Съществуване на решения на диференчна задача от четвърти ред

Николай Димитров

Abstract: On the existence of solutions of fourth-order difference equations. *In this paper by using variational methods we obtain criteria for existence of three solutions for fourth order difference equations. The existence results follow from Ricceri's theorem.*
Key words: *Variational method, fourth order, difference equations.*

ВЪВЕДЕНИЕ

През последните години все повече автори разглеждат диференциални и диференчни уравнения от четвърти ред, тъй като такива задачи намират широко приложение в динамичните системи и в някои клонове на статистиката, икономиката и биологията. Съществуването на решения на такива задачи обикновено се доказва като се използват топологични или вариационни методи (виж [1, 2, 3, 4]).

ИЗЛОЖЕНИЕ

В настоящата статия ще покажем съществуване на три решения на задачата

$$\Delta^4 u(t-2)+\alpha\, u(t)=\lambda f(t,u(t)), \quad t=1,2,\dots,T,\, T\ge 2$$

със следните гранични условия

$$u(0)=\Delta u(-1)=\Delta^2 u(T)=0, \quad \Delta^3 u(T-1)=\mu g(u(T+1)),$$

където α,λ и μ са реални параметри, а функциите f и g са непрекъснати. Операторът Δ се дефинира чрез равенствата:

$$\Delta u(t)=u(t+1)-u(t),\ \Delta^k u(t)=\Delta^{k-1}\left(\Delta u(t)\right),\ k\in N,\ k\ge 2.$$

Предполагаме също така, че $\alpha>-\dfrac{1}{T^2(T+1)^2}$.

Дефинираме реалното векторно пространство

$$X:=\left\{u:\{-1,\dots,T+2\}\to R : u(0)=\Delta u(-1)=\Delta^2 u(T)=0\right\}.$$

Нека за всяко $u\in X$

$$\|u\|_X=\left(\sum_{t=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(t-2)\right|^2+\alpha\sum_{t=1}^{T}|u(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Означаваме

$$\rho=(T+1)^{\frac{3}{2}}\left(1+\min\{\alpha,0\}T^2(T+1)^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Лема 1. *За всяко* $u\in X$, *имаме, че*

$$\sum_{t=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(t-2)\right|^2+\alpha\sum_{t=1}^{T}|u(t)|^2\ge 0$$

и

$$|u(t)|\le\rho\|u\|_X \text{ за всяко } t=1,2,\dots,T+1.$$

Доказателство. Нека $u\in X$ и $t\in\{1,\dots,T+1\}$. Лесно се проверява, че

$$\Delta u(t-1)=\Delta u(-1)+\sum_{i=1}^{t}\Delta^2 u(i-2)=\sum_{i=1}^{t}\Delta^2 u(i-2).$$

Като използваме горното уравнение и неравенството на Хьолдер последователно получаваме

$$\left|\Delta u(t-1)\right| \le \sum_{i=1}^{t}\left|\Delta^2 u(i-2)\right| \le \sum_{i=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(i-2)\right|$$
$$\le (T+1)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(i-2)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Повдигайки на квадрат двете страни достигаме до

$$\left|\Delta u(t-1)\right|^2 \le (T+1)\sum_{i=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(i-2)\right|^2,$$

откъдето

$$\sum_{t=1}^{T+1}\left|\Delta u(t-1)\right|^2 \le (T+1)^2\sum_{t=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(t-2)\right|^2. \qquad (1)$$

Също така

$$u(t) = u(0) + \sum_{i=1}^{t}\Delta u(i-1) = \sum_{i=1}^{t}\Delta u(i-1).$$

Използвайки последните два резултата и неравенството на Хьолдер, за всяко $t \in \{1,\ldots,T+1\}$ получаваме

$$\begin{aligned}\left|u(t)\right| &\le \sum_{i=1}^{t}\left|\Delta u(i-1)\right| \le (T+1)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(i-1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le (T+1)^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{i=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(i-2)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \qquad (2)$$

Тогава за $t \in \{1,\ldots,T\}$ имаме, че

$$\left|u(t)\right| \le \sum_{i=1}^{t}\left|\Delta u(i-1)\right| \le T^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{T}\left|\Delta u(i-1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\left|u(t)\right|^2 \le T\sum_{i=1}^{T}\left|\Delta u(i-1)\right|^2.$$

Така

$$\sum_{t=1}^{T}\left|u(t)\right|^2 \le T^2\sum_{i=1}^{T}\left|\Delta u(i-1)\right|^2 \le T^2\sum_{i=1}^{T+1}\left|\Delta u(i-1)\right|^2.$$

От (1) следва, че

$$\sum_{t=1}^{T}\left|u(t)\right|^2 \le T^2(T+1)^2\sum_{t=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(t-2)\right|^2.$$

Накрая от последното уравнение получаваме

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(t-2)\right|^2 + \alpha\sum_{t=1}^{T}\left|u(t)\right|^2\\ &\ge \left(1+\min\{\alpha,0\}T^2(T+1)^2\right)\sum_{t=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(t-2)\right|^2\\ &\ge 0,\end{aligned} \qquad (3)$$

с което доказахме първото твърдение от Лема 1. Като използваме нормата в X и (3) достигаме до

$$\left\|u\right\|_X \ge \left(1+\min\{\alpha,0\}T^2(T+1)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{t=1}^{T+1}\left|\Delta^2 u(i-2)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

От последното неравенство и от (2) следва, че

$$\rho\|u\|_X \geq |u(t)|$$

за всяко $t \in \{1,\ldots,T+1\}$. С което и второто твърдение от Лема 1 е доказано.

Забележка: Ясно е, че X е $T+1$-мерно Банахово пространство и според Лема 1 $\|\cdot\|_X$ е норма в X."

За всяко $u \in X$ дефинираме следните функционали

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2,$$

$$J(u) = -\int_0^{u(T+1)} g(s)ds$$

и

$$\Psi(u) = \sum_{t=1}^{T}\int_0^{u(t)} f(t,s)ds.$$

Те са добре дефинирани и диференцируеми, като производните им са съответно

$$\Phi'(u)(v) = \sum_{t=1}^{T+1}\Delta^2 u(t-2)\Delta^2 v(t-2) + \alpha\sum_{t=1}^{T}u(t)v(t),$$

$$J'(u)(v) = -g(u(T+1))v(T+1)$$

и

$$\Psi'(u)(v) = \sum_{t=1}^{T} f(t,u(t))v(t)$$

за всяко $v \in X$.

Лема 2. *За всяко* $u,v \in X$, *имаме*

$$\sum_{t=1}^{T+1}\Delta^2 u(t-2)\Delta^2 v(t-2) = -\Delta^3 u(T-1)v(T+1) + \sum_{t=1}^{T}\Delta^4 u(t-2)v(t).$$

Доказателство. Като използваме граничните условия $v(0) = \Delta v(-1) = \Delta^2 u(T) = 0$ и формулата за сумиране по части последователно получаваме

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{T}\Delta^2 u(t-2)\Delta^2 v(t-2) \\
&= \Delta^2 u(T)\Delta v(T) - \Delta^2 u(-1)\Delta v(-1) - \sum_{t=1}^{T}\Delta^3 u(t-2)\Delta v(t-1) \\
&= -\sum_{t=1}^{T}\Delta^3 u(t-2)\Delta v(t-1) \\
&= -\Delta^3 u(T-1)\Delta v(T) - \sum_{t=1}^{T}\Delta^3 u(t-2)\Delta v(t-1) \\
&= -\Delta^3 u(T-1)\Delta v(T) - \Delta^3 u(T-1)v(T) + \Delta^3 u(-1)v(0) + \sum_{t=1}^{T}\Delta^4 u(t-2)v(t) \\
&= -\Delta^3 u(T-1)v(T+1) + \sum_{t=1}^{T}\Delta^4 u(t-2)v(t).
\end{aligned}$$

Лема 3. *Ако* $u \in X$ *е критична точка на функционала* $\Phi - \lambda\Psi - \mu J$, *то* u *е решение на граничната задача.*

Доказателство. Нека $u \in X$ е критична точка на функционала $\Phi - \lambda\Psi - \mu J$. Тогава

$$\Phi'(u)(v) - \lambda\Psi'(u)(v) - \mu J'(u)(v) = 0 \text{ за всяко } v \in X.$$

В сила са следните равенства

$$\begin{aligned}
&\Phi'(u)(v) - \lambda\Psi'(u)(v) - \mu J'(u)(v) \\
&= \sum_{t=1}^{T+1} \Delta^2 u(t-2)\Delta^2 v(t-2) + \alpha\sum_{t=1}^{T} u(t)v(t) \\
&- \lambda\sum_{t=1}^{T} f(t,u(t))v(t) + \mu g(u(T+1))v(T+1) \\
&= v(T+1)\big(\mu g(u(T+1)) - \Delta^3 u(T-1)\big) + \sum_{t=1}^{T} \Delta^4 u(t-2)v(t) \\
&+ \alpha\sum_{t=1}^{T} u(t)v(t) - \lambda\sum_{t=1}^{T} f(t,u(t))v(t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Тъй като това равенство е изпълнено за всяко $v \in X$, то имаме, че

$$\Delta^3 u(T-1) = \mu g(u(T+1))$$

и

$$\Delta^4 u(t-2) + \alpha\, u(t) - \lambda f(t,u(t)) = 0 \text{ за всяко } t \in \{1,...,T\}.$$

u също така удовлетворява и граничните условия, следователно е решение на граничната задача.

Сега ще използваме следната теорема за съществуване на три решения [5].

Лема 4. *(Ricceri). Нека E е сепарабелно и рефлексивно Банахово пространство с норма $\|\cdot\|_E$, а $\Phi : E \to R$ е коерцитивен, секвенциално слабо полунепрекъснат C^1 функционал, ограничен върху всяко ограничено подмножество на E, за чиято производна съществува непрекъсната обратна в E^*. Предполагаме също така, че $J : E \to R$ е C^1 функционал с компактна производна. Нека Φ има локален минимум u_0 и $\Phi(u_0) = J(u_0) = 0$.*

Означаваме

$$\delta = \max\left\{0, \lim_{\|x\|_E \to \infty} \sup \frac{J(u)}{\Phi(u)}, \lim_{\|x\|_E \to 0} \sup \frac{J(u)}{\Phi(u)}\right\},$$

$$\eta = \sup_{u \in \Phi^{-1}(0,\infty 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)}$$

и нека $\delta < \eta$.

Тогава за всеки компактен интервал $[a,b] \subset (\frac{1}{\eta}, \frac{1}{\delta})$, съществува $K > 0$ със следните свойства:

за всяко $x \in [a,b]$ и всеки C^1 функционал $\Psi : E \to R$ с компактна производна, съществува $\xi > 0$, такова, че за всяко $y \in [0,\xi]$, уравнението

$$\Phi'(u) - y\Psi'(u) - xJ'(u) = 0$$

има поне 3 решения в E, чиято норма е по-малка от K.

Теорема 1. *Нека са в сила условията*

$(H1)$ Съществува $A > 0$, такова, че $\max\{g^0, g^\infty\} < A$, където

$$g^0 = \lim_{y\to 0}\sup\frac{-\int_0^y g(s)ds}{y^2} \text{ и } g^\infty = \lim_{|y|\to\infty}\sup\frac{-\int_0^y g(s)ds}{y^2};$$

$(H2)$ Съществува $k > 0,$ такова че

$$2AB\rho^2 < -\int_0^{k(T+1)^2} g(s)ds,$$

където ρ е дефинирано както в началото и

$$B = \frac{k^2}{2}\left(4(T+1) + \alpha\sum_{t=1}^{T} t^4\right) > 0.$$

Тогава за всеки компактен интервал $[a,b],$ за който е изпълнено, че

$$[a,b] \subset \left(\frac{B}{-\int_0^{k(T+1)^2} g(s)ds}, \frac{1}{2A\rho^2}\right)$$

съществува $K > 0,$ такова че за всяко $\mu \in [a,b],$ съществува $\xi > 0$, такова че за всяко $\lambda \in [0,\xi]$ началната задача има поне 3 решения в $X,$ чиято норма е по-малка $K.$

Доказателство. Нека функционалите $\Phi, J, \Psi : X \to R$ са дефинирани както по-горе. Те са диференцируеми и техните производни са непрекъснати. От Лема 3, всяка критична точка на функционала $\Phi - \lambda\Psi - \mu J$ е решение на граничната задача. Прилагаме Лема 4 като избираме $E = X, x = \mu$ и $y = \lambda.$

Първо ще покажем, че условията от Лема 4 са изпълнени.

Ясно е, че Φ е коерцивен, секвенциално слабо полунепрекъснат C^1 функционал, ограничен върху всяко ограничено подмножество на $X.$

За всяко $0 \neq u \in X$ имаме, че $\Phi'(u) = \|u\|_X^2$ и $\lim_{\|u\|_X\to\infty}\frac{\Phi'(u)}{\|u\|_X} = \infty.$ Така Φ е коерцивен и

$$\left(\Phi'(u) - \Phi'(v)\right)\left(u - v\right) = \|u - v\|_X^2 \quad \text{за всяко } u, v \in X,$$

откъдето Φ е равномерно монотонен. Тогава (виж [6]) съществува непрекъснато изображение $\left(\Phi'\right)^{-1} : X^* \to X$. Не е трудно да се провери, че J' и Ψ' са компактни оператори. Нека $u_0 \equiv 0.$ Тогава Φ има строг локален минимум и $\Phi(u_0) = J(u_0) = 0.$

Сега ще покажем, че

$$\delta < 2A\rho^2 \text{ и } \frac{-\int_0^{k(T+1)^2} g(s)ds}{B} \le \eta.$$

От (H1) следва, че съществуват $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ такива, че

$$-\int_0^y g(s)ds \le Ay^2 \quad \text{за всяко } |y| \in [0,\gamma_1) \cup (\gamma_2, \infty).$$

Последното, заедно с непрекъснатостта на g ни дава, че съществуват c_1 и $\theta > 2,$ така, че

$$-\int_0^y g(s)ds \le A|y|^2 + c_1|y|^\theta \quad \text{за всяко } y \in R.$$

От Лема 1 следва, че

$$J(u) \le A|u(T+1)|^2 + c_1|u(T+1)|^\theta$$

$$\leq A\rho^2 \|u\|_X^2 + c_1\rho^\theta \|u\|_X^\theta \text{ за всяко } u \in X.$$

Откъдето

$$\lim_{u\to\infty} \sup \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq 2A\rho^2.$$

С подобни разсъждения може да се покаже, че

$$\lim_{u\to\infty} \sup \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq 2A\rho^2.$$

Сега от последните две неравенства се вижда, че $\delta \leq 2A\rho^2$.

Нека k е даденото в (H2) и нека дефинираме $u_1(t) = kt^2$. Тогава

$$\Delta u_1(t-1) = k(2t-1) \quad \text{и} \quad \Delta^2 u_1(t-2) = 2k.$$

Като използваме Лема 1 получаваме, че

$$\Phi(u_1) = \frac{k^2}{2}\left(4(T+1) + \alpha \sum_{t=1}^{T} t^4\right) = B > 0.$$

Тогава $u_1 \in \Phi^{-1}(0,\infty)$ и лесно се вижда, че

$$\eta = \sup_{u\in\Phi^{-1}(0,\infty)} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \geq \frac{J(u_1)}{\Phi(u_1)} = \frac{-\int_0^{k(T+1)^2} g(s)ds}{B}.$$

Така показахме, че условията в Лема 4 са удовлетворени, с което теоремата е доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. J. A. Cid, D. Franko and F. Minhos, Positive fixed points and fourth-order equations, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009).

[2]. J. R. Graef, L. Kong, Q. Kong, Positive solutions to a fourth order boundary value problem, Results Math. 59 (2011).

[3]. G. Han and Z. Xu, Multiple solutions of some nonlinear fourth-order beam equation, Nonlinear Anal. 68 (2008).

[4]. Z. He and J. Yu, On the existence of positive silutions of fourth-order difference equations, Appl. Math. Comput. 161 (2005).

[5]. B. Ricceri, A further three critical points theorem, Nonlinear Anal. 71 (2009).

[6]. E. Zeilder, Nonlinear Functional Analysis, Vol II. Springer-Verlag, New York, 1990.

За контакти:

Ас. Николай Димитров, Катедра “Математика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, e-mail: ndimitrov@uni-ruse.bg