Графичен анализ на периодични точки на дискретни динамични системи

Илияна Раева

Abstract: In the following work is presented a method for calculating of dynamics of functions, which are part of a given, discrete dynamic system. The research of dynamics is based on finding the periodic and eventual periodic points for a given function, through calculating of definite number of iterations. The best results are achieved by using the computer possibilities and effective computational products for calculating the iterations, and their graphical presentation.
Approach for finding of the periodic and eventual periodic points, achieved as a result of the action of deterministic automat is shown.

Key words: *Discrete Dynamic Systems, Superposition of the functions, Periodic Points, Graphic analysis, Phase Portraits,Deterministic Automat.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Дискретните динамичнати системи са математически абстракции, използвани за описанието на физични системи и тяхното изменение във времето.

Състоянието на дадена динамична система е еднозначно определено от множество от точките на дадено *пространство.* За всяка точка от това пространство (многообразие, или още фазово пространство), съществува функция, описваща по-нататъшната еволюция на системата.

Формално една дискретна динамична система се определя като многократна композиция(итерация) на една функция:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f^2(x)$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f^3(x)$$

....

$$(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-пъти})(x) = f^n(x),$$

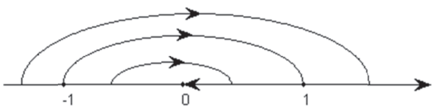
където n е естествено число.

В този смисъм една дискретна динамична система се състои от дадена функция f и нейните итерации. Дисктерните динамични системи се използват като математически модел за много практически задачи.

Основната задача, която се решава при изследването на динамиката на функцията f е да се намери $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)$ за дадено реално число n. Приема се, че $f^0(x)=x$. Поведението на точките при дадена итерация на функцията f(x) се нарича динамика на функцията.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗА ФАЗОВ ПОРТРЕТ

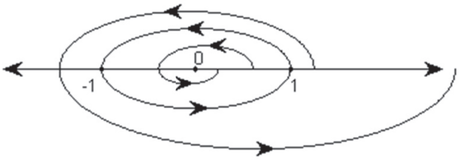
Графичното представяне на динамиката на дадена система се нарича фазов портрет на функцията. Фазовият портрет представлява диаграма, която определя възможните начални позиции в системата и посочва промените в тези позиции при итерациите на функциите. Например на функцията $f(x) = x^2$, **f**: R→ R, фазовият портрет е представен на фиг. 1.



Фигура 1. Фазовият портрет на функцията f(x) = x²

Върху хоризонталната числова ос Ox, първо се поставят точките 0 и 1 . Тези две точки са фиксирани за функцията, защото f(0) = 0 и f(1) = 1. За точките x, за които 0< x < 1, n-тата итерация $f^n(x)$ клони към 0 за големи n, и за x > 1, $f^n(x)$ клони към безкрайност за големи n. На чертежа това е представено със стрелките от 1 в посока 0 и втора стрелка от 1 към безкрайност. За стойностите на x < 0, -1 е фиксирана точка, защото $f^n(-1)$ =1, което е показано със съответната стерлка от -1 към1. Точките между -1 и 0 се изобразяват в интервала (0, 1) като се изместват по-близо до 0. при последващите итерации на функцията. Подобно на това, точките, които са отляво на -1 се изобразяват надясно от 1 като при всяка итерация се отдалечават към безкрайност.

Фазовият портрет на функцията $f(x) = -x^3$ е представен на фиг. 2.



Фигура 2. Фазовият портрет на функцията f(x) = - x³

Построяването на портрета следва същата логика. Точката 0 е фиксирана и 1 се изобразява в -1 и се връща в 1 при следващат итерация. Точките, които са по-големи от 1 по абсолютна стойност, се изобразяват последователно от двете страни на 1 като се отдалечават към безкрайност при последователните итерации. Точките, които са по-малки от 1 имат подобно поведение, но по отношение на числото 0.

ПЕРИОДИЧНИ ТОЧКИ

Ще изследваме динамиката на дискретните динамични системи като започнем с дефинирането и категоризацията на най-простия вид поведение.

Определение 1 Ако f е функция, за която f (c) = c то c е фиксирана точка за f

От това определение следва, че една функция на реалните числа има фиксирана точка c тогава и само тогава, когато точкта (c, c) е от нейната графика. Т.е. функцията има фиксирана точчка c тогава и само тогава, когато графиката и пресича линията y = x, в точката (c, c). Фиксираните точки са важни за една динамична система.

Теорема 1 Нека е даден затворения интервал I = [a, b] и f: I => I е непрекъсната функция. Тогава f има фиксирана точка в I.

Доказателство:

Ако f(a) = a и f(b) = b , то и a и b са фиксирани точки за f. Предполагаме, че f(a) $\neq$ a и f(b) $\neq$ b . Нека g(x) = f(x) – x . Тъй като g(x) е разлика на непрекъснати функции, то следва, че и тя е непрекъсната функция. От (a)$\neq$a, и f(a) е в [a, b], f(a) > a Аналогично f(b) < b. Откъдето g(a) = f(a) – a >0 и g(b) = f(b) – b < 0 . Поради това, че g е непрекъсната по теоремата за средните стойности, следва, че съществува точка c от [a, b] такава че g(c) =0. Но g(c) = f(c) – c =0 откъдето f(c) = c, с което теоремата е доказана.

Лесно се илютрира доказаната теорема на графиката на функцията f. . Функцията f има фиксирана точка c тогава и само тогава, когато f пресича линията y = x. По аналогичен начин се доказва следната теорема за съществуване на фиксирана точка в интервал:

Теорема 2 Нека е даден затворения интервал I = [a, b] и f: I => R е непрекъсната функция. Ако f(I) $\supset$I то f има фиксирана точка в I.

Определение 2. Точката x е периодична точка на f с период к ако $f^k(x) = x$.

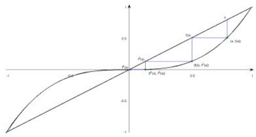
С други думи x е периодична точка на f с период к ако x е фиксирана точка на $\mathbf{f^k}$. Точката x има прост период $к^0$, ако $f^{k0}(x)=x$, $f^n(x) \neq x$ когато $0<n<k^0$.

Това означава, че x има прост период $к^0$, ако x се връща към началната позиция за пръв път след точно $к^0$ итерации на f. Множеството от всички итерации на точката x се нарича орбита на x и ако x е периодична точка то тя и нейните итерации се наричат периодични орбити.

Определение 3. Точката x е евентално фиксирана точка на функцията f, ако съществува N такова, че $f^{n+1}(x) =f^n(x)$ за n > N. Точката x е евентуално периодична с период к, ако съществува N такова, че $f^{n+к}(x) =f^n(x)$ при n > N.

ГРАФИЧЕН АНАЛИЗ

Често за анализ на динамиката на една дискретна динамична система се използва нейната графика.

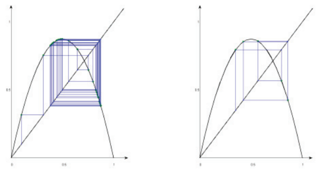


Фигура 3. Графичен анализ на орбитите на точката а при итерациите на функцията $f(x)=x^3$

На фиг. 3 е представена динамиката на функцията $f(x) =x^3$. Започва се чрез построяване на графиката на f и линията y = x. Целта е да се определи маршрута на точката а от интервала (0, 1). Следвайки преместването на точката по оста x ние запазваме посоката на нейните премествания по линията y = x. Започва от точката (a, a). От тази точка ние се придвижваме вертикално докато пресечем графиката на f. От вертикалното преместване на стойността на x-координатата остава а , а y-координатата е f(a). Сега се придвижваме хоризонтално до линията y=x. Повтаряйки процеса достигаме до точката (f(a), f^2(a)) и тогава се връщаме хоризонтално до y=x. Продължавайки ние виждаме, че f^n(a) клони към 0, когато n клони към безкрайност. Ако това се направи за повече точки от интервала (0, 1) ще се установи, че всяка точка от този интервал клони към 0 под итерация на $f(x) = x^3$.

Един от най-подходящите продукти за извършване на графичен анализ на динамиката на фунции, е „Математика“ . Тя дава добри резултати при изчисляване на стойностите на $f^n(x)$, построяването на графиките на функциите и графичния анализ.

На фиг. 4 са представени първите 20 итерации на графичния анализ на функцията h(x) = 3,5x(1-x) .



.

Фигура 4

Изследването периодични и евентуало периодични точки, могат да бъдат прилагани успешно и в останлите дялове на дискретната математика.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА НЕПОДВИЖНИТЕ, ПЕРИОДИЧНИТЕ И ЕВЕНТУАЛНО ПЕРИОДИЧНИТЕ ТОЧКИ НА КРАЕН АВТОМАТ НА Мили.

Детерминиран краен автомат на Мили се дефинира като наредена шесторка от множества:

M = <Q, V, W, δ, λ, q_0 >, където

Q – крайно множество от вътрешни състояния за автомата;
V – входна азбука;
W – изходна азбука
δ, λ - функции на прехода
q_0 – начално вътрешно състояние.

В термините на теорията на автоматите, фиксирана точка (дума) ще опредрлим като дума, чийто образ в резултат на действието на автомата съвпада с изходната дума.
$M(\alpha) = \alpha$

Под периодична дума(точка) с период к ще разбираме, дума която е получена след к пъти действие на автомата върду дадена дума съвпадаща с дадената.

$M(\alpha) = \alpha_1$
$M(\alpha_1) = \alpha_2$
....
$M(\alpha_к) = \alpha$

Нека е даден крайния автомат M на Мили:

$< Q=\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, V=\{a, b, c\}, W=\{a, b, c\}, \{q_0\} >$

И функциите на преходите:

M	1	2	3	4
a	2,b	4,c	1,c	3,a
b	3,a	2,b	4,c	2,b
c	1,c	2,a	3,b	4,c

Могат да се разглеждат думи с различна дължина и период.

1. За a$\in$V* и $|a|$=3

Множеството от неподвижни думи: F_3={ccc}

Множеството от периодични думи: P_2^3 = {cac, cba, cca, ccb}

Множеството от евнтуално периодично думи:

$P_{2,1}^{3,2}$ = {cab}, $P_{2,2}^{3,2}$ = {cbb}, $P_{2,1}^{3,4}$ = {caa}, $P_{2,2}^{3,4}$ = {cbc}

2. За a$\in$V* и $|a|$=4

Множеството от неподвижни думи: F_4={cccc}

Множеството от периодични думи: P_2^3 = {ccac, ccba, ccca, cccb}

Множеството от евнтуално периодично думи:

$P_{2,1}^{4,2}$ = {ccab}, $P_{2,2}^{4,2}$ = {ccbb}, $P_{2,1}^{4,4}$ = {ccaa}, $P_{2,2}^{4,4}$ = {ccbc}

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все повече университети включват в своите програми курс по Дискретни динамични системи. Това е свързно с нарастналите възможности на компютрите да изчисляват достатъчен брой итерации за по конкретен и точен анализ.

Интересни резултати в динамиката се наблюдават при комплексните функции, логистични функции, числено решаване на диференциялни уравнения и други.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Holmgen A. A First Course in Discrete Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York, 1994.

[2]. George J. Tina A. Fuzzy sets uncertainty and informations, University of New York 2001.

[3]. Bak J. Newman D, Complex Analysis, Springer-Verlag, 1982.

За контакти:

Доц. д-р Илияна Петрова Раева, Катедра “Приложна математика и статистика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 606, e-mail: iraeva@uni-ruse.bg