Математически модел на хидродинамиката в биореактори с механично разбъркване

Иванка Желева, Анна Лечева

Abstract: Mathematical Model of Hydrodynamics in Bioreactors with Mechanical Mixing. *This article presents the essence of mathematical modelling. The basic principles to be followed when creating a mathematical model are described. A mathematical model of hydrodynamics in bioreactors with mechanical agitation equipped with three mixers is created on the base of physical conservation lows. The model consists of governing partial differential equations of hydrodynamics, geometric area and specific boundary conditions for all unknown functions.*

Key words: *mathematical modeling, hydrodynamics, mechanical mixing, Reynolds number*

ВЪВЕДЕНИЕ

Математическото моделиране е утвърдено като основен метод за изследване на природните явления, на технологиите, на икономическите и социологическите процеси в обществото, в медицината, в биологията, в Космоса, в света на наночастиците. В частност, с бурното развитие на компютърната техника и технологии, математическото моделиране се превърна в мощен инструмент за изследване на преносните явления и процеси, протичащи в различни промишлени химични и биотехнологични производства.

Според световната научна общност по разбъркване, 25% от всички химични процеси се извършват между газ и течност, а 15% от процесите в химичните технологии се реализират в реактори с механично разбъркване и аерация [1]. Загубите в промишлеността поради лошо разбъркване само в САЩ възлизат на над 10 билиона долара. Във фармацевтичната промишленост, поради занижени количества на крайния продукт в следствие на лошо разбъркване, загубите са над 100 милиона долара, а поради лошо мащабиране – над 500 милиона долара [13].

Механичното разбъркване е основна операция в химическата промишленост и биотехнологиите. Това изисква детайлното качествено и количествено изследване на хидродинамиката чрез методите на математическото моделиране, без да се налага скъпото възпроизводство на различните процеси в лабораторни условия.

Моделирането представлява заместването на изследвания обект или явление (оригинала) с негов условен образ или с друг обект (модел) и изучаването на свойствата на оригинала чрез изследването на модела.

Математическите обекти, с които се описват технологичните процеси и явления, най-общо са частни диференциални уравнения, изведени като следствия от основните физични закони за запазване на масата, енергията и количеството на движение на непрекъснатата среда.

Математическият модел е уравнение или система уравнения, които свързват параметрите на състоянието и техните производни спрямо времето и/или пространствените променливи. Уравненията, които дефинират модела често се наричат уравнения на състоянието (governing equations) и заедно със съответните гранични и начални условия представляват математически модел на изучавания обект или явление [4].

В последните години, в резултат на взривообразното увеличаване на компютърните ресурси – бързодействие на процесорите, размери на оперативната памет, паралелни архитектури и алгоритми, все по-често се използва т.нар. директно компютърно моделиране и симулиране.

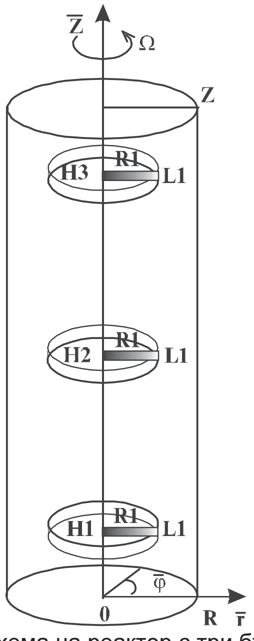
Настоящата статия е посветена на построяването на математически модел, описващ хидродинамиката в биореактори с механично разбъркване, оборудвани с три бъркалки.

ПОСТРОЯВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ НА ХИДРОДИНАМИКАТА В БИОРЕАКТОРИ С МЕХАНИЧНО РАЗБЪРКВАНЕ

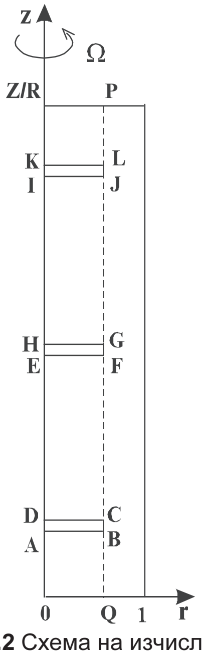
1. Геометрия на областта

За построяването на математически модел за изследване на хидродинамичните процеси е отчетено, че биореакторът представлява цилиндричен съд с плоско дъно с даден радиус R и височина Z. Той е запълнен с реакционна смес, за която може да се предположи, че е хомогенна или нехомогенна течност, в зависимост от конкретната технология. Бъркалките са неподвижно разположени на вал по оста на цилиндъра и се въртят с постоянна зададена ъглова скорост Ω. Движението на флуида в биореактора се предизвиква от въртенето на вала с бъркалките, като целта на разбъркването е хомогенизация на флуида или интензификация на протичащите процеси.

От съображения за удобство, е въведена цилиндрична координатна система $\left(\bar{r},\bar{\varphi},\bar{z}\right)$, която е показана на Фиг.1. Сместа, с която е запълнен реакторът, извършва ососиметрично въртеливо движение. Това движение се индуцира под действието на въртящия се вал, разположен по оста на цилиндъра, с неподвижно прикрепени към него три бъркалки, които представляват еднакви дискове с радиус R1 и дебелина L1. Те са поставени на височини съответно H1, H2 и H3 от дъното. Схемата на реактор с три бъркалки е представена на Фиг.1.



Фиг.1 Схема на реактор с три бъркалки



Фиг.2 Схема на изчислителната геометрична област

За да се построи адекватен математическия модел за изследване на хидродинамиката, е необходимо да има механично подобие между разглежданите биореактори. Това означава да са изпълнени следните условия [5,8,9,10]:

- *Геометрично подобие* – подобие на форма, размери или координати, което се изразява в еднаквост на отношенията между всички съответни размери и равенство на съответните ъгли.
- *Кинематично подобие* – две течения са кинематично подобни, ако в съответните моменти от време отношенията на скоростите на всички съответни флуидни частици е еднакво, а траекториите на движението им са геометрично подобни. С други думи, кинематичното подобие се изразява в пропорционалност и успоредност на скоростните вектори в съответните точки, т.е. в геометрично подобие на скоростните полета.
- *Динамично подобие* – изразява подобието на масите и силите. Две течения са динамично подобни, ако масите на съответните частици или ементарни обеми са в еднакво отношение и ако са равни отношенията на съответните едноименни сили. Динамичното подобие предполага еднаквост на отношението на плътностите, а също така пропорционалност и успоредност на едноименните силови вектори в съответните точки, т.е. геометрично подобие на силовите полета.

Подобните течения се описват с еднакви системи диференциални уравнения, чиито решения предполагат тъждественост на безразмерните гранични и начални условия.

Коефициентите на подобие са постоянни числа, които характеризират отношенията на едноименните физични величини в съответните точки на разглежданите течения.

За да се постигне механично подобие, обикновено се въвежда характерна безразмерна линейна величина. В разглежданата задача, за характерен линеен размер е избран радиусът R на цилиндъра. Всички геометрични параметри са обезразмерени чрез въведения характерен линеен размер R по следния начин:

$$r=\frac{\overline{r}}{R},\ z=\frac{\overline{z}}{R},\ R1=\frac{\overline{R1}}{R},\ L1=\frac{\overline{L1}}{R},\ H1=\frac{\overline{H1}}{R},\ H2=\frac{\overline{H2}}{R},\ H3=\frac{\overline{H3}}{R}. \qquad (1)$$

След обезразмеряването (1), цилиндричната координатна система е (r,φ,z). Направени са още някои опростяващи задачата предположения: тъй като биореакторът представлява цилиндричен съд и бъркалките са дискове, които са прикрепени към оста на цилиндъра, то в геометричната област има симетрия относно всяка равнина, минаваща през оста на симетрия на цилиндъра. Следователно, за движението, което извършва флуида под действието на въртящите се бъркалки в биореактора, може да се предположи, че е въртеливо и ососиметрично.

Ето защо, поради осовата симетрия на течението, се предполага, че неизвестните функции, които описват движението на флуида, зависят само от r и z. В такъв случай, може да бъде разглеждана само половината от осовото сечение на цилиндъра. По този начин, тримерната геометрична област от Фиг.1 се редуцира в т.нар. “изчислителна” геометрична област, която е двумерна. Тази област е показана на Фиг.2. Пространствените променливи r и z се изменят съответно в интервалите $0 \le r \le 1$ и $0 \le z \le Z/R$. Трите бъркалки са областите ABCD, EFGH и IJKL.

2. Основни уравнения на модела

Съществуват два класически подхода за математическо представяне на състоянието и движението на флуид. Единият от тях е методът на Лагранж, който е подобен на методите в кинематиката на абсолютно твърдо тяло. При този подход, координатите на всяка флуидна частица са определени като функция на времето и началните координати на частицата [5]. Другият подход за представяне състоянието и движението на флуид е методът на Ойлер. При този подход, движението на флуида е напълно определено, ако компонентите на скоростта на всяка флуидна частица са зададени функции на координатите на частицата и на времето.

В настоящата статия построяването на математическия модел на хидродинамиката е проведено в ойлерови координати.

Уравнението на непрекъснатостта и уравненията на Навие – Стокс описват движението на вискозните флуиди на базата на представата на Ойлер за състоянието им. Тези уравнения изразяват от математическа гледна точка основните закони за съхранение в механиката на непрекъснатите среди - закона за запазване на масата и закона за запазване на количеството на движение [14]. Общият вид на уравнението на непрекъснатостта и уравненията на Навие-Стокс за вискозен нютонов флуид в ойлерови променливи е следният [8,12,14]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\rho\vec{V} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{V} + \left(\lambda + \frac{\nu}{3}\right) graddiv\vec{V} \qquad (3)$$

където $\vec{V}$ е векторът на скоростта, p е налягането, ρ е плътността на флуида, ν е коефициентът на кинематичния вискозитет на флуида, λ е константа, $\nabla = grad = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ е векторът градиент, $div = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}$ е дивергенцията, $\vec{e}\left(e_1, e_2, e_3\right)$ е единичният вектор в съответната координатна система, $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ е операторът на Лаплас.

При предположението, че флуидът е несвиваем, т.е. плътността ρ не се променя с течение на времето, уравнението на непрекъснатостта (2) добива вида

$$div\vec{V} = 0 \qquad (4)$$

Замествайки уравнение (4) в уравнение (3), последният член в дясната му част отпада и уравнението на Навие-Стокс за вискозен несвиваем хомогенен флуид се записва по следния начин [8,14]

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{V} \qquad (5)$$

В уравнение (5), членът $\left(\vec{V}.\nabla\right)\vec{V}$ описва конвективния пренос, а $\nu\Delta\vec{V}$ е дифузионният член.

Както вече беше споменато, от предположението, че движението на флуида е ососиметрично следва, че всички неизвестни функции зависят само от *r* и *z*. Това означава също, че първата производна по отношение на ъгъла φ на всички неизвестни функции е равна нула, т.е. $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Течението в реактора се изследва достатъчно дълго време след стартиране на разбъркването и се търси стационарно решение, следователно, може да се предположи още, че неизвестните функции не зависят от времето. Така уравнението на Навие – Стокс (5) и уравнението на непрекъснатостта (4), записани във въведената размерна цилиндрична координатна система $\left(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{z}\right)$, при направените допълнителни предположения, са:

$$\frac{\partial\left(\bar{r}\bar{V}_r\right)}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial\left(\bar{r}\bar{V}_z\right)}{\partial \bar{z}} = 0; \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \bar{t}} + \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{V}_\varphi^2}{\bar{r}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \bar{\nu}\left[\bar{\nabla}^2 \bar{V}_r - \frac{\bar{V}_r}{\bar{r}^2}\right]; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \overline{V_\varphi}}{\partial \bar{t}} + \overline{V_r}\frac{\partial \overline{V_\varphi}}{\partial \bar{r}} + \overline{V_z}\frac{\partial \overline{V_\varphi}}{\partial \bar{z}} + \frac{\overline{V_r}\,\overline{V_\varphi}}{\bar{r}} = \bar{\nu}\left[\overline{\nabla}^2\overline{V_\varphi} - \frac{\overline{V_\varphi}}{\bar{r}^2}\right]; \tag{8}$$

$$\frac{\partial \overline{V_z}}{\partial \bar{t}} + \overline{V_r}\frac{\partial \overline{V_z}}{\partial \bar{r}} + \overline{V_z}\frac{\partial \overline{V_z}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \bar{\nu}\overline{\nabla}^2\overline{V_z}; \tag{9}$$

където $\overline{\nabla}^2 \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}$ е операторът на Лаплас в цилиндрични координати, без члена, който съдържа производната по ъгъла φ; ρ е плътността на флуида; $\vec{\mathrm{V}}\left(\overline{V_r}, \overline{V_\phi}, \overline{V_z}\right)$ е векторът на скоростта с неговите компоненти в същата координатна система; $\bar{p}$ е налягането; $\bar{\nu}$ е коефициентът на кинематичния вискозитет на флуида [5,8].

3. Преобразуване на основните уравнения на модела

Законите на динамично подобие на флуидните течения могат да се получат от диференциалните уравнения на Навие-Стокс за движението на реален флуид, в които компонентите на повърхностните и обемните сили фигурират като отделни членове. Условията на динамично подобие се получават, като тези уравнения се запишат в безразмерен вид. За целта, освен въведения по-горе характерен линеен размер R, се въвежда и характерна линейна скорост ΩR.

Уравнения (6) - (9) могат да бъдат записани в безразмерна форма, като се въведат функция на тока ψ, вихър на скоростта ω и момент на тангенциалната скорост M. За да се получи уравнението за преноса на вихъра ω, от (7) и (9) се изключва налягането, като се диференцира първото уравнение по $\bar{z}$ и от него се изважда второто уравнение, диференцирано по $\bar{r}$. Тогава основните уравнения на модела в новите променливи след обезразмеряване са следните:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = -\omega \tag{10}$$

$$U\frac{\partial M}{\partial r} + W\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial M}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right], \tag{11}$$

$$U\frac{\partial \omega}{\partial r} + W\frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\omega U}{r} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial M^2}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\omega}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right], \tag{12}$$

$$U = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z},\ W = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{13}$$

където $\vec{\mathrm{V}}(U,V,W)$ е векторът на скоростта с неговите компоненти във въведената цилиндрична координатна система в безразмерен вид, $U = \frac{\overline{V_r}}{\Omega R}$, $W = \frac{\overline{V_z}}{\Omega R}$, $\mathrm{Re} = \frac{\Omega R^2}{\bar{\nu}}$ е числото на Рейнолдс, R и ΩR са характерните размери на задачата съответно за дължина и скорост, ψ е функцията на тока, $\vec{\omega} = rot\,\vec{\mathrm{V}} = (0, \omega, 0)$ е векторът–вихър на скоростта и $M=Vr$ е големината на момента на тангенциалната скорост в безразмерен вид.

Равенство (10) представлява дефиницията на единствената ненулева компонента на вектора-вихър на скоростта, записана в цилиндрични координати.

Десните части на уравнения (11) и (12) са записани в дивергентен вид. Уравнението на непрекъснатостта, записано в безразмерен вид за разглежданото осесиметрично движение изглежда по следния начин:

$$\frac{\partial(rU)}{\partial r}+\frac{\partial(rW)}{\partial z}=0 \quad . \tag{14}$$

Това уравнение (14) се използва, за да се преработят левите части на уравнения (11) и (12). Така се получава системата частни диференциални уравнения в следната консервативна форма [2,3]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=-\omega \tag{15}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rUM}{\partial r}+\frac{\partial WM}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial M}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right], \tag{16}$$

$$\frac{\partial U\omega}{\partial r}+\frac{\partial W\omega}{\partial z}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial M^2}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\omega}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right]. \tag{17}$$

Получава се система от пет уравнения (13), (15), (16), (17) и пет неизвестни функции: функцията на тока ψ, големината на момента на тангенциалната скорост M, втората компонента ω на вектора–вихър на скоростта $\vec{\omega}$, първата U и третата W компонента на вектора на скоростта $\vec{\mathrm{V}}$. Това са основните уравнения на модела за изследване на хидродинамиката в биоректори с механично разбъркване.

4. Гранични условия

За коректното построяване на математическия модел е необходимо да се дефинират гранични условия за неизвестните функции. Известно е, че цялото разнообразие от течения на вискозни флуиди се описва от уравненията на Навие-Стокс [3,10,11,15]. Различните течения, т.е. различните решения на уравненията на Навие-Стокс, се различават помежду си по граничните и началните условия, както и по някои динамични параметри на течението, като например числото на Рейнолдс (Re). Еднаквостта на това число за различните течения е указание за динамично подобие на разглежданите течения спрямо силите на вътрешното триене. Всъщност, числото на Рейнолдс изразява отношението на инерционните сили и силите на вътрешното триене.

Областта, в която се изследва течението на флуида, т.е. биореакторът с механично разбъркване, има неподвижни и подвижни твърди граници. Неподвижните граници са стените, пода и капака на реактора, а подвижните граници са бъркалките, които се въртят с постоянна ъглова скорост. Върху неподвижните твърди стени на реактора се поставят традиционните гранични условия за полепване и непротичане на вискозния флуид, т.е. поставят се нулеви гранични условия за компонентите на вектора на скоростта $\vec{\mathrm{V}}=0$. Върху бъркалките, скоростта на флуида съвпада с линейната скорост на бъркалките Ωr. Твърдите граници на областта, стените на бъркалките и линията на симетрия представляват линии на тока [11]. Граничните условия за функцията на тока върху тях са:

$$\psi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}=0, \tag{18}$$

където n е единичният нормален вектор към съответната граница.

Така формулираната задача за решаване уравненията на Навие - Стокс е отворена, тъй като за функцията на тока има две гранични условия, а за вихъра на скоростта липсва гранично условие [11,15]. Това води до съществени затруднения при решаването, ако двете уравнения се разглеждат поотделно – задачата за определяне функцията на тока е преопределена, а тази за определяне вихъра на скоростта е неопределена.

Ето защо, обикновено, граничните условия за вихъра на скоростта се изчисляват от стойностите на функцията на тока в околност на границите, което обяснява необходимостта от едновременното решаване на двете уравнения (15) и (17). Граничните условия за вихъра ω се определят на базата на получените стойности на функцията на тока [6,7]. Върху линията на симетрия – оста на цилиндъра, се поставя нулево гранично условие за вихъра ω = 0 [11].

Граничните условия за първата U и третата W компоненти на скоростта, функцията на тока ψ и големината на момента на тангенциалната скорост M са дадени в Таблица 1.

Таблица 1. Физични гранични условия за U, W, ψ, M

Граница	**Координати**	**Компонента *U* на скоростта**	**Компонента *W* на скоростта**	**Функция на тока ψ**	**Момент *M***
Дъно	$z = 0$ $0 \le r \le 1$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = 0$
Капак	$z = Z/R$ $0 \le r \le 1$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = 0$
Стена	$r = 1$ $0 \le z \le Z/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = 0$
Линия на симетрия	$r = 0$ $0 \le z \le Z/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = 0$
Долна страна AB на първия диск	$z = H1/R$ $0 \le r \le R1/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = r^2 / R^2$
Горна страна CD на първия диск	$z = (H1+L1)/R$ $0 \le r \le R1/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = r^2 / R^2$
Вертикална страна BC на първия диск	$r = R1/R$ $H1/R \le z \le (H1+L1)/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = r^2 / R^2$
Долна страна EF на втория диск	$z = H2/R$ $0 \le r \le R1/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = r^2 / R^2$
Горна страна GH на втория диск	$z = (H2+L1)/R$ $0 \le r \le R1/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = r^2 / R^2$
Вертикална страна FG на втория диск	$r = R1/R$ $H2/R \le z \le (H2+L1)/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = r^2 / R^2$
Долна страна IJ на третия диск	$z = H3/R$ $0 \le r \le R1/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = r^2 / R^2$
Горна страна KL на третия диск	$z = (H3+L1)/R$ $0 \le r \le R1/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = r^2 / R^2$
Вертикална страна JL на третия диск	$r = R1/R$ $H3/R \le z \le (H3+L1)/R$	$U = 0$	$W = 0$	$\psi = 0$	$M = r^2 / R^2$

С това математическият модел на хидродинамиката в биореактори с механично разбъркване, оборудвани с три бъркалки е построен и следва да се намери решение на системата (13), (15), (16), (17), което удовлетворява граничните условия от Таблица 1 и граничните условия за вихъра ω [6,7], в изчислителната геометрична област от Фиг.2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представена е същността на математическото моделиране. Описани са основните принципи, които се следват при създаването на един математически модел в механиката на непрекъснатите среди.

Построен е безразмерен математически модел, описващ хидродинамиката в биореактори с механично разбъркване, оборудвани с три бъркалки. Описана е геометричната област на изследване, изведени са основните уравнения на модела, формулирани са конкретните физични гранични условия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Влаев С. Д. Хидродинамика и масообмен в реактори с механично разбъркване и аерация – автореферат на дисертационен труд за присъждане на научната степен "Доктор на техническите науки", 2003

[2] Герасимов Б., Вислов В. и др., Математическое моделирование дискового смесителя, Москва, 1987

[3] Гольдштик М.А., Вихревые потоки, Наука, Новосибирск, 1981

[4] Желева И., Математическо моделиране на хидродинамиката и топломасообмена в химикотехнологични процеси, Дисертация за присъждане на научна степен „Доктор на науките", Русе, 2015

[5] Запрянов Запрян, Хидродинамика, УИ Св. Климент Охридски, София, 1996

[6] Лечева А., Иванка Желева - научен ръководител, Числено изследване на хидродинамиката в цилиндрични реактори с механично разбъркване, Дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен „Доктор", Русе, 2013

[7] Лечева А., Поставяне на граничните условия за ненулевата компонента на вектора-вихър на скоростта при хидродинамични задачи с изпъкнал в потока ъгъл, Научни трудове РУ "А. Кънчев" 2004, Том 41, серия 7.2, Майски научни четения, стр. 176-183

[8] Ландау Л., Лифшиц Е., Хидродинамика, Наука и изкуство, София, 1978

[9] Марков К., Математическо моделиране, УИ „Св. Климент Охридски", Университетска библиотека № 420, 2002

[10] Полежаев В. и др., Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье – Стокса, Наука, Москва, 1987

[11] Роуч П., Вычислительная гидродинамика, Мир, Москва, 1980

[12] Dryden Hugh, Murnagham Francis, Bateman H., Hydrodynamics, Dover Publications Inc., 1956

[13] Etchells III A.W., Fluid mixing still needed for the process industries in the 21st century, AICHE Webinar, February 2010, apps.aiche.org

[14] Foias C., Manley O., Rosa R., Temam R., Navier-Stokes equations and turbulence, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 2001

[15] Rempfer D., On boundary conditions for incompressible Navier-Stokes problems, Applied Mechanics Rewiews, ASME, Vol.59, pp. 107-125, 2006

За контакти:

доц. дмн Иванка Желева, Катедра "Топлотехника, хидравлика и екология", Русенски университет "Ангел Кънчев", тел.: 082-888 585, e-mail: izheleva@uni-ruse.bg

гл. ас. д-р Анна Лечева, Катедра „Математика", Русенски университет "Ангел Кънчев", тел.: 082-888 430, e-mail: alecheva@uni-ruse.bg