

SAT-2G.303-1-CST-05

Algorithm for calculating the transportation problem and its solution in Excel

Marin Marinov, Lora Marinova

Алгоритъм за изчисление на транспортната задача и решението ѝ в Excel

Марин Маринов, Лора Маринова

Despite its name originating from the initially considered problems, the method of the transportation task can be applied to various types of tasks related to determining the routes not only in the transport, but for example, in computer networks and many others.

Main advantage of the algorithmic tasks is that can be solved by calculating machine, which significantly expands their practical application related to processing of huge datasets and performing numerous computing operations.

Key words: *algorithms, allocation, composing shifts and schedules, management of stocks, MS Excel, processing and expenditure of resources, simplex method, Solver, the transportation problem.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Въпреки името си, произхождащо от първоначално решаваните проблеми, методът на Транспортната задача се прилага при решаване на разнообразни типове задачи свързани с определяне на маршрути не само в транспорта, а например и в компютърните мрежи; разпределение, обработка и изразходване на ресурси; управление на запаси; съставяне на смени и графици и мн. др.

Графично изобразено решението е многостен, което означава, че задачата винаги има решение, а в някои случаи може да има повече от един набор базови уравнения, които са със стойности равни на търсеният минимум (максимум) – възможни са алтернативни решения.

ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Формулировка.

В постановката на задачата се приема, че някакви количества от еднородни ресурси (стоки, материали..) се намират при $A_1...A_n$ производители (складове). Те трябва да се разпределят между $B_1...B_m$ потребители. За всеки маршрут е определена транспортната цена c_{ij} за единица продукция. Броят на независимите уравнения в системата ограничения е равен на сбора от броя на производителите и потребителите, намалени с единица.

		ПОТРЕБИТЕЛИ					
		B_1	B_2	B_3	B_4		
ПРОИЗВОДИТЕЛИ	A_1	17	28	5	3	110	КОЛИЧЕСТВА, НАЛИЧНИ ПРИ ПРОИЗВОДИТЕЛИТЕ
	A_2	2	1	25	15	110	
	A_3	16	3	1	12	80	
	50	90	90	70	300		
		КОЛИЧЕСТВА, НЕОБХОДИМИ ЗА ПОТРЕБИТЕЛИТЕ					

клетки с транспортната цена

Табл. 1. Елементи на транспортната таблица.

В класическата задача се търси оптималното разпределение на количествата от производителите, според потребностите на потребителите, при което транспортните разходи са минимални (в някои разновидности на задачата може да се търси и максимум).

2. Алгоритъм.

Основно предимство на алгоритмизираните задачи е, че могат да бъдат решавани машинно, което значително разширява практическото им приложение свързано с обработка на огромни масиви от данни и извършване на многобройни изчислителни операции. Тогава вече се проявяват и са от значение и другите съществени преимущества на алгоритмите, а именно универсалност при прилагането им за различни типове задачи, еднозначно постигане на резултати, възможност за модифициране и инвариантност.



Фиг. 1. Алгоритъм за решаване на транспортната задача.

3. Решение.

Първа стъпка при решаване на транспортната задача е намирането на начален опорен план. За разлика от общата задача на линейното оптимиране при транспортната задача това става по-лесно, като се използва транспортната таблица (Табл. 1).

3.1. Попълване на транспортната таблица.

3.1.1. По Метод на северозападния ъгъл (Табл. 2.).

Основно предимство на този метод е, че е по-лесен за алгоритмизиране и програмна реализация. Името на метода произлиза от това, че на картографските

изображения север е в горния край, а запад отляво, т.е. запълването на таблицата започва от най-горната, лява клетка и се запълва в посока

50	17	60	28		5		3	110	110-50=60; 60-60=0
	2	30	1	80	25		15	110	110-30=80; 80-80=0
	16		3	10	1	70	12	80	80-10=70; 70-70=0
50		90		90		70		300	
50-50		90-60		90-80		70-70			
0		30-30		10-10		0			
		0		0		0			

надясно и надолу в последователността на номерата №1-№6. Сравнява се първата наличност (110) с първата доставка (50). Вижда се, че може напълно да се покрие

Табл. 2. Метод на северозападния ъгъл. заявката на първия потребител(50),

а при първия доставчик остава количеството $110-50=60$ (стъпка №1). Преминува се към съседната клетка, където необходимото количество за потребителя е 90, но наличното в склада 60 - това е максималното количество налично при първия производител и то ще бъде доставено на втория потребител (стъпка №2), при който ще остане дефицит от 30 единици, запълнени на стъпка №3 от втория производител. По аналогичен начин се попълва цялата таблица.

3.1.2. По Метод на минимален елемент(Табл. 3.).

Предимство на този метод е, че първоначалният опорен план е по-близък до оптималния. По този метод първи се запълват клетките с най-нисък теглови коефициент (транспортни разходи за единица товар). При еднакви стойности се избира маршрут, с по-голям капацитет, а когато и тези възможности са равни, може да се избере коя да е от двете (например според индексите в таблицата). В Табл. 3. от №1 до №6 са показани стъпките на изграждане на базов опорен план.

3.1.3. Изродени опорни планове.

Когато в някоя клетка едновременно се нулират количествата и на производителите, и на потребителите и се получи едновременно изключване и на реда, и на стълба, броят на запълнените клетки в опорния план се намалява с единица. Такъв опорен план се нарича изроден. В такъв случай следващата клетка от стълба (реда) се запълва с базисна нула.

	17		28		5		3		
30	№6			10	№5	70	№4	110	40
	2		1		25		15		
20	№3	90	№1					110	20
	16		3		1		12		
				80	№2			80	
50		90		90		70		300	
30				10					

Табл. 3. Попълване по Метода на минимален елемент.

		14		13		2		0	
3		17		28		5		3	
	30			10		70			
-12		2		1		25		15	
	20		90						
-1		16		3		1		12	
					80				

Табл. 4. Определяне на оценките (потенциалите) D_{ij}

3.2. Проверка за оптималност по метода на базовите потенциални.

За запълнените (базовите) клетки се определят потенциалите така, че сумата им да бъде равна на транспортните разходи за всяка запълнена клетка, т.е. $u_i + v_j = c_{ij}$ за всяка пълна клетка. За u_1 се задава произволна стойност, например 3. **В общия случай, за улеснение на изчисленията, се избира потенциал от ред или стълб с най-много запълнени клетки и му се дава стойност нула.**

Определят се оценките (потенциалите) $D_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ за свободните клетки.

$$D_{12} = 3 + 13 - 28 < 0; \quad D_{23} = -12 + 2 - 25 < 0;$$

$$D_{24} = -12 + 0 - 15 < 0; \quad D_{31} = -1 + 14 - 16 < 0$$

$$D_{32} = -1 + 13 - 3 = 9 > 0; \quad D_{34} = -1 + 0 - 12 < 0;$$

Базовият план е оптимален, ако всички клетки са с неположителни оценки.

		14		13		2		0
3	-	17		28	+	5		3
		30				10		70
-12	+		2	-		1		25
		20		90				
-1			16	+		3	-	1
						80		12

Табл. 5. Избор на цикъл за включване на клетката с положителна оценка.

		17		28		5		3
					40		70	
		2		1		25		15
50			60					
		16		3		1		12
			30		50			

Табл. 6. Преобразуване към подобрен опорен план.

3.3. Преобразуване към подобрен опорен план.

Понятието цикъл определя затворена, начупена линия с върхове в клетките на таблицата, удовлетворяваща условията:

- всяка отсечка лежи изцяло в един ред или стълб;
- двете отсечки, които излизат от всеки връх на цикъла, лежат – едната в ред, другата в стълб на таблицата.

За примера №3,2 е единствената клетка с положителна оценка. Построява се цикъл с начало тази клетка, и запълнени останали върхови клетки. Започвайки от изходната, се поставят знаци „+” и „-” на върховете на цикъла.

Определя се минималното съдържание на клетките, означени със знак минус. В конкретния случай то е 30. Това число се изважда от "минусовите" клетки и се прибавя към "плюсовите". **В случай, че има повече от една "минусова" клетка с минимална стойност, само една от тях отпада (тази с най-голям транспортен разход), а в другите се записват базови нули.**

Идеята е, че като се добави стойност към една клетка, същото количество трябва да се извади от вече наличното, за да се запази сумата към същия потребител. Например за трети ред +30 в клетка №3,2 (нова базисна); $80-30=50$ в клетка №3,3; сумата по реда се запазва $30+50=80$. По същата логика се запазва и балансът в колоните. Подобрената таблица е Табл. 6.

С нея се постъпва по аналогичен начин. Като се използват пълните клетки се определят потенциалите. Оценките за празните клетки са неотрицателни, което показва, че планът е оптимален. Транспортните разходи са : $40.5+70.3+50.2+60.1+30.3+50.1=710$.

3.4. Свеждане на разширени случаи до базовия вариант.

3.4.1. Транспортна задача от отворен тип (не балансирана задача).

Когато общият обем на производството не е равен на общия обем на потреблението, т.е. балансът е нарушен, задачата е от отворен тип.

Когато производството (/потреблението) е в по-голям обем се въвежда фиктивен потребител (/производител) за да се постигне баланс. Транспортните разходи се задават нулеви и задачата се изчислява като заявките като доставките към фиктивния потребител (/от фиктивния производител) няма да бъдат изпълнени.

3.4.2. Транспортна задача със забрани.

Когато между някои от производителите и потребителите има ограничение да не се транспортират стоки, забраните се налагат като се въведе теглови коефициент $c > c_{\max}(a_1+a_2+\dots+a_m)$ където $c_{\max}$ е най-големият теглови коефициент (най-висока транспортна цена и се умножава по сумата на общия производствен обем.

4. Изчислителна схема на транспортната задача по симплекс метода с възможностите на Solver в MS Excel.

За решаване на транспортни задачи с Excel се въвеждат входни таблици с коефициентите на целевата функция и на системите с ограничения.

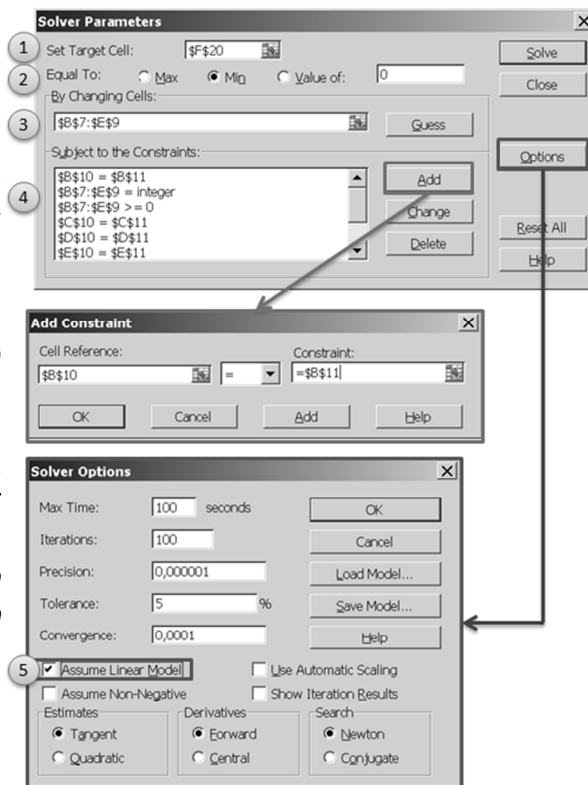
[illegible]

Фиг.2. Изглед с получените резултати

В менюто Solver Parameters се указват:

1. клетка, в която се получава резултата на целевата функция
2. търсената цел е минимум
3. клетките, чиято стойност се изменя, за да се промени стойността в целевата клетка
4. с бутона Add се добавят условията за неотрицателност и другите ограничения
5. с бутона Options се избира решение по линеен модел.

Получените резултати за стойностите на неизвестните в целевата функция и нейният минимум в разглеждания пример са: 0, 0, 40, 70, 50, 60, 0, 0, 0, 30, 50, 0 / **710** – *резултатът съвпада с пресметнатия по метода за изчисление на транспортната задача.*



Фиг.3. Настройки и указване на параметри

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Транспортната задача е подмножество на задачите решавани чрез симплекс метода затова транспортните задачи могат да бъдат решавани по симплекс метода. Това се потвърждава и от решението с Excel и може да служи за проверка и за отстраняване на логически и изчислителни грешки. Но като специфичен частен случай, емпиричният метод, показан по-горе, води до по-лесно, кратко и ефективно решение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гатев, Г. *Изследване на операциите. Избор на решения при определеност. Книга 1*, изд. „Технически университет - София“, София, 2005.
- [2] Данциг, Дж. *Линейно програмиране и неговото приложение*, Държавно издателство – Варна, 1973.
- [3] Кузнецов, А.Б. *Математическое программирование*, Минск, 1984.

- [4] Лалова, Н. *Ръководство по математическо програмиране*, изд. „Наука и изкуство“, София, 1980.
- [5] Пантелеев, А. *Методы оптимизации в примерах и задачах*, изд. „Высшая школа“, Москва, 2005.
- [6] Трифонов, Р. *Ръководство по изследване на операциите и приложно програмиране*, изд. „Авангард прима“, София, 2013.
- [7] Шапкин, А. *Математические методы и модели исследования операций*, трето издание, изд. „Дашков и Ко“, Москва, 2006.

За контакти:

М. Маринов, Катедра “Компютърни системи и технологии”, ТУ-София, тел.: 0886090238, m.marinov1516@gmail.com

Л. Маринова, Катедра “Компютърни системи и технологии”, ТУ-София, lek_iv5@abv.bg