FRI-1.405B-1-MIP-03

SOME HOLDER APPROXIMATIONS AMONG THE ARITHMETIC, HARMONIC AND QUADRATIC MEANS

Assist. Prof. Todor Mitev, PhD
Department of Mathematics,
“Angel Kanchev” University of Ruse
Phone: +359 82-888 634
E-mail: tmitev@uni-ruse.bg

Abstract: *Let* A_n , H_n , S_n *be the arithmetic, harmonic and quadratic means respectively for the positive real numbers* a_1 , a_2 ,… , a_n. *In this article we prove the following theorem:*

Theorem. For $n=5$ $\quad A_n \ge (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \le \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Keywords: *Arithmetic mean, Harmonic mean, Quadratic mean, Inequalities*
JEL Codes:

ВЪВЕДЕНИЕ

Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ са положителни реални числа и както е прието означаваме:

$$M_p = \begin{cases} \min\{a_i\} \quad i=1,2,...,n \quad p=-\infty \\ \max\{a_i\} \quad i=1,2,...,n \quad p=+\infty \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \quad p=0 \\ \left(\dfrac{a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \ne \pm\infty , \quad p \ne 0. \end{cases}$$

Означаваме съответно

$$H_n = M_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \quad , \quad A_n = M_1 = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \quad , \quad S_n = M_2 = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$$

.

Добре е известно, че M_p е растяща функция на p , т.е. $M_{p_1} > M_{p_2}$ за $p_1 > p_2$ (това е доказано например в (Hardy, G., J.E. Littlewood & G. Polya (1952))), като равенство се достига само когато

$a_1 = a_2 = ... = a_n$.

При горните означения следва, че $H_n \le A_n \le S_n$.

В [5] са доказани следните теореми:

Теорема 1.1 *Неравенството*

$$A_3 \ge (1-\lambda)H_3 + \lambda S_3 \quad \textit{е изпълнено} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \le \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Теорема 1.2 *Неравенството*

$A_3 \le (1-\lambda)H_3 + \lambda S_3$ *е изпълнено* $\Leftrightarrow$ $\lambda \ge \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Теорема 1.3 *Неравенството*

$A_4 \ge (1-\lambda)H_4 + \lambda S_4$ *е изпълнено* $\Leftrightarrow$ $\lambda \le \frac{1}{2}$.

Теорема 1.4 *Неравенството*

$A_4 \le (1-\lambda)H_4 + \lambda S_4$ *е изпълнено* $\Leftrightarrow$ $\lambda \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Теорема 1.5 *Неравенството*

$A_5 \le (1-\lambda)H_5 + \lambda S_5$ *е изпълнено* $\Leftrightarrow$ $\lambda \ge \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Известни са много неравенства между класическите средни (т.е. M_p), за повече информация могат да се използват например (Hardy, G., J.E. Littlewood & G. Polya (1952), Sato, N. (2001), Mitev, T. (2003)). Но неравенства от горепосочения вид са разглеждани само в (Mitev, T. (2016)). При доказателствата на **Теорема 1.1 – Теорема 1.5** се прилага метод, който може да се използва при доказване на хомогенни симетрични неравенства между 3, 4 или 5 произволни положителни числа. Прилагайки този метод ще докажем следната

Теорема 3. *Неравенството*

$A_5 \ge (1-\lambda)H_5 + \lambda S_5$ *е изпълнено* $\Leftrightarrow$ $\lambda \le \frac{\sqrt{5}}{5}$.

ОПИСАНИЕ И СЪЩНОСТ НА МЕТОДА

Нека разгледаме неравенството (2.1) $F(a,b,c) \ge 0$ (или $F(a,b,c) > 0$), където $F(a,b,c)$ е хомогенна симетрична функция на положителните реални променливи a,b,c. Метод за доказване на неравенството (2.1), когато F е хомогенен симетричен полином от трета степен е предложен от Stolarsky в (Stolarsky K. B. (1971)). Други методи за доказване на неравенства от типа на (2.1) са разгледани например в (Hardy, G., J.E. Littlewood & G. Polya (1952), Sato, N. (2001), Mitev, T. (2003))

Описание на нашия метод:

Ще искаме F да може да се представя като явна функция на елементарните симетрични полиноми $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$, $\sigma_3 = abc$. Тъй като F е хомогенна можем да считаме, че $\sigma_1 = a+b+c = 1$. Означаваме $t = \sigma_2 = ab+bc+ca$, $p = \sigma_3 = abc$.

Тогава $F(a,b,c) = f(t,p)$.

Следните две леми дават някои оценки за p и t, както и неравенства между тях. Навсякъде по-долу ще считаме, че поне две от a,b,c не са равни помежду си.

Лема 2.1. Изпълнени са неравенствата

$$0 < p < \frac{1}{27} \quad , \quad 0 < t < \frac{1}{3}.$$

Лема 2.2 Изпълнени са неравенствата

$t > \sqrt{3p}$, $t < \dfrac{1+9p}{4}$.

Тогава фиксираме p **(** $p \in (0;\frac{1}{27})$ **) и разглеждаме** $f(t,p)$ **като функция на** t **за** $t \in (\sqrt{3p}\,;\frac{1+9p}{4})$.

В [5] е показан пример за вярно неравенство , при който не може да се приложи този метод защото интервала $(\sqrt{3p}\,;\frac{1+9p}{4})$ не съвпада с множеството от стойностите на t и затова се нуждаем от следната

Теорема 2. *Нека* p *е фиксирано число от интервала* $p \in (0;\frac{1}{27})$ **.** *Тогава са изпълнени следните:*

(i) *Уравненията* $2x^3 - x^2 + p = 0$ *и* $x^3 - 2x^2 + x - 4p = 0$ *имат точно по два корена в интервала* $(0\,;1)$ *, съответно* $x_1\,, x_2$ *и* $x_3\,, x_4$ *, при това са изпълнени неравенствата* $0 < x_3 < x_1 < \frac{1}{3} < x_2 < x_4 < 1$ *и* $x_2 < \frac{1}{2}$.

(ii) *Нека* a, b, c *са положителни числа: поне две от тях не са равни,* $abc = p$ *и* $a+b+c=1$.

Тогава множеството от стойности на $t = ab+bc+ca$ *съвпада с интервала* $[m\,;M]$, *където* $m = \min\{g(x_1)\,; h(x_4)\}$, $M = \min\{g(x_2)\,; h(x_3)\}$, $g(x) = 2x - 3x^2$, $h(x) = \frac{1}{4}(1+2x-3x^2)$ *и* x_1, x_2, x_3, x_4 *са определени в* (i).

(iii) *Изпълнени са неравенствата*

$m > \sqrt{3p}$, $M < \dfrac{1+9p}{4}$.

Освен това, когато

(2.2) $t = m = 2x_1 - 3x_1^2$, *то* $p = x_1^2 - 2x_1^3$

(2.3) $t = M = 2x_2 - 3x_2^2$, *то* $p = x_2^2 - 2x_2^3$

(2.4) $t = m = \frac{1}{4}(1+2x_4-3x_4^2)$, *то* $p = \frac{1}{4}(x_4^3 - 2x_4^2 + x_4)$

(2.5) $t = M = \frac{1}{4}(1+2x_3-3x_3^2)$, *то* $p = \frac{1}{4}(x_3^3 - 2x_3^2 + x_3)$

(x_1, x_2, x_3, x_4 *са определени в* (i), m, M *са определени в* (ii) *).*

(iv) *Когато е изпълнено някое от* $(2.2)-(2.5)$ *, тогава точно две измежду числата* a, b, c *(определени в* (ii) *) са равни.*

Забележка. Доказателствата на двете леми и на теоремата са изложени в (Митев, Т. (2016)).

ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ТЕОРЕМА 3.

Нека за някое фиксирано число λ неравенството

(3.1) $$\frac{a+b+c+d+e}{5} \ge (1-\lambda)\frac{5}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}} + \lambda\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5}}$$

е вярно за произволни положителни числа a,b,c,d,e.

Заместваме в (3.1) $a=b=c=d=\varepsilon$, $e=1-4\varepsilon$.

Когато $\varepsilon \to +0$ *получаваме, че* $\lambda \le \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Следователно за да докажем **Теорема 3** е достатъчно да докажем

(3.1) за $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (да припомним, че $H_n \le A_n \le S_n$) т.е.

(3.2) $$A_5 \ge (1-\frac{\sqrt{5}}{5})H_5 + \frac{\sqrt{5}}{5}S_5 .$$

Доказателство:

За $a=b=c=d=e$ очевидно се достига равенство. Можем да считаме, че $a+b+c+d+e=1$, $a \le b \le c \le d \le e$ и поне две от числата не са равни.

Полагаме $a=a_1\delta\theta,\ b=b_1\delta\theta,\ c=c_1\delta\theta,\ d=\delta(1-\theta),\ e=1-\delta$.

Явно $a_1+b_1+c_1=1$, $\delta \in (0;\frac{4}{5})$, $\theta \in (0;\frac{3}{4}]$. Тогава

(3.2) $\Leftrightarrow$ (3.3) $F(p,t,\delta,\theta) \le 1$

където

$p=a_1+b_1+c_1$, $t=a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1$ и

$$F(p,t,\delta,\theta)=\frac{5(5-\sqrt{5})p\delta(1-\delta)\theta(1-\theta)}{(1-\delta)(1-\theta)t+\theta(1-\delta\theta)p} + \sqrt{\delta^2\theta^2(1-2t)+\delta^2(1-\theta)^2+(1-\delta)^2} .$$

Случай 1. $a_1=b_1=c_1\ (=\frac{1}{3})$. Тогава $p=\frac{1}{27}$ и $t=\frac{1}{3}$. Следователно

(3.3) $\Leftrightarrow$ (3.4) $f(\delta,\theta) \le 1$

Където

$$f(\delta,\theta)=\frac{5(5-\sqrt{5})\delta(1-\delta)\theta(1-\theta)}{9(1-\delta)(1-\theta)+\theta(1-\delta\theta)} + \sqrt{\frac{\delta^2\theta^2}{3}+\delta^2(1-\theta)^2+(1-\delta)^2}$$

и $\delta \in (0;\frac{4}{5})$, $\theta \in (0;\frac{3}{4}]$.

Последователно получаваме

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\delta(3-4\theta)f_1(\delta,\theta) ,$$

където

$$f_1(\delta,\theta)=\frac{5(5-\sqrt{5})\delta(1-\delta)^2(3-2\theta)}{[9(1-\delta)(1-\theta)+\theta(1-\delta\theta)]^2} - \frac{\delta}{3\sqrt{\frac{\delta^2\theta^2}{3}+\delta^2(1-\theta)^2+(1-\delta)^2}} ,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial\delta}=-\frac{10(5-\sqrt{5})(1-\delta)\theta(1-\theta)}{[9(1-\delta)(1-\theta)+\theta(1-\delta\theta)]^3} - \frac{1-\delta}{3\sqrt{[\frac{\delta^2\theta^2}{3}+\delta^2(1-\theta)^2+(1-\delta)^2]^2}} < 0 .$$

Следователно $f_1(\delta,\theta)$ е намаляваща по отношение на δ.

Лесно се проверява, че $f_1(\frac{4}{5},\theta)>0$ за $\theta\in(0;\frac{3}{4}]$.

Следователно $f_1(\delta,\theta)>0$ за $\delta\in(0;\frac{4}{5})$, $\theta\in(0;\frac{3}{4}]$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial\theta}\geq 0$.

Тогава

(3.4) $\Leftrightarrow$ (3.5) $f(\frac{3}{4},\delta)\leq 2$, $f(\frac{3}{4},\delta)=\frac{10(5-\sqrt{5})\delta(1-\delta)}{16-15\delta}+\sqrt{5\delta^2-8\delta+4}$.

Доказателство на (3.5):

За краткост пропускаме техническите опростявания.

(3.5) $\Leftrightarrow$ $(5\delta-4)^2 g(\delta)\geq 0$, където $g(\delta)=\dfrac{2(5-\sqrt{5})(\frac{2\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5\delta^2 8\delta+4})}{16-15\delta}-1$.

Лесно се проверява, че $g'(\delta)>0$ и $g(0)=0$, с което приключва доказателството.

Случай 2. Поне две измежду числата a_1, b_1, c_1 не са равни.

Очевидно $\frac{\partial F(p,t,\delta,\theta)}{\partial t}<0$. Тогава трябва да докажем, че (3.6) $F(m)\leq 1$ (m е от **Теорема 2**). Съгласно последната теорема разглеждаме следните два случая:

(i) $t=2x-3x^2$, $p=x^2-2x^3$, $x\in(0;\frac{1}{3})$ и

(ii) $t=\frac{1}{4}(1+2x-3x^2)$, $p=\frac{1}{4}x(1-x)^2$, $x\in(\frac{1}{3};1)$.

Доказателство в случай (i)*:*

(3.3) $\Leftrightarrow$ (3.6) $G(x,\delta,\theta)\leq 1$, където

$$G(x,\delta,\theta)=\frac{5(5-\sqrt{5})\delta(1-\delta)\theta(1-\theta)(x-2x^2)}{(1-\delta)(1-\theta)(2-3x)+\theta(1-\delta\theta)(x-2x^2)}+\sqrt{\delta^2\theta^2(6x^2 4x+1)+\delta^2(1-\theta)^2+(1-\delta)^2}$$

.

От горното последователно получаваме, че

(3.7) $\frac{\partial G(x,\delta,\theta)}{\partial x}=2\delta\theta(1-3x)G_1(x,\delta,\theta)$, където

$$G_1(x,\delta,\theta)=\frac{5(5-\sqrt{5})(1-\delta)^2(1-\theta)^2(1-x)}{[(1-\delta)(1-\theta)(2-3x)+\theta(1-\delta\theta)(x-2x^2)]^2}-\frac{\delta\theta}{\sqrt{\delta^2\theta^2(6x^2-4x+1)+\delta^2(1-\theta)^2+(1-\delta)^2}}$$

.

$$\frac{\partial G_1(x,\delta,\theta)}{\partial\delta}=-\frac{10(5-\sqrt{5})(1-\delta)\theta^2(1-\theta)^3(1-x)(x-2x^2)}{[(1-\delta)(1-\theta)(2-3x)+\theta(1-\delta\theta)(x-2x^2)]^2}-\frac{(1-\delta)\theta}{\sqrt{[\delta^2\theta^2(6x^2-4x+1)+\delta^2(1-\theta)^2+(1-\delta)^2]^3}}<0$$

Следователно

(3.8) G_1 е намаляваща по отношение на δ.

Означаваме $g(x,\theta)=G_1(x,\frac{4}{5},\theta)$. Тогава

$$g(x,\theta)=-\frac{5(5-\sqrt{5})(1-\theta)^2(1-x)}{[(1-\theta)(2-3x)+\theta(5-4\theta)(x-2x^2)]^2}-\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2+\frac{1}{16}}}$$ и

$$\frac{\partial g(x,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{10(5-\sqrt{5})(4\theta^2-8\theta+5)(1-\theta)(1-x)(x-2x^2)}{[((1-\theta)(2-3x)+\theta(5-4\theta)(x-2x^2)]^3} - \frac{\frac{17}{16}-\theta}{\sqrt{[\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta\ )^2+\frac{1}{16}]^3}} < 0$$

.

От последното следва че $g(x,\theta)$ е намаляваща по отношение на θ.

Лесно се проверява, че $g(x,\frac{3}{4}) > 0$.

Сега от последното и от (3.8) и (3.7) следва, че (3.7) $\frac{\partial G(x,\delta,\theta)}{\partial x} > 0$.

Но $G(\frac{1}{3},\delta,\theta) \le 1$ е точно (3.5), което е доказано.

С това приключва доказателството на (i).

Доказателство в случай (ii)*:*

(3.3) $\Leftrightarrow$ (3.9) $G(x,\delta,\theta) \le 1$, където

$$G(x,\delta,\theta) = \frac{5(5-\sqrt{5})\delta(1-\delta)\theta(1-\theta)(x-x^2)}{(1-\delta)(1-\theta)(1+3x)+\theta(1-\delta\theta)(x-x^2)} + \sqrt{\frac{1}{2}\delta^2\theta^2(3x^2-2x+1)+\delta^2(1-\theta)^2+(1-\delta)^2}$$

.

От горното последователно получаваме, че

(3.10) $\frac{\partial G(x,\delta,\theta)}{\partial x} = \delta\theta(3x-1)G_1(x,\delta,\theta)$, където

$$G_1(x,\delta,\theta) = -\frac{5(5-\sqrt{5})(1-\delta)^2\theta(1-\theta)^2(1+x)}{[(1-\delta)(1-\theta)(1+3x)+\theta(1-\delta\theta)(x-x^2)]^2} + \frac{\delta\theta}{2\sqrt{\frac{1}{2}\delta^2\theta^2(3x^2-2x+1)+\delta^2(1-\theta\ )^2+(1-\delta)^2}}$$

$$\frac{\partial G_1(x,\delta,\theta)}{\partial\delta} = \frac{5(5-\sqrt{5})(1-\delta)^3\theta(1-\theta)^3(1+x)(x-x^2)}{[(1-\delta)(1-\theta)(1+3x)+\theta(1-\delta\theta)(x-x^2)]^3} + \frac{(1-\delta)\theta}{2\sqrt{[\frac{1}{2}\delta^2\theta^2(3x^2-2x+1)+\delta^2(1-\theta\ )^2+(1-\delta)^2]^3}} > 0$$

$\Rightarrow$ $G_1(x,\delta,\theta)$ е растяща по отношение на δ и освен това $G_1(0,\delta,\theta) < 0$.

От (3.10) следва, че е достатъчно да проверим верността на

(3.11) $G(\frac{1}{3},\delta,\theta) \le 1$ и

(3.12) $G(\frac{1}{3},\delta,\theta) \le 1$.

Но те са верни, защото (3.11) е точно (3.5) (което е доказано) и

(3.12) $\Leftrightarrow$ $\delta(\theta^2-\theta+1) \le 1$ (последното е вярно, защото $\delta \in (0;\frac{4}{5})$, $\theta \in (0;\frac{3}{4}]$).

С това приключва доказателството на този случай и следователно Теорема 3 е доказана.

Забележка. От доказателството следва, че равенство се достига, точно когато всички числа са равни помежду си.

REFERENCES

Hardy, G., J.E. Littlewood & G. Polya (1952). Inequalities. Cambridge Mathematical Library (2-nd ed.)

Sato, N. (2001). Symmetric polynomial inequalities, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, 27, 529-533.

Stolarsky K. B. (1971). Cubic triangle inequalities, Amer. Math. Monthly, 78, 879-881.

Mitev, T. (2003). New inequalities between elementary symmetric polynomials, J. Inequal. Pure and Appl. Math. 4 (2). Article 48.

Mitev, T. (2016). Some new inequalities among the arithmetic, geometric, harmonic and quadratic means, Mathematics and Informatics, 59 (6), 626-656.