FRI-2G.305-1-ERI-07

METHODS OF INSTRUCTION IN STRAIGHT CIRCULAR CYLINDER[6]

Yoana Nedelcheva, MSc
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences and Edducation
“Angel Kanchev” University of Ruse
Phone: +359 882 049 001
E-mail: anizko@abv.bg

Assoc. Prof. Emilia Velikova, PhD
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences and Edducation
“Angel Kanchev” University of Ruse”
Phone: +359 885 635 874
E-mail: evelikova@uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Ion Mierlus-Mazilu, PhD
Department of Matematics and Computer Science
Technical University of Civil Engineering Bucharest, Romania
Phone: +40 212 421 208
E-mail: ion.mierlusmazilu@utcb.ro

Abstract: *Training aimed at solving cylinder problems develops spatial and logical thinking and creates conditions for the application of knowledge to geometric objects in the plane and in space. The purpose of the paper is to present the basic properties of the cylinder and its application in various tasks. The tasks of the project are:*

- *to enable students to get acquainted with basic theoretical information about a straight circular cylinder,*
- *to show tasks for introducing new knowledge,*
- *to master new knowledge and creative tasks and tasks for self-preparation and teamwork, through which to introduce and consolidate knowledge about rotary bodies.*

It aims to deepen the curiosity about geometry with spatial thinking.

Methodical development can be useful in classroom and extracurricular forms of mathematics training for deepening students' interest in geometry, for acquiring and deepening learners' knowledge, and for developing their problem solving skills.

Keywords: *cylinder, straight circular cylinder, cylinder problems, space figures*

JEL Codes:

ВЪВЕДЕНИЕ

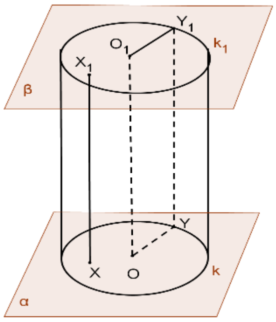
Цилиндърът е част от семейството на ротационните тела, познати още в Древна Гърция и се свързва с името на Архимед. В епохата на Възраждането архитекти и учени внимателно изучават и развиват учението им. Цилиндричните детайли се използват в производствените машини и съоръжения, транспортните средства или средствата от всякакъв характер използвани в бита. Те са основни градивни елементи в една конструкция. Създадени са специализирани обработващи машини за производство на цилиндрични детайли в машиностроителната, дървообработващата промишленост и обработката на изделия от камък.

[6] Докладът е представен в секция Образование – изследвания и иновации на 25 октомври 2019 с оригинално заглавие на български език: МЕТОДИКА НА ОБУЧЕНИЕТО ПО ЦИЛИНДРИ.

Правият кръгов цилиндър е ротационно тяло, чиято ос на симетрия минава през центровете на горната и долната основа и се нарича ос на цилиндъра. Той е ротационно тяло, получено при въртенето на правоъгълник около една от страните му.

ОСНОВНИ ТЕРМИНИ И ПОНЯТИЯ

Нека α и β са две успоредни равнини, k е кръг с център O и радиус r в равнината α, k_1 е кръг с център O_1 и радиус r в равнината β, като правата OO_1 е перпендикулярна на α и β (Фигура 1) .



Фигура 1

►**Определение**

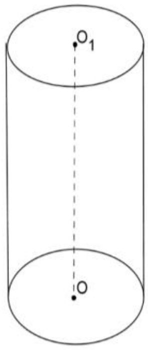
Множеството от всички точки върху всички отсечки XX_1, където $X \in k$, $X_1 \in k_1$, се нарича кръгов цилиндър.

►**Видиве цилиндри:**

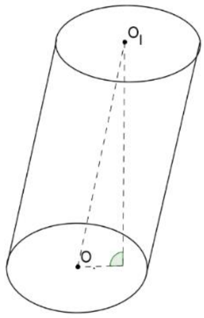
Нека центровете на двете основи на цилиндър са O и O_1, които образуват оста OO_1. В зависимост от това дали оста OO_1 на кръговия цилиндър е перпендикулярна или наклонена спрямо основите му, той се нарича

- **прав** (Фигура 2) или
- **наклонен** (Фигура 3).

Когато кръговият цилиндър е прав, отсечката OO_1 е негова височина - h .



Фигура 2



Фигура 3

►**Видиве сечения:**

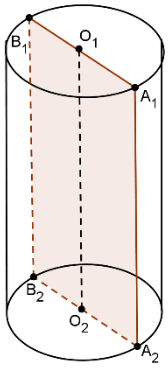
Разглеждаме два вида сечения на цилиндъра с равнина λ – осни и успоредни сечения.

Сечението на кръгов цилиндър, което съдържа оста му O_1O_2, се нарича:

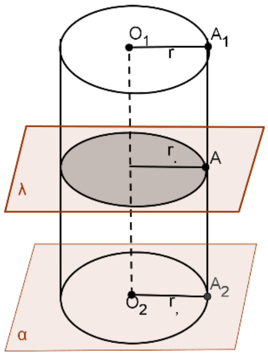
- **осно сечение** (Фигура 4) ,

а сечението на цилиндър с равнина, която е успоредна на равнините на основите:

– **успоредно сечение** (Фигура 5).



Фигура 4



Фигура 5

Осните сечения на кръговите цилиндри са правоъгълници, а успоредните сечения – кръгове, еднакви с кръговете на двете основи.

►**Лице на повърхнина на цилиндър (пълна повърхнина)** се нарича сборът от лицата на околната повърхнина и на основите му.

Теорема 1: Лицето на околната повърхнина на прав кръгов цилиндър с радиус r и височина H е $S = 2\pi rH$, а лицето на повърхнината му е $S_1 = 2\pi r(H + r)$.

► **Обем на кръгов цилиндър**

Теорема 2: Обемът на кръгов цилиндър, с радиус на основата r и с височина H, е равен на произведението от лицата на основата и височината му $V = \pi r^2 H$.

ЗАДАЧИ

►Задачи за въвеждане на новите знания

Задача 1. В една сладкарница продавали на една и съща цена течен шоколад в цилиндрични кутийки, производство на две различни фирми. Кутийките с шоколад на първата фирма били с диаметър 6 см и височина 8 см, а кутийките на втората фирма- с диаметър 8см и височина 6 см. От кои кутийки шоколад е по-изгодно да се купува?

Решение:

Нека да се пресметнат и сравнят обемите на двете кутии.

$V_1 = \pi r^2 H = \pi 3^2 .8 = 72\pi\ см^3$.

$V_2 = \pi r^2 H = \pi 4^2 .6 = 96\pi\ см^3$.

Следователно, по-изгодно е да се купува от втори вид кутии.

Задача 2. Околната повърхнина на цилиндър е $\frac{2}{3}$ от повърхнината му. Да се намери ъгълът между диагоналите на осното сечение на цилиндъра.

Решение:

Нека S е околната повърхнина, а S_1 пълната повърхнина на цилиндъра. По условие

$$S = \frac{2}{3} S_1 \Leftrightarrow S = \frac{2}{3}(S + 2B) \Leftrightarrow \frac{1}{3} S = \frac{4}{3} B \Leftrightarrow$$

$$S = 4B \Leftrightarrow 2\pi RH = 4\pi R^2 \Leftrightarrow H = 2R.$$

Следователно осното сечение на дадения цилиндър е квадратът $ABCD$. Тогава ъгълът между диагоналите му AC и BD е $\alpha = 90^\circ$.

►Задачи за овладяване на новите знания

Задача 3. Цилиндрични бетонови тръби за канализация имат външен диаметър 150 см. и дебелина 5 см. Колко кубични метра бетон са необходими за направата на 1 км. тръби за канализация?

Решение:

Обемът на една тръба е равен на разликата от обемите на два цилиндъра - първият с диаметър външния диаметър на тръбата и вторият с диаметър вътрешния диаметър на тръбата. Тъй като дебелината на тръбата е 5 см, то диаметърът на вътрешния цилиндър е 100 см. Тогава радиусите на двата цилиндъра са съответно $R = 55$ см. и $r = 50$ см. Понеже трябва да намерим количеството бетон в кубични метри, ще изразим всички размери в метри: $R = 0{,}55$ м, $r = 0{,}5$ м и $h = 1000$ м. Търсеният обем V е $V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2) = 3{,}14.1000.(0{,}55^2 - 0{,}5^2)$

$$= 1340.(0{,}3025 - 0{,}25) = 1340.0{,}0525 = 164{,}85\ м^3$$

Следователно за направата на 1 км. канализация с такива тръби са необходими 164,85 $м^3$ бетон.

Задача 4. В права триъгълна призма е вписан цилиндър. Определете обема на цилиндъра, ако обемът на призмата е $8250\, см^3$, а дължините на страните на основата на призмата са $44\, см$, $39\, см$, $17\, см$.

Решение:

Основите на цилиндъра са вписаните в основите на призмата окръжности. Да отбележим с r радиусите им, а с h – височините на призмата и цилиндъра (Фигура 6). От Хероновата формула $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, където p е полупериметъра на триъгълника $ABC\left(p = \frac{44+39+17}{2} = 50\right)$, получаваме

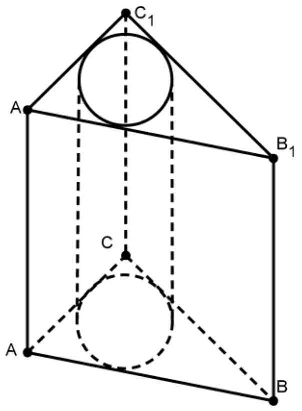
$S_{ABC} = 330$

и от $S_{ABC} = p.r \Rightarrow r = 6{,}6$

По условие за обема на призмата имаме $V = 8250 = S_{ABC}.h \Rightarrow h = \frac{V}{S_{ABC}} = \frac{8250}{330} = 25$ *см*

Сега за обема V_1 на цилиндъра намираме

$V_1 = \pi.r^2 h = 1089.\pi$ *см*^{3}.



Фигура 6

►Творчески задачи

Задача 5. Лицето на околната повърхнина на цилиндър, е вписан в сфера с радиус 1, е половината от лицето на големия кръг на сферата. Намерете височината на цилиндъра.

Решение:

Да означим височината с h, а радиусът на основата му с r. Равнина през оста на цилиндъра сече сферата в голяма окръжност, а цилиндъра в правоъгълника $ABCD$ със страни $2r$ и h, и диагонал 2.

От правоъгълния триъгълник ABC имаме $AD^2 = AB^2 + BD^2$ или

(1) $\quad 4 = 4r^2 + h^2$

От условие за отношение на лицата на околната повърхнина на цилиндъра и голям кръг на сферата имаме

$$\frac{2\pi.rh}{\pi 1^2} = \frac{1}{2} \text{ или}$$

(2) $\quad r = \frac{1}{4h}$

Заместваме (2) в (1) и получаваме биквадратното уравнение

$$4h^4 - 16h^2 + 1 = 0,$$

което има два положителни корена $h = \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{15}}{2}}$.

Задача 6. Осното сечение на цилиндър е квадрат. Отсечката AB съединява точка A от окръжността на долната основа с точка B от окръжността κ_1 на горната основа на цилиндъра, е равна на на a и се намира от оста на цилиндъра на разстояние равно на b. Намерете косинуса на ъгъла между правата AB и равнината на основата на цилиндъра. (Lazarov, V., 1997)

Решение:

Нека точка O е център на долната основа, а точка O_1 е център на горната основа. През точките A и B построяваме $AA_1 \parallel OO_1$ (т. $A_1 \in \kappa_1$) и $BB_1 \parallel OO_1$ (т. $B_1 \in \kappa$) и Т: Ако права е успоредна на права от дадена равнина, то правата и равнината са успоредни

=> $OO_1 \parallel (AB_1BA_1)$.

Следователно всички точки на правата OO_1 се намират на разстояние b до равнината

(AB_1BA_1). Построяваме $OK \perp AB_1$ (т. $K \in AB$) => $OK = b$. В ΔAOB_1 имаме $OA = OB_1 = R_1$, където R е радиус на основата на цилиндъра => $AK = KB_1 = x$. Правата AB_1 е ортогонална проекция на правата AB => $\angle AB; AOB_1)\angle = BAB_1 = \varphi$. От ΔABB_1 =>

(1) $\cos\varphi = \dfrac{2x}{a}$.

По условие осното сечение е квадрат => $BB_1 = 2R$. От Питагоровата теорема за ΔABB_1

(2) $4x^2 + 4R^2 = a^2$, и от ΔAOK =>

(3) $R^2 = x^2 + b^2$.

Заместваме (3) и (2) и получаваме $4x^2 + 4x^2 + 4b^2 = a^2$ <=> $8x^2 = a^2 - 4b^2$ <=>

$x^2 = \dfrac{a^2 - 4b^2}{8}$ <=>

(4) $x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 - 4b^2}}{2\sqrt{2}}$.

От (1) и (4) следва, че $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{a^2 - 4b^2}}{\sqrt{2}a}$

►Задачи за самостоятелна работа

Задача 7. От всички прави кръгови цилиндри, вписани в сфера с радиус R, да се намерят размерите на този, който има най-голям обем. (Lazarov, V., 1997)

Отговор: $h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}, r = \dfrac{R2}{\sqrt{3}}$

Задача 8. Отсечката АВ е диаметър на долната основа на цилиндър, а отсечката A_1B_1 е хорда от горната основа, успоредна на АВ. През правите АВ и A_1B_1 е прекарана равнина, която сключва с равнината на долната основа на цилиндъра остър ъгъл равен на α, а правата AB_1 сключва със същата равнина ъгъл равен на β. Намерете височината на цилиндъра, ако радиусът на основата на цилиндъра е равен на R (точките A и A_1 лежат от една страна на правата, съединяваща средите на отсечките АВ и A_1B_1). (Lazarov, V., 1997)

Отговор: $\dfrac{2R\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.tg\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$

Задача 9. В прав конус, осното сечение на който е правоъгълен триъгълник, е вписан цилиндър. Долната основа на цилиндъра лежи в равнината на основата на конуса. Отношението на околната повърхнина на конуса към околната повърхнина на цилиндъра е $4\sqrt{2}$ Намерете котангенса на ъгъла между равнината на основата на конуса и правата, съединяваща центъра на горната основа на цилиндъра с произволна точка от окръжността на основата на конуса. (Lazarov, V., 1997)

Отговор: $\cot g\varphi = \left(4 \pm 2\sqrt{2}\right)$

►Приложение на цилиндричните тела в живота ни

Човечеството е започнало да натрупва и развива математическите си познания още от най-дълбока древност. Първоначалните умения, свързани с математиката, са удовлетворявали потребности от бита на човека. Постепенно геометричните познания на древните цивилизации са се натрупвали, разширявали и обогатявали.(Фигура 7)

Фигура 7

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методическа разработка може да бъде полезна в извънкласните форми на обучение по математика за задълбочаване на интереса на обучаемите към геометрията, за формиране и задълбочаване на знанията, за развиване на уменията за решаване на задачи.

REFERENCES

Lazarov, V. (1997) Mathematics Training Program - Part 2, Balkanpress, Sofia, 220 p. (**Оригинално заглавие:** *Лазаров, В. 1997. Програма за обучение по математика за кандидат-студенти, Част втора – Планиметрия и Стереометрия, Балканпрес, 220 с.*)

Daintith, J. & Nelson, R.D. (Eds.) (1989) Dictionary of Mathematics, The Penguin, England, 350 p.