECHNICAL REVIEW No. 1 — 1968
- [2] F. Just-Agosto, A. Peralta, B. Shafiq, D. Serrano, A vibration technique to obtain fatigue, Proceedings of ICCM-17 Edinburgh, Scotland July 27-31, 2009
- [3] E Allemang, Randall, E De Clerck, James, E Niezrecki, Christopher, E Wicks, Alfred, Vibration Fatigue Analysis of a Cantilever Beam Using Different Fatigue Theories, Topics in Modal Analysis, Volume 7, S Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, I Springer New York, 2014-01-01, pp 471-478
- [4] M.Česnik, J. Slavič and M.Boltežar, Uninterrupted and accelerated vibrational fatigue testing with simultaneous monitoring of the natural frequency and damping, Journal of Sound and Vibration, Vol. 331, Issue 24, 19 November 2012, Pages 5370–5382.
- [5] Diyan M. Dimitrov, Veselin Mihailov, Borislav Kostov, Modeling of Ultrasonic Fatigue-Life Testing Machine, Comsol Conference 2012, 10-12.2012, Milan, Italy
- [6] Димитров, Д.М. Чириков, В.А. Димитров, Ж., Изследване на уморната дълготрайност на тънки пластини от стомана 40x, Научни известия на НТСМ, Година XXIII, Брой 2 (165), Юни 2015, ISSN 1310-3946
- [7] Вибрации в техника: Справочник- т.1 Колебания линейных систем., 1978, 352с.
- [8] Федосиев, В.И., Сопротивление материалов, Москва, 1963, 539с.
- [9] В.Милков, Сопротивление на материалите, ТУ-Варна, 2001, 403стр.
- [10] Градинаров, П., Методи за обработка на експериментални данни, ТУ-Варна, 2008, 505с., ISBN 987-954-20-0436-3

За контакти:

Гл. ас. д-р инж. Диян Минков Димитров, катедра "Техническа механика", секция „Съпротивление на материалите“, ТУ-Варна, тел.: 052-383 287,
e-mail: dimitrov.diyana@gmail.com

Докладът е рецензиран.