Модифициран метод за синтез на сложни сигнали с малка стойност на отношението пикова – средна мощност с подобрена изчислителна ефективност

Михаил Илиев, Борислав Беджев, Светлин Василев

A Modified Method for Synthesis of Complex Signals with a Small Value of the Peak-to-Average Power Ratio and Improved Computational Efficiency: *A modified method for signal synthesis with a small PARP is proposed in the present paper. The presented method is applicable for groups of signals having length different from exact power of 2.*

Key words: *Signal synthesis, orthogonal frequency-division multiplexing - OFDM, peak-to-average power ratio – PAPR.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Синтезът на сложни сигнали с малка стойност на отношението пикова-средна мощност за ***OFDM*** системите е първостепенна задача на проектантите на високоскоростни системи за пренос. В [1] е обоснован общ метод за синтез на сигнали с малка стойност на отношението пикова-средна мощност, приложим за групи сигнали, чиято дължина ***N*** може да бъде точна степен на 2. Съществуват и други групи сигнали, чиято дължина ***N*** не е точна степен на 2:

- класически М-последователности (или последователности с максимална дължина - Maximal Length Sequences);
- последователности на квадратичните остатъци (или последователности на Лежандър);
- последователности на Якоби;
- последователности на Хол;
- последователности на Гордън-Милс-Уелч (***GMW*** sequences);
- М-последователности, с висока структурна сложност, генерирани по хипе0валната конструкция, по метода на Уелч - Гонг, по метода на Касами и др.

Цел на настоящият доклад е да се предложи модифициран вариант на общия метод за синтез на сигнали с малка стойност на отношението максимална към средна мощност, при което сигналите с неточна степен на 2 се трансформират в сигнали с дължина $N = 2^m$ без да се увеличава съществено съотношението на максималната към средната мощност.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Сигналите, чиято дължина ***N*** не е точна степен на 2, могат да се разделят на две подгрупи, както това е показано в Табл. 1, където $p, p_1, p_2 = p_1 + 2$ са прости числа, *n* е произволно цяло число, а q_{np} е максималната амплитуда страничните листа на ***ПАКФ***. Както се вижда, при $p = 2$ дължината ***N*** на сигналите от Подгрупа 2.1 се различава само с 1 от точна степен на 2. При сигналите от Подгрупа 2.2 дължината ***N*** се различава само с 1 от точна степен на 2 само за някои стойности на $p, p_1, p_2 = p_1 + 2$, които ще бъдат анализирани последователно.

Таблица 1. *Разделяне в две подгрупи на основните класове сигнали с почти идеална ПАКФ в зависимост от тяхната дължина N*

№	***Клас сигнали***	q_{np}	**N**
	Подгрупа 2.1		
1	Последователности с максимална дължина (М-последователности)	1	$p^n - 1$
2	Последователности на Гордън-Милс-Уелч (GMW sequences)	1	$p^n - 1$
3	М-последователности с висока структурна сложност, генерирани по методите на Уелч - Гонг, на Касами или чрез хиперовалната конструкция	1	$p^n - 1$
	Подгрупа 2.2		
4	Последователности на квадратичните остатъци (последователности на Лежандър)	1 3	$p \equiv 3 \bmod 4$ $p \equiv 1 \bmod 4$
5	Последователности на Якоби	1 3	$p_1 p_2$
6	Последователности на Хол	1	$p \equiv 3 \bmod 4$

1. Последователности на квадратичните остатъци (последователности на Лежандър) с $q_{np} = 1$ съществуват, ако p е просто число на Мерсен, т.е. при

$$N = p = 2^{p_1} - 1 \tag{1}$$

В интервала $[1,\ 10000]$ простите числа на Мерсен са:

$$3 = 2^2 - 1,\ 7 = 2^3 - 1,\ 31 = 2^5 - 1,\ 127 = 2^7 - 1,\ 8191 = 2^{13} - 1. \tag{2}$$

2. Последователности на квадратичните остатъци (последователности на Лежандър) с $q_{np} = 3$ съществуват, ако

$$N = p = 2^m + 1 \tag{3}$$

е просто число. Анализът показва, че числата от вида (3) могат да бъдат прости, само ако m няма нечетни делители, т.е. ако $m = 2^k$. В тази ситуация

$$N = p = 2^{2^k} + 1 \tag{4}$$

при което N е просто число на Ферма. В интервала $[1,\ 10000]$ простите числа на Ферма са:

$$3 = 2^{2^0} + 1,\ 5 = 2^{2^1} + 1,\ 17 = 2^{2^2} + 1,\ 257 = 2^{2^4} + 1 \tag{5}$$

3. Последователности на Якоби с $q_{np} = 1$ и дължина от вида $N = 2^m \pm 1$

съществуват, ако

$$N = p_1 p_2 = 2^{2m} - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1) \quad (6)$$

защото простите числа p_1, p_2 трябва да са близнаци (twin - primes), т.е. $p_2 = p_1 + 1$. В интервала $[1,\ 10000]$ на условието (6) отговаря само числото 15, тъй като:

$$15 = 3.5 \quad (7)$$

4. Последователности на Хол с $q_{np} = 1$ съществуват, ако

$$N = p = 4y^2 + 27 \equiv 3 \bmod 4 \quad (8)$$

е просто число. В интервала $[1,\ 10000]$ на условието (8) и на изискването $N = 2^m \pm 1$ отговарят само числата:

$$31 = 2^5 - 1 = 4.1^2 + 27,\ 127 = 2^7 - 1 = 4.5^2 + 27 \quad (9)$$

Предлаганият модифициран метод за синтез на сигнали с малка стойност на отношението пикова средна мощност е приложим за всички класове сигнали от подгрупа 2.1 в таблица 1 и към сигналите от подгрупа 2.2 в таблица 1 с дължини

$$N \in \{3, 5, 7, 15, 17, 31, 127, 257, 8191\} \quad (10)$$

За простота методът ще бъде разгледан за случая на М-последователности, които са в основата на всички сигнали от подгрупа 2.1.

От инженерна гледна точка М-последователностите представляват характеристичните последователности на равномерни ***ФМ*** сигнали. От математическа гледна точка те са линейни рекурентни последователности (***ЛРП***) с максимална дължина (Sequences with Maximal Length - M-sequences), за чието генериране се използва някакво линейно рекурентно уравнение (***ЛРУ***), с общ вид:

$$u(i) = a_{n-1}u(i-1) + a_{n-2}u(i-2) + \ldots + a_0 u(i-n) \quad (11)$$

В (11) новият i-ти елемент $u(i)$ от ***ЛРП*** се изчислява въз основа на елементите $u(i-1), u(i-2), \ldots, u(i-n)$ от разглежданата ***ЛРП***, получени в предходните моменти от време (необходимо е началните стойности $u(0), u(1), \ldots, u(n-1)$ да са зададени). Освен това се счита, че операциите в (11) и коефициентите $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ са дефинирани в някакво алгебрично поле, което може да бъде безкрайно (числово) или крайно (поле на Галоа - Galois Field, GF).

След полагането $u(i) = x^i$ от (11) се получава уравнението:

$$x^{i-n}(x^n - a_{n-1}.x^{n-1} - a_{n-2}.x^{n-2} - \ldots - a_1.x - a_0) = 0 \quad (12)$$

Ако $x = 0$, тогава ***ЛРП*** ще се състои само от нули, което е тривиалният случай.

Ето защо може да се приеме, че $x \neq 0$ и тогава лявата и дясната страна на (12) могат да се съкратят на x^{i-n}. В резултат (12) се трансформира в т. нар. характеристично уравнение на ***ЛРП***:

$$x^n - a_{n-1}.x^{n-1} - a_{n-2}.x^{n-2} - ... - a_1.x - a_0 = 0 \tag{13}$$

което може да се представи и в следния вид

$$x^n = a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + ... + a_1.x + a_0 \tag{14}$$

Значимостта на характеристичното уравнение е в това, че чрез него сравнително лесно се синтезира структурната схема на цифровата електрическа верига, с която може да се генерира на съответната ***ЛРП***. Поради това характеристичното уравнение на ***ЛРП*** често се нарича полином на обратната връзка (feedback polynomial).

Може да се докаже, че всеки ***ФМ*** сигнал, чиято характеристична последователност е ***М*** последователност има период ***N*** с максимална стойност:

$$N = p^n - 1 \tag{15}$$

а различните начални стойности на преместващите регистри на цифровата електрическа верига пораждат различни циклични отмествания на един и същ периодичен процес. Като се вземе в предвид уравнение (15) е необходимо да се анализират условията, при които една ***ЛРП*** има максимална дължина т.е. ***ЛРП*** е М-последователност. Този проблем е решен в алгебричната теория на ***ЛРП***, с доказването на следните теореми:

Теорема 1: Една ***ЛРП*** над крайното алгебрично поле $GF(p)$ е М-последователност само ако характеристичният полином на нейното ***ЛРУ*** е неразложим примитивен полином в разширеното крайно алгебрично поле $GF(p^n)$.

Теорема 2: Ако θ_1 е произволен примитивен елемент на $GF(p^n)$, всички останали примитивни елементи са:

$$\theta_2 = \theta_1^{k_2}, \theta_3 = \theta_1^{k_3}, ..., \theta_{N_{pr}} = \theta_1^{k_{N_{pr}}} \tag{16}$$

като тук

$$K_{pr} = \{k_1 = 1, k_2, ..., k_{N_{pr}}\} \tag{17}$$

е множеството на всички числа, които са по-малки от $p^n - 1$ и взаимно – прости с $p^n - 1$.

Теорема 3: Ако θ е произволен примитивен елемент на $GF(p^n)$, тогава последователността

$$u(0) = Tr_1^n\left(\theta^0\right),\ u(1) = Tr_1^n\left(\theta^1\right), ..., u(N-1) = Tr_1^n\left(\theta^{N-1}\right) \qquad (18)$$

като тук

$$N = p^n - 1\ , \qquad (19)$$

$$Tr_1^n\left(\theta^i\right) = \left(\theta^i\right)^{p^0} + \left(\theta^i\right)^{p^1} + ... + \left(\theta^i\right)^{p^{n-1}},\ i = 0,1,...,N \qquad (20)$$

е М – последователност.

От горните теореми произтича следния алгоритъм за синтезиране на всички М-последователности над крайно поле.

1. На основата на зададени параметри p и n се изчислява дължината $N = p^n - 1$ на М-последователностите.
2. От специализираната литература, където са представени таблици на неразложими примитивни полиноми за много голям брой стойности на p и n, се избира произволен неразложим примитивен полином $g(x)$ от степен n.
3. Избраният на предходната стъпка полином $g(x)$ се използва като характеристично уравнение, чрез което се синтезира ***ЛРУ*** на ***ЛРП*** (или структурната схема на електрическата верига, реализираща ***ЛРП***).
4. След задаване на произволно ненулево начално състояние $u(0), u(1), ..., u(n-1)$ на ***ЛРУ*** (или на регистрите на електрическата верига) за $N - n$ такта се изчисляват последователно всички останали отчети $u(n), u(n+1), ..., u(N-1)$ на М-последователността. Тази М-последователност се приема за основна.
5. Изчисляват се елементите на множеството K_{pr}, съдържащо всички числа по – малки от ***N*** и взаимно – прости с ***N***.
6. Елементите на множеството K_{pr}, определени на предходаната стъпка, се разделят на n класа от p-спрегнати числа

$$\left\{k_i, k_i p, k_i p^2, ..., k_i p^{n-1}\right\} \bmod N,\ i = 1,2,...,N_{pr} \qquad (21)$$

От всеки клас се взема най – малкото число $l_k, k = 2,3,...,N_{gen}$, при което се получава множеството на лидерите на класовете от p-спрегнати числа по модул ***N***

$$L_{gen} = \left\{l_1 = 1, l_2, ..., k_{N_{gen}}\right\},\ N_{gen} = \frac{K_{pr}}{n} \qquad (22)$$

7. Чрез пермутация индексите на отчетите на основната М-последователност се получават и отчетите на всички останали М-последователности

$$v_k\left\langle l_k i\right\rangle_N = u(i),\ i = 0,1,...,N-1,\ k = 2,3,...,N_{gen} \qquad (23)$$

Алгоритъмът за синтезиране на всички М-последователности над крайно поле е приложен в пример за синтез на всички циклично нееквивалентни М-последователности при $p=2, n=3$. В този случай съществуват следните две циклично нееквивалентни М-последователности

$$\{u(i)\}_{i=0}^{6}=\{1,0,0,1,0,1,1\},$$
$$\{v_2(i)\}_{i=0}^{6}=\{1,1,1,0,1,0,0\}. \quad (24)$$

При използване на М-последователностите (24) като характеристични последователности се получават бинарните сигнали

$$\{\varsigma_1(i)\}_{i=0}^{6}=\{-1,1,1,-1,1,-1,-1\},$$
$$\{\varsigma_2(i)\}_{i=0}^{6}=\{-1,-1,-1,1,-1,1,1\}. \quad (25)$$

Не е трудно да се провери, че ПАКФ на сигналите (66) имат почти идеална форма, тъй като всички техни странични листа имат еднакво ниво $q_{sl}=-1$. Ето защо, ако сигналите (25) се използва в ***OFDM*** система с $M=N=7$ подносещи честоти. Тогава за ***PAPR*** се получават следните оценки:

$$PAPR_{\varsigma}=1-\frac{q_{sl}}{N}=\frac{8}{7}\approx 1{,}14 \quad (26)$$

$$PAPR_{\varsigma}\le 2-\frac{2q_{sl}}{N}=\frac{16}{7}\approx 2{,}28 \quad (27)$$

При това първата оценка се отнася за комплексен, а втората - за квадратурен модел на общата носеща честота.

От оценките (26) и (27) ясно се вижда, че сигналите (25) осигуряват малко ниво на $PAPR$, но за съжаление тяхната дължина не е точна степен на 2, което намалява изчислителната ефективност на ***БПФ***. Ето защо логично е да се изследва практическата приложимост в ***OFDM*** системи сигнали, чиято характеристична последователност е М-последователност с добавен един допълнителен отчет. Тази идея води до следния модифициран метод за синтез на сигнали с малка стойност на отношението максимална към средна мощност

1. Синтезира се семейство от сигнали, чиито характеристични последователности са М-последователности, последователности на Гордън-Милс-Уелч или М-последователности с висока структурна сложност, генерирани по методите на Уелч - Гонг, на Касами или чрез хиперовалната конструкция.
2. Формира се разширено семейство от сигнали като към всички циклични отмествания на всички сигнали от семейството от предходната стъпка се добавя допълнителен отчет на позиция $N+1=2^m$, който първо е -1, а след това е $+1$.
3. Изчислява се $PAPR$ на всеки сигнал от разширеното семейство, формирано на предходната стъпка и се избират сигналите, за които $PAPR\le PAPR_0$.
4. От всеки сигнал

$$\{\varsigma(i)\}_0^N = \{\varsigma(0), \varsigma(1), ..., \varsigma(N)\} \qquad (28)$$

селектиран на предходната стъпка, се формират по 2^{m-1} сигнала чрез пермутации на индексите на отчетите

$$\xi_k \langle (2k-1).i \rangle_{(N+1)} = \varsigma(i),\ i = 0,1,...,N,\ k = 1,2,...,2^{m-1} \qquad (29)$$

5. От множеството сигнали, формирано на предходната стъпка, се избират сигналите, за които максималният лист на ПВКФ с другите сигнали не превишава q_{np}.

При практическото използване на горния метод следва да се отчитат следните обстоятелства.

Първо, на стъпка 1 М-последователностите се синтезират по обоснования по – горе алгоритъм за синтезиране на всички М-последователности над крайно поле като се взема $p = 2,\ n = m$. Синтезирането на семейство от сигнали, чиито характеристични последователности са последователности на Гордън-Милс-Уелч или М-последователности с висока структурна сложност, генерирани по методите на Уелч - Гонг, на Касами или чрез хипероваланата конструкция в голяма степен се основават на свойствата на М-последователностите, но за повече яснота формирането на последователности на Гордън-Милс-Уелч ще бъде разгледано в следващата глава на дисертационния труд. Освен това методът е приложим и за последователности на квадратичните остатъци (последователности на Лежандър), последователности на Якоби и последователности на Хол за дължини на сигнала, съгласно (10).

Второ, при прилагане на метода в случая на последователности на квадратичните остатъци (последователности на Лежандър) с $q_{np} = 3$, когато $N = p = 2^m + 1$ е просто число, на стъпка 2 се премахва отчетът на позиция N.

Трето, на стъпка 4 при осъществяването на пермутации на отчетите на сигналите е използван фактът, че нечетните числа

$$2k - 1 = 1,3,5,...,2^m - 1,\ \ k = 1,2,...,2^{m-1} \qquad (30)$$

са взаимно прости с дължината на сигналите $N + 1 = 2^m$.

Четвърто, множеството на сигалите, селектирани на стъпка 5, осигуряват поправянето $N_{гр}$, което гарантира правилно декодиране на сигнала.

Пето, семействата от сигнали, синтезирани по модифицирания метод са съществено допълнение към комплементарните сигнали на Голай, анализирани в предходния параграф. Действително, при използване на $M = 2^m$ подносещи честоти са възможни

$$N_{вс} = 2^M = 2^{2^m} \qquad (31)$$

различни бинарни сигнали. Ако сигналите са разпределени равномерно според отношението на максималната към средната мощност, тогава сигналите с $1 \le PAPR < 2$ ще бъдат

$$N_{(papr<2)} = \frac{N_{вс}}{M} = 2^{2^m - m} \qquad (32)$$

В същото време беше посочено, че при използването на коплементарни сигнали на Голай във всеки тактов интервал T_s от предавателя към приемника се пренасят по $w+h(m+1)$ бита информация. Следователно, общият брой на бинарните комплементарни сигнали е

$$N_{GS} = 2^{w+m+1} \qquad (33)$$

като стойностите на параметъра w са посочени в табл. 2. От (32) и (33) се вижда, ясно се вижда, че

$$N_{(papr<2)} >> N_{GS} \qquad (34)$$

Шесто, синтезираните по модифицирания метод сигнали могат да бъдат използвани заедно с фазова манипулация на 2^h нива, при което с всеки един сигнал ще се пренасят по

$$I_b = w' + m + h \qquad (35)$$

бита информация във всеки тактов интервал T_s, а декодирането може да се осъществява по метода за корелационно декодиране, обоснован в предходния параграф. Тук w' е най – голямото число, за което е изпълнено

$$2^{w'} \le N_{мод\,мет} \qquad (36)$$

а $N_{мод\,мет}$ е броят на сигналите, синтезирани по модифицирания метод.

Таблица 2. *Параметри на семействата от сигнали, синтезирани чрез модифицирания метод за синтез на сигнали с малка стойност на отношението максимална към средна мощност*

m	**M**	*PAPR*	$N_{мод\,мет}$	**w'**
2	4	1,00	1	0
3	8	1,50	2	1
4	16	1,85	2	1
5	32	1,78	8	3
6	64	1,89	16	4
7	128	2,12	32	5
8	256	2,36	128	7
9	512	2,47	128	7
10	1024	2,85	512	9
11	2048	2,91	1024	10
12	4096	3,19	1024	10

Положителните страни на модифицирания метод за синтез на сигнали с малка стойност на отношението максимална към средна мощност се демонстрират с табл. 2, където са приведени резултатите от компютърно моделиране при следните начални условия

- семейство от сигнали, използвани на стъпка 1 – бинарни М-последователности;
- допустимото максимално ниво на ***ПВКФ*** в стъпка 5 - $q_{пр} = \sqrt{M} = 2^{\frac{m}{2}}$;
- модел при определяне на - експоненциален модел на общата носеща честота.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен е модифициран метод за синтез на сигнали с малка стойност на отношението максимална към средна мощност, който е приложим за следните класове от сигнали:

- последователности с максимална дължина;
- последователности на квадратичните остатъци (последователности на Лежандър);
- последователности на Якоби;
- последователности на Хол;
- последователности на Гордън-Милс-Уелч (GMW sequences);
- М-последователности, с висока структурна сложност, генерирани по хипероваллната конструкция, по метода на Уелч - Гонг, по метода на Касами.

Положителните свойства на модифициран метод за синтез на сигнали с малка стойност на отношението максимална към средна мощност са потвърдени чрез симулационно моделиране.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Михаил Илиев. Общ метод за синтез на сложни сигнали с малка стойност на отношението максимална – средна мощност

[2] Михаил Илиев. Анализ на механизмите за намаляване на междусимволната интерференция в системи с ортогонално честотно мултиплексиране, Journal of the Technical University at Plovdiv “Fundamental Sciences and Applications”, Vol. 16, book 1, 2011 ISSN1310-8271, 265-268.

[3] B. Bedzhev, M. Iliev, S. Yordanov, V. Hadzhivasilev. Method for Synthesis of Signals Possessing Ideal Periodic Autocorrelation Function and Small Alphabet , INFORMATION, COMMUNICATION AND CONTROL SYSTEMS AND TECHNOLOGIES, UNIVERSITY OF RUSE, N1, 2012, pp.37-40, ISSN 1314-7455

[4] M. Iliev, B. Bedzhev, T. Trifonov, L. Staneva. Algorithm for Synthesis of Families of Frequency Hopping Signals with ideal Periodic Correlation Properties, INFORMATION, COMMUNICATION AND CONTROL SYSTEMS AND TECHNOLOGIES, UNIVERSITY OF RUSE, N2, 2013, pp. 7-12, ISSN 1314-7455

[5] Iliev M., V. Hadzhivasilev, “A Novel PTS Scheme for PAPR Reduction in OFDM Systems”, First International Conference on Telecommunication and Remote Sensing, 29-30 August, Sofia, 2012, pp. 170-174

[6] Iliev M., B. Bedzhev, V. Hadzhivasilev, S. Yordanov „PAPR Reduction of OFDM Signals Using Modified Partial Transmit Sequences”, ICCST Year I, No.1, 2012, pp. 26-29, ISSN 1314-7455

[7] Iliev M., V. Hadzhivasilev, „PAPR Reduction of OFDM Signals by PTS with Recursive Phase Weighting Method”, 2013

За контакти:

проф. д-р Михаил Илиев, Катедра "Телекомуникации", Русенски университет "Ангел Кънчев", e-mail: miliev@uni-ruse.bg

проф. дн Борислав Беджев, Катедра "Телекомуникации", Русенски университет "Ангел Кънчев", e-mail: bbedjev@abv.bg

инж. Светлин Василев, Катедра "Телекомуникации", Русенски университет "Ангел Кънчев", e-mail: etiovasilev@ yahoo.com

Докладът е рецензиран.