

- ♦ **СТУДЕНТСКАТА НАУЧНА СЕСИЯ** се организира от **АКАДЕМИЧНОТО РЪКОВОДСТВО** и **СТУДЕНТСКИЯ СЪВЕТ** на **РУСЕНСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ** с цел да се предостави възможност на студенти и докторанти да популяризират основните резултати от своята учебно-изследователска работа и да обменят опит.
- ♦ **ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ:**
 - **Съпредседатели:**
чл.-кор. проф. д-н Христо Белоев, DHC mult. –
РЕКТОР на Русенския университет
Елена Захариева
ПРЕДСЕДАТЕЛ на Студентския съвет
elena_zaharieva91@abv.bg; 082-888 390
 - **Научни секретари:**
проф. д-р Ангел Смрикаров –
Ръководител УНИКОМП
ASmrikarov@ecs.uni-ruse.bg; 082-888 249
Габриела Попова –
Член на Студентския съвет
Gabriela_porova_@abv.bg; 082-888 390
 - **Членове:**
 - **Факултет „Аграрно-индустриален”**
доц. д-р Калоян Стоянов
kes@uni-ruse.bg; 082-888 542
Гергана Везирска; geri_vezirska@yahoo.com
 - **Факултет „Машинно-технологичен”**
доц. д-р Стоян Стоянов
sgstoyanov@uni-ruse.bg; 082-888 572
Мариета Станоева; mstanoeva@uni-ruse.bg
 - **Факултет „Електротехника, електроника и автоматика”**
доц. д-р Теодор Илиев
tiliev@ecs.uni-ruse.bg; 082-888 839
Георги Цанков; g.tsankov93@gmail.com
 - **Факултет „Транспортен”**
доц. д-р Валентин Иванов
vdivanov@uni-ruse.bg; 082-888 373
Димо Иванов; dimich@abv.bg

- **Факултет „Бизнес и мениджмънт”**
доц. д.ик.н. Дянко Минчев,
dminchev@uni-ruse.bg; 082 888 357
Елизар Станев, eastanev@uni-ruse.bg
- **Факултет „Юридически”**
доц. д-р Кремена Раянова
k_raynova@abv.bg; 0889 205921
Боян Войков; bvoikov@abv.bg
- **Факултет „Природни науки и образование”**
доц. д-р Емилия Великова
evelikova@uni-ruse.bg; 0885 635 874
Йоана Тасева; ioana.taseva@abv.bg
- **Факултет „Обществено здраве и здравни грижи”**
доц. д-р Стефан Янев
snyanev@uni-ruse.bg ; тел. 082-821 883
Емануил Панайотов; emo7700@abv.bg
- **Филиал - Разград**
доц. д-р Цветан Димитров
tz_dimitrow@abv.bg; 0887-631 645
Нурхан Хюдаим; n.hyudaim@gmail.com
- **Филиал - Силистра**
Гл.ас. Цветанка ПавловаCwetanka Pawlowa
knidor@abv.bg; 086 821 521
Мария Томова; tomova_maria@abv.bg

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

СЕКЦИЯ SECTION

„Математика и информатика” “Mathematics and Informatics”

Председатели:
доц. д-р Емилия Великова
гл. ас. д-р Магдалена Андреева

1	Разработване на продукт свързан с темата „ПЕНТАМИНО”	9
	автор: докторант Иван Душков	
2	Върху едно приложение на транспортна задача	14
	автор: Весела Михова	
	научен ръководител: ас. Иван Георгиев	
3	Решаване на задачи по линейна алгебра чрез системи за компютърна алгебра Mathematica и MATLAB/MuPAD	21
	автор: Иван Стефанов	
	научен ръководител: ас. Стефка Караколева	
4	Решаване на интеграли и производни чрез системи за компютърни изчисления и визуализация Mathematica и MATLAB/MuPAD	25
	автор: Иван Стефанов	
	научен ръководител: ас. Стефка Караколева	
5	Решаване на матрични уравнения с MATLAB / MuPAD	29
	автор: Слави Георгиев	
	научен ръководител: ас. Стефка Караколева	
6	Приложение на MATLAB за решаване на алгебрични и тригонометрични уравнения	37
	автор: Слави Георгиев	
	научен ръководител: ас. Стефка Караколева	
7	Времева стойност на парите	45
	автор: Слави Георгиев	
	научен ръководител: проф. д-р Велизар Павлов	
8	GFastPay	52
	автор: Georgi Chavdarov	
	научен ръководител: Assoc. Prof., PhD Katalina Grigorova	

- 9 Проект информационной системы отдела планирования учебного процесса Поволжского государственного университета сервиса 57
автори: Роман Асташов, Любовь Шумкина, Юлия Васильева, Евгений Корнишин
научен ръководител: доц. к.т.н. Елена Малышева
- 10 Проект автоматизации мониторинга деятельности студентов 64
автор: Iuliia Chaburkina
научен ръководител: Assoc. Prof. Olga Filippova, Ph.D.
- 11 Решаване на уравнения чрез системата за компютърна математика MATLAB / MuPAD 69
автор: Лидия Петрова
научни ръководители: гл. ас. д-р Анна Лечева, ас. Стефка Караколева

Факултет Природни науки и образование

Докторски програми

Педагогика на обучението по математика

Педагогика на обучението по информатика и информационни технологии

Педагогика на обучението по история

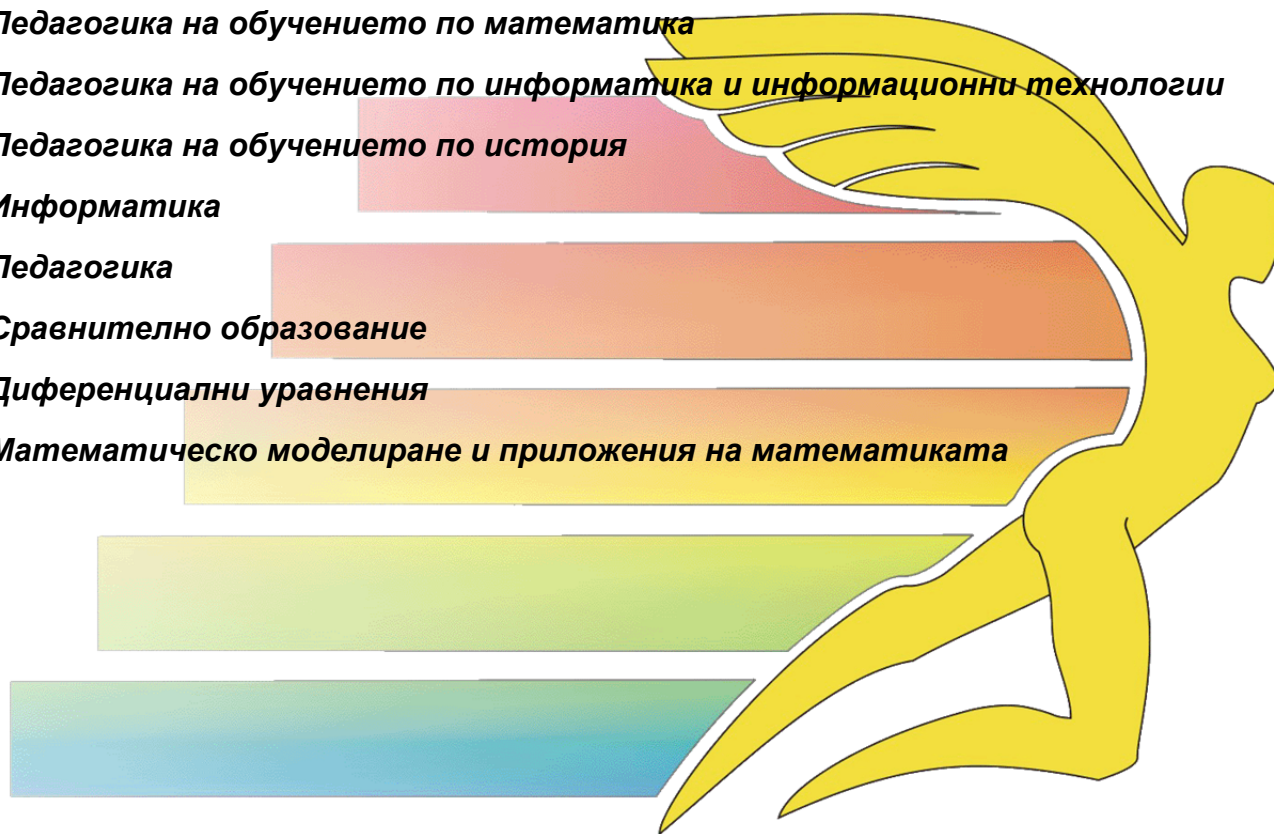
Информатика

Педагогика

Сравнително образование

Диференциални уравнения

Математическо моделиране и приложения на математиката



**СЕКЦИЯ
SECTION**
„Математика и информатика”
“Mathematics and Informatics”

Факултет Природни науки и образование

Специалности

Педагогика на обучението по математика и информатика

Финансова математика

Компютърни науки

Информатика и информационни технологии в бизнеса

Предучилищна и начална училищна педагогика

Начална училищна педагогика и чужд език

Социална педагогика

Български език и история

Магистърски програми

Информатика

Софтуерно инженерство

Информатика и информационни технологии в образованието

Информационни и образователни технологии

Информационни технологии в обучението по математика и информатика

Съвременни образователни технологии в детската градина и началното училище

Математическо моделиране в инженерството

Предучилищна и начална училищна педагогика

Лингводидактика в началното училище (английски език)

Лингводидактика в прогимназиалния етап (английски език)

Педагогическа превенция на престъпността и пробационни практики

Социално-педагогическа работа с деца и семейства

Социално-педагогическа дейности

Съвременна българистика и образование

Разработване на продукт свързан с темата „ПЕНТАМИНО“

автор: Иван Душков

Abstract: *Pentamino is a topic of etc. entertaining mathematics. A logical game, which develops as memory and logical thinking, imagination and creative talents of students in elementary school. The report presents original product made of the program MS Power Point, showing how through the use of ICT could facilitate the work of the teacher, to increase the interest of students, as well as much better to visualize certain topics.*

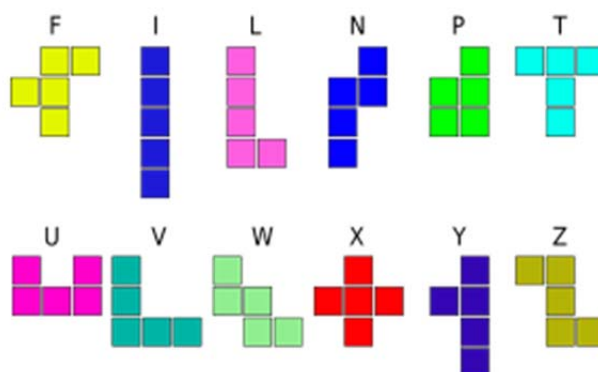
Key words: *Pentamino, Power Point, Information and Communication Technologies*

Името Pentamino идва от старогръцката дума Πέντα (пет), и мино (част). Представява плоски форми, всяка от които се състои от пет еднакви квадрати, свързани помежду си от страните. Същата дума понякога се използва за пъзел, в който тези плочки трябва да бъдат положени в правоъгълник или друга форма.

„Пентамино“ е тема от занимателната математика, по която са работили много автори като Соломон Голомб, Мартин Гарднър, Дейвид Кленър, Спенсър Ерншоу и други. Според техните изследвания в задачи от този тип има дълбока и сериозна математика, но същевременно те са достъпни и изключително интересни за учениците от началното училище. Чрез тях се развива както паметта и логическото мислене, така и въображението и творческите заложби на учениците. Чрез тези задачи се решават, по интересен, непринуден и увлекателен начин и много дидактическо-математически проблеми (Лалчев, Иванова, 2007).

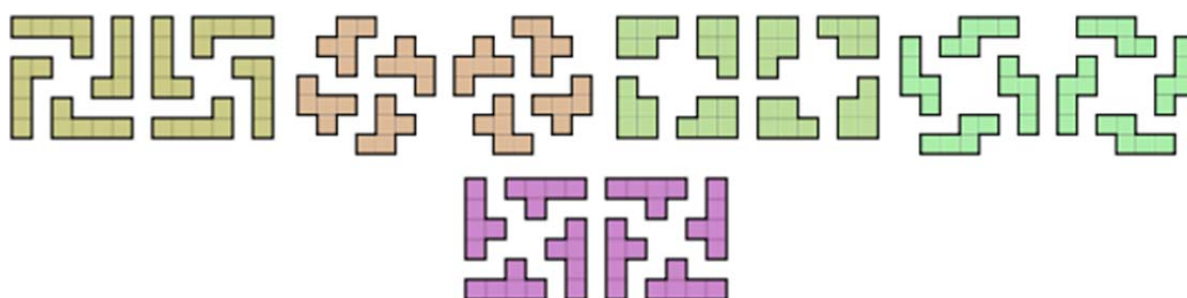
„Задачите „Пентамино“ позволяват както работа по групи, така и индивидуална работа, дават възможност за прилагане на нетрадиционни педагогически подходи, интерактивни и игрови методи ...“ (Лалчев, Иванова, 2007).

Пентамино плочките са общо 12 на брой различни форми (елементи) обозначени с латински букви, на които приличат.



Фиг. 1

Смята се, че огледалната симетрия и ротационна симетрия не създават нови форми.



Фиг. 2

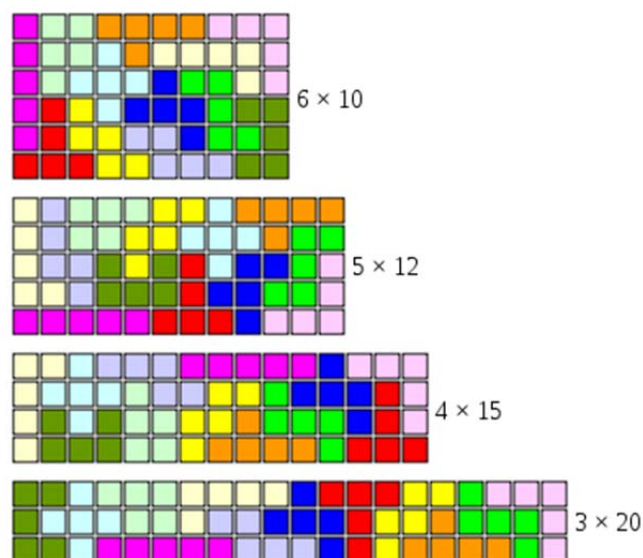
Класическата задача пентамино е да се съберат всички 12 фигури, без припокриване и пропуски в един правоъгълник. За четирите отделни случая са открити:

3 x 20 – 2 решения

4 x 15 – 368 решения

5 x 12 – 1010 решения

6 x 10 – 2339 решения



Фиг. 3

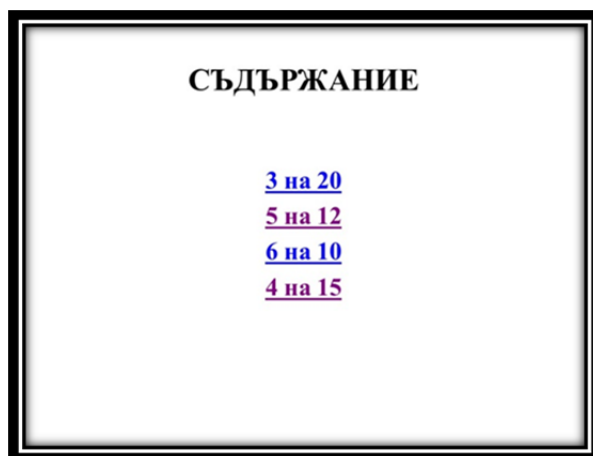
Всеки от тези пъзели може да бъде решен по начина проба-грешка. Задчите имат повече от едно решение. Очевидно, правоъгълници с форма 1 x 60 и 2 x 30 не могат да бъдат конструирани.

Чрез използване на програмата MS Power Point, авторът е представил един лесен начин за попълване на всеки един от четирите вида правоъгълника (3 x 20, 4 x 15, 5 x 12 и 6 x 10). Презентацията се състои от основен (водещ) слайд:



Фиг. 4

Чрез натискане на бутона „СЪДЪРЖАНИЕ“ се преминава към следващ слайд, който ни позволява избор към кой от вариантите да се насочим:

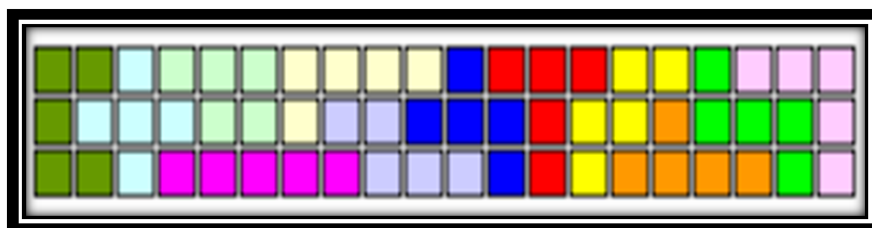


Фиг. 5

Всеки един от тези четири избора представлява една под презентация.
Нека да ги разгледаме.

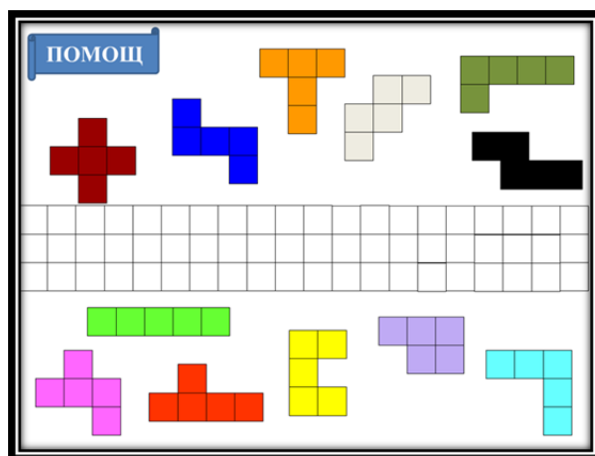
Правоъгълник с форма **3 x 20**

За този случай на играта Пентамино са открити две решения. В авторския цикъл от презентации е представено едното от тях.



Фиг. 6

Създадената под презентация съдържа 13 слайда, от които един заглавен.
Отделните слайдове имат сходен изглед, като идеята е стъпка по стъпка да се попълни целия правоъгълник.



Фиг. 7

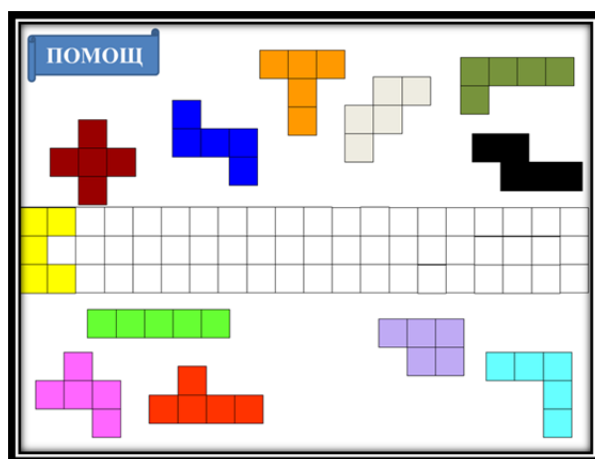
Това е изглед от първия слайд. Елементите са разпръснати и на учениците се поставя задачата. Ако се появят затруднения може да им се даде помощ – чрез бутона



Фиг. 8

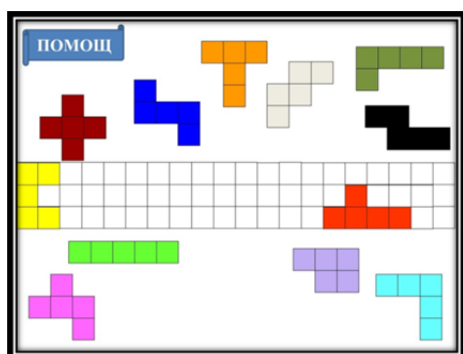
Който се намира в горния десен ъгъл. При създаването на този бутон, както и бутона „НАЗАД“ са използвани хиперлинкове, чрез които се осъществява връзка между отделните части съставлящи дадената ОМП.

Новият слайд, който се появява вече съдържа един попълнен елемент, както е показано на фигурата по-долу:

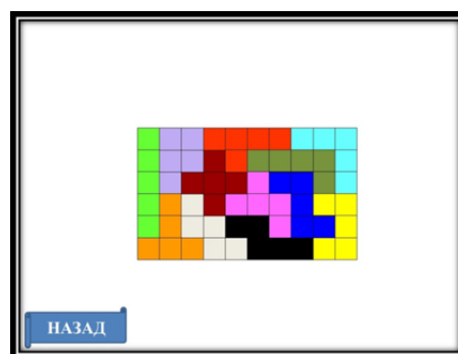


Фиг. 9

Ако отново се появи затруднение, би могло отново да се използва бутона за помощ и така ще се появи нов елемент (фиг. 10). Това продължава, докато не се попълни целия правоъгълник (фиг. 11):



Фиг. 10



Фиг. 11

Може да се отчете резултат, по броя използване на бутона „ПОМОЩ“, както по компонента време на изпълнение.

По същата тема са разработени и презентации за още три от случаите - **4 x 15, 5 x 12, 6 x 10.**

Авторската презентация, създадена с помощта на стандартно офис-приложение на тема „Пентамино“, представя мултимедийно и в движение математическите операции, чрез които математиката „оживява“.

Идеята заложена в разгледаната презентация е как използвайки ИКТ би могло да се улесни работата на преподавателя, да се повиши интереса на учениците, както и възможностите за по-добра визуализация на учебния материал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Здравко Лалчев, Маринела Иванова, „Обучаваща компютърна презентация по математика на тема пентамино за ученици от началното училище“, София, Веда Словена - ЖГ, 2007.
2. Здравко Лалчев, Нина Дългъчева-Колева, „Обучаваща компютърна презентация по математика на тема пентамино за ученици от началното училище“, София, Веда Словена - ЖГ, 2007.
3. <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%BE>

За контакти:

ас. Иван Душков, Катедра “Начална училищна педагогика”, Софийски университет “Св. Климент Охридски”, тел.: 0886842930, e-mail: i_dushkov@mail.bg

Върху едно приложение на транспортна задача

автор: Весела Михова
научен ръководител: ас. Иван Георгиев

Abstract: An application of the transportation problem: This paper presents a mathematical interpretation of a previously viewed by the authors topic for performing a preliminary assessment of the effectiveness of a project of Rural Development Programme (RDP) 2014-2020, aimed at improving competitiveness and increasing the level of added value to fruit production. Using the transportation problem in linear programming, more elegant solution of the task of building a refrigerated fruit storage facility is presented.

Key words: transport model, investment project, added value

ВЪВЕДЕНИЕ

Тази публикация представлява математическа интерпретация по темата от доклада „Математико-икономически анализ на инвестиционен проект – изграждане на хладилно плодохранилище“ на Весела Михова, Емилия Христова и Иван Георгиев, публикуван в НАУЧНИ ТРУДОВЕ НА РУСЕНСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ – 2014 (вж. [3]).

Тук е изчистен математическият апарат, като е представено по-елегантно решение на задачата за изграждане на хладилно плодохранилище с помощта на транспортна задача на линейното оптимизиране. За сравнение, в публикувания през 2014 г. доклад не бяха отчетени спецификите на транспортната задача и проблемът беше решен като обикновена задача на линейното оптимизиране.

ИЗЛОЖЕНИЕ

В настоящото изследване с помощта на транспортна задача е представена възможност за предварителна оценка на оптималния вариант за избор и експлоатация на хладилно плодохранилище и постигане на „максимална“ добавена стойност¹.

1. Дефиниране на проблема (формулиране на задачата)

Математическият модел трябва да реши следната задача: Да се определят моментите (времево по месеци), най-подходящи за максимални продажби на продукцията (ябълки), при което да се постигне максимална печалба в съответствие с капацитета на плодохранилището.

Предварително условие:

- Общ добив (съхранение) на 1 600 тона ябълки;
- Месечни разходи по съхраняване – 70 лв./тон.

Ограничително условие: възможно максимално количество за реализиране на пазара до 300 тона месечно. Забележка: за продажба още при реколтирането на полето няма ограничения в обема на продадената продукция.

Променливи:

- Допустими срокове за съхраняване на ябълки – от 90 до 240 дни;
- Цена на едро: първоначална цена на изкупуване от търговците на едро - 500лв./тон; крайна цена (през месец 08) – 1300 лв./тон; нарастване месечно на цената със 100 лв./тон;

В заданието има приети няколко условности:

- * Производството от 1600 тона ябълки е една осреднена величина (среден

¹ Добавена стойност (за дадено производство) се нарича разликата между стойността на произведената стока и сумата от вложените в производството ѝ междинни продукти.

добив), приета за опростяване на задачата. В зависимост от климатичните условия, добивът се движи в границите от 1300 тона до 1800 тона годишно.

* Съхраняването на ябълките е възможно в интервал до 90 дни за някои сортове, които представляват количествено 40 % от цялата продукция, до 160 дни за 35 % от продукцията, а за 25 % от продукцията е възможно съхраняване до 240 дни.

* Тъй като производството на ябълките обикновено се съпътства с производството на круши, трябва да се има в предвид и съхраняването допълнително и на 400 тона круши при възможни срокове до 90 дни в зависимост от сортовете на базисна цена при началното изкупуване 1800 лв./тон и крайна цена 2300 лв./тон.

* В зависимост от добивите за дадената година цените на ябълките и крушите могат да падат с 10% под първоначалната изкупна цена, приета за базисна или да се повишават с 20 % над максималната базова изкупна цена на едро за крушите.

Създаване на математически модел: Да се определят взаимовръзките между избраните променливи. Изготвеният модел да е сравнително лесно разбираем и използваем за потребителите. Да се направи графика, която по месеци да посочва реализацията на продукцията в тонове, да се очертае зона за оптимална реализация и да се определи оптималният капацитет на плодохранилище, за изграждането на което ще се кандидатства с проект по мярка 4 „Инвестиции в материални активи” от Програмата за развитие на селските райони 2014-2020г.

2. Математически модел

Проблемът може да бъде разгледан като транспортна задача, която представлява специален клас задачи на линейното оптимизиране (вж. [2] и [4]).

Нека с x_{ji} ($x_{ji} \geq 0$) са означени **количествата продукции**, както следва:

$i = 0 \div 8$ са съответно периодите: нулевият период съответства на директна продажба на прекупвачи още при реколтирането на полето; 1 – първи месец на склад; 2 – втори месец на склад и т.н.

$j = 1 \div 4$ са видовете продукция: 1 – ябълки от първи вид (тези сортове, които търпят съхранение до 3 месеца); 2 – ябълки от втори вид (сортовете, търпящи съхранение до 5 месеца); 3 - ябълки от трети вид (сортовете, търпящи съхранение до 8 месеца); 4 – круши (прието е, че те търпят съхранение до 3 месеца).

За **продажните цени на продукцията** са въведени следните означения:

c_{ji} – продажна цена в i -тия период на j -тия продукт (в лв./тон), $i = 0 \div 8$ са съответно периодите, а $j = 1 \div 4$ са видовете продукция.

Разходите за съхранение са едни и същи, независимо от вида продукция и поредния месец на съхранение: $c_s = 70$ лв./тон. Прието е, че тези разходи се заплащат в края на всеки месец за количеството продукция, постъпило в началото на съответния месец.

Нека **печалбата за един тон от j -тия продукт през i -тия период** да е означена с c_{ji}^P .

Преведен в терминологията на транспортна задача, даденият проблем добива следната формулировка:

- видовете продукция играят ролята на *отправни пунктове* (складове, доставчици, производители) A_j , $j = 1 \div 4$, в които се намират количества a_j , $j = 1 \div 4$, от съответните продукти (годишен добив на всеки от продуктите);

- периодите изпълняват функцията на *приемателни пунктове* (потребители, пунктове на потребление, дистрибутори) B_i , $i = 0 \div 8$, в които се потребяват количества b_i , $i = 0 \div 8$, от съответните продукти (реализация за всеки от месеците);

- така наречената *матрица на транспортните разходи* в случая

представлява матрица на печалбите (приходи – разходите по съхранение) на тон продукция и има следния вид: $C=\{c_{ji}^p\}$, $i = 0 \div 8$, $j = 1 \div 4$

- търси се така наречената *матрица на превозите* (или матрица с оптималните количества продукция): $X=\{x_{ji}\}$, $i = 0 \div 8$, $j = 1 \div 4$,

при което **общата печалба**, зададена с функцията

$$\max Z = \sum_{i=0}^8 \sum_{j=1}^4 (c_{ji}^p x_{ji}),$$

да бъде максимална.

За разлика от класическата транспортна задача, в която се търси матрица на превозите, за която се постига минимум на целевата функция (минимум на разходите), тук се търси матрица на оптималните количества продукция, за която се постига максимум на целевата функция (максимум на печалбата).

Тъй като няма продукция, издържаща на съхранение повече от 8 месеца, то в решението е счетено, че в 9-тия месец вече няма налична продукция и разходи за склада не се плащат повече. Горните въведения са представени нагледно в табл. 1.

Табл. 1. Транспортна таблица – общ случай

Период на продажба \ Вид продукция (в тонове)		Директна продажба	1 м.	2 м.	3 м.	4 м.	5 м.	6 м.	7 м.	8 м.	a_j
		B0	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	B ₇	B ₈	
Ябълки I вид	A ₁	c_{10}^p x₁₀	c_{11}^p x₁₁	c_{12}^p x₁₂	c_{13}^p x₁₃	c_{14}^p x₁₄	c_{15}^p x₁₅	c_{16}^p x₁₆	c_{17}^p x₁₇	c_{18}^p x₁₈	a ₁
Ябълки II вид	A ₂	c_{20}^p x₂₀	c_{21}^p x₂₁	c_{22}^p x₂₂	c_{23}^p x₂₃	c_{24}^p x₂₄	c_{25}^p x₂₅	c_{26}^p x₂₆	c_{27}^p x₂₇	c_{28}^p x₂₈	a ₂
Ябълки III вид	A ₃	c_{30}^p x₃₀	c_{31}^p x₃₁	c_{32}^p x₃₂	c_{33}^p x₃₃	c_{34}^p x₃₄	c_{35}^p x₃₅	c_{36}^p x₃₆	c_{37}^p x₃₇	c_{38}^p x₃₈	a ₃
Круши	A ₄	c_{40}^p x₄₀	c_{41}^p x₄₁	c_{42}^p x₄₂	c_{43}^p x₄₃	c_{44}^p x₄₄	c_{45}^p x₄₅	c_{46}^p x₄₆	c_{47}^p x₄₇	c_{48}^p x₄₈	a ₄
b _i			b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	Σ

Неизвестните величини x_{ji} трябва да изпълняват следните условия:

1. *Всички количества продукция да бъдат продадени в някой от посочените периоди*, което означава, че неизвестните трябва да удовлетворяват уравненията: $\sum_{i=0}^8 x_{ji} = a_j$, $j = 1 \div 4$.

Общият добив на ябълки е около 1600 т годишно, от които 40% от I-ви вид (или 640 т), 35% от II-ри вид (или 560 т) и 25% от III-ти вид (или 400 т). Добивът на круши е около 400 т годишно. Това означава, че в дадената задача $a_1 = 640$, $a_2 = 560$, $a_3 = 400$, $a_4 = 400$.

2. *Във всеки период на потребление на пазара трябва да бъде реализирано необходимото количество продукция*: $\sum_{j=1}^4 x_{ji} = b_i$, $i = 0 \div 8$.

Тъй като възможното максимално количество продукция за реализиране на пазара е 300 тона месечно, то за дадената задача $b_i = 300$ т, $i = 1 \div 8$.

За продажба още при реколтирането на полето е прието, че няма ограничения, т.е. $b_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2000$, т.е. отчита се възможността цялата продукция да бъде продадена директно при събиране на реколтата.

3. *Условия за неотрицателност на променливите*: $x_{ji} \geq 0$, където $i = 0 \div 8$, $j = 1 \div 4$; тъй като става дума за количества, тези променливи не могат да бъдат отрицателни.

Печалбата за тон продукция (c_{ji}^p) се формира като разлика между пазарната цена на продукцията и разходите за съхранение (отново за 1 тон).

В конкретната задача пазарните цени през даден месец са едни и същи за всеки от трите вида ябълки: $c_{1i} = c_{2i} = c_{3i}$ за i – фиксирано. Освен това, те нарастват линейно с около 100 лв. месечно, като началната цена е 500 лв./тон:

- При директна продажба: $c_{j0}^p = c_{j0} = 500, j = 1 \div 3$

- През първите три месеца:

Цените на ябълките се формират както следва: $c_{ji} = 100 \cdot i + 500; i = 1 \div 3, j = 1 \div 3$

Разходите за съхранение са $c_s = 70$ лв./тон.

$$c_{ji}^p = c_{ji} - i \cdot c_s = 100 \cdot i + 500 - 70 \cdot i = 30 \cdot i + 500; i = 1 \div 3, j = 1 \div 3$$

- През 4-ти и 5-ти месец:

Цените на ябълките се формират както следва: $c_{ji} = 100 \cdot i + 500; i = 4 \div 5, j = 2 \div 3$

Печалба за 1 тон ябълки от II-ри и III-ти вид: $c_{ji}^p = c_{ji} - i \cdot c_s; i = 4 \div 5, j = 2 \div 3$

Съхранението на ябълки от I-ви вид е възможно до 3 месеца; в решението на задачата е прието, че след 3-тия месец те не могат да бъдат продавани, т.е. задачата е с „блокирани превози”: $c_{1i}^p = -M$, където $M \gg 0, i = 4 \div 5$.

- През 6-ти, 7-ми и 8-ми месец:

Цените на ябълките се формират както следва: $c_{ji} = 100 \cdot i + 500; i = 6 \div 8, j = 3$

Печалба за 1 тон ябълки от III-ти вид: $c_{3i}^p = c_{3i} - i \cdot c_s; i = 6 \div 8$

Съхранението на ябълки от II-ри вид е възможно до 5 месеца; в решението на задачата е прието, че след 5-тия месец те не могат да бъдат продавани, както и тези от I-ви вид, т.е.: $c_{ji}^p = -M$, където $M \gg 0, i = 6 \div 8, j = 1 \div 2$

- При крушите ситуацията е следната: началната им цена е 1800 лв./тон, а крайната – около 2300 лв./тон. При линейно нарастване на цената това прави повишение от около 167 лв./тон в месечната цена.

При директна продажба: $c_{40}^p = c_{40} = 1800$.

За първите три месеца: $c_{4i} = 167 \cdot i + 1800; i = 1 \div 3$, т.е. печалбата за тон круши е $c_{4i}^p = c_{4i} - i \cdot c_s = 167 \cdot i + 1800 - 70 \cdot i = 97 \cdot i + 1800$

Съхранението на круши е възможно до 3 месеца; в решението на задачата е прието, че след 3-тия месец те не могат да бъдат продавани, т.е. $c_{4i}^p = -M$, където $M \gg 0, i = 4 \div 8$.

Обобщение на конкретните данни и връзки е направено в табл. 2.

Табл. 2. Транспортна таблица за конкретните данни от задачата

Период на продажба \ Вид продукция (в тонове)		Директна продажба	1 м.	2 м.	3 м.	4 м.	5 м.	6 м.	7 м.	8 м.	a_j
		B0	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	B ₇	B ₈	
Ябълки I вид	A ₁	500 x_{10}	530 x_{11}	560 x_{12}	590 x_{13}	-M x_{14}	-M x_{15}	-M x_{16}	-M x_{17}	-M x_{18}	a ₁ 640
Ябълки II вид	A ₂	500 x_{20}	530 x_{21}	560 x_{22}	590 x_{23}	620 x_{24}	650 x_{25}	-M x_{26}	-M x_{27}	-M x_{28}	a ₂ 560
Ябълки III вид	A ₃	500 x_{30}	530 x_{31}	560 x_{32}	590 x_{33}	620 x_{34}	650 x_{35}	680 x_{36}	710 x_{37}	740 x_{38}	a ₃ 400
Круши	A ₄	1800 x_{40}	1897 x_{41}	1994 x_{42}	2091 x_{43}	-M x_{44}	-M x_{45}	-M x_{46}	-M x_{47}	-M x_{48}	a ₄ 400
b _i			b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈	Σ
			2000	300	300	300	300	300	300	300	

Транспортната задача е небалансирана и с блокирани превози. Поради големия брой променливи (36 променливи, съответстващи на търсените количества продукция за всеки период) тя е решена с помощта на създадена от ас. Иван Георгиев програма (вж. [1]) на софтуера Matlab (Matrix laboratory, вж. [5] и [6]), като е отчетена особеността, че, за разлика от класическия случай за намиране на минимум, в конкретната задача се търси максимум.

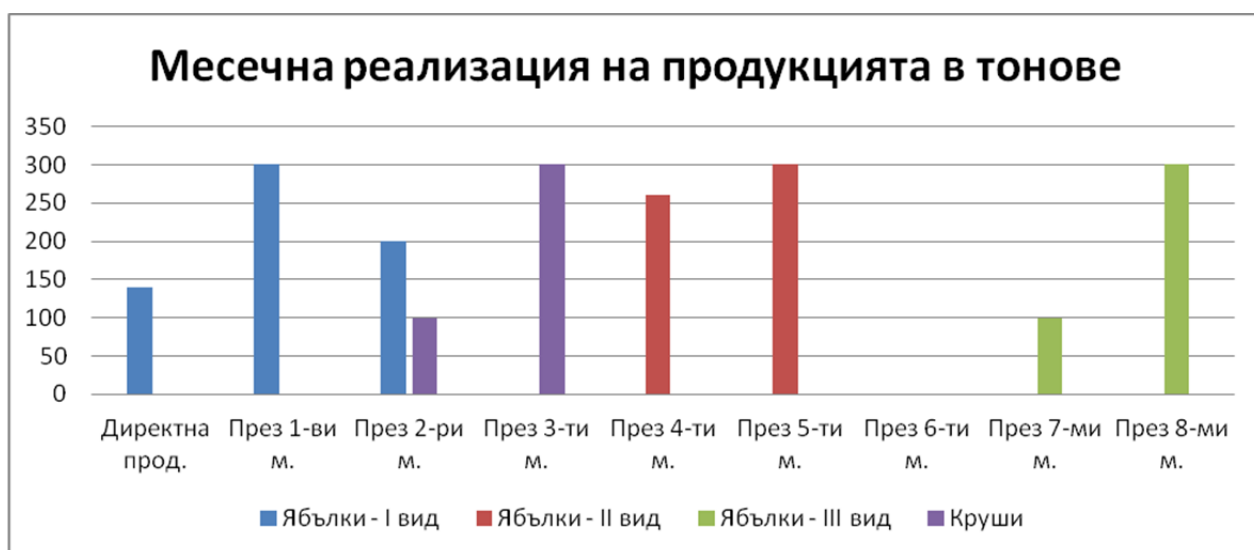
3. Резултати

Получени са следните резултати: **максималната печалба е $Z^* = 1\,816\,600$ лв. при оптимален капацитет на плодохранилището 1860 тона.** За сравнение, ако продукцията се продаде още при реколтирането на полето, то печалбата от нея ще е $1600 \cdot 500 + 400 \cdot 1800 = 1\,520\,000$ лв. При използването на склад печалбата се е повишила с около 19,5% (или с 296 600 лв.).

По-долу таблично (вж. табл.3) и графично (вж. фиг. 1) са показани времевите периоди и са отбелязани оптималните обеми на продажба на продукцията, през които ще се получи максимална добавена стойност.

Табл. 3. Оптимална месечна реализация на продукцията на пазара (в тонове)

План на продажба \ Вид продукция (в тонове)	Директна продажба	През 1-ви м.	През 2-ри м.	През 3-ти м.	През 4-ти м.	През 5-ти м.	През 6-ти м.	През 7-ми м.	През 8-ми м.
Ябълки - I вид	140	300	200	0	0	0	0	0	0
Ябълки - II вид	0	0	0	0	260	300	0	0	0
Ябълки - III вид	0	0	0	0	0	0	0	100	300
Круши	0	0	100	300	0	0	0	0	0
Общо продажби (в тонове)	140	300	300	300	260	300	0	100	300



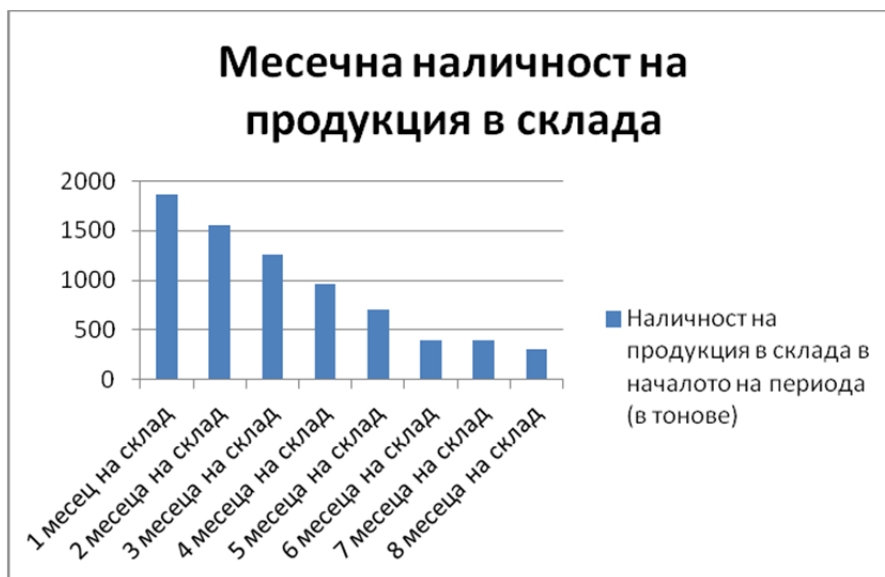
Фиг. 1. Оптимална месечна реализация на продукцията на пазара (в тонове)

Наличността на продукцията в склада по месеци е представена по-долу таблично (вж. табл.4) и графично (вж. фиг. 2). Представените резултати разкриват отрязъка от време, през което плодохранилището се използва само частично или изцяло е свободно. Всъщност това е резерв, който може да бъде използван за съхраняване

на пролетни плодове и оранжерийна продукция (зеленчуци).

Табл. 4. Месечна наличност на продукция в склада

Период	1 м. на склад	2 м. на склад	3 м. на склад	4 м. на склад	5 м. на склад	6 м. на склад	7 м. на склад	8 м. на склад
Наличност на продукция в склада в началото на периода (в тонове)	1860	1560	1260	960	700	400	400	300



Фиг. 2. Месечна наличност на продукция в склада

Програмата, използвана в Matlab, има следния вид:

```
clear, clc
% ВХОДНИ ДАННИ
cs=70; % месечни разходи за съхранение
c0z=1800; c1z=1967; c2z=2134; c3z=2300; % продажна цена на крушите, съответно базисна,
през 1-ви, 2-ри и 3-ти месец
c0=500; c1=600; c2=700; c3=800; c4=900; c5=1000; c6=1100; c7=1200; c8=1300; % продажна цена
на ябълките, съответно базисна, през 1-ви, 2-ри, ..., 8-ми месец
a1=640; a2=560; a3=400; a4=400; % ограничения, свързани с количествата продукция,
съответно за ябълки I, II, III вид и за крушите
%%%%%%%%%%%%%%
b0=a1+a2+a3+a4;
M=1e9;
% матрица на печалбите за 1 тон продукция
C=[ c0, c1 - cs, c2 - 2*cs, c3 - 3*cs, -M, -M, -M, -M, -M,
    c0, c1 - cs, c2 - 2*cs, c3 - 3*cs, c4 - 4*cs, c5 - 5*cs, -M, -M, -M,
    c0, c1 - cs, c2 - 2*cs, c3 - 3*cs, c4 - 4*cs, c5 - 5*cs, c6 - 6*cs, c7 - 7*cs, c8 - 8*cs,
    c0z, c1z - cs, c2z - 2*cs, c3z - 3*cs, -M, -M, -M, -M, -M];
a=[a1;a2;a3;a4]; % годишен добив на всеки от продуктите
b=[b0 300 300 300 300 300 300 300 300]; % реализация за всеки от периодите
% ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ
[Z,X]=transport(-C,a,b); % извикване на готова програма, решаваща транспортна задача
% ИЗХОДНИ ДАННИ
Z=-Z % връщане на целева функция за максимум т.е. на максималната печалба
X % връщане на матрица с оптималните количества продукции (в тонове)
```

Входните данни в програмата са c_s (месечни разходи за съхранение); $c1z, c2z, c3z, c4z$ (продажни цени на крушите); $c0, c1, \dots, c8$ (продажни цени на ябълките); $a1, a2, a3, a4$ (ограничения за годишния добив на всеки от продуктите). Изходните данни са Z – търсената максимална стойност (максимална печалба), а X е матрицата с оптималните количества продукция.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Въз основа на изложеното по-горе могат да се направят следните изводи:

1. Математическият модел предоставя информация за използване капацитета на хладилно плодохранилище за всеки месец.
2. Графично представените резултати от математическият модел разкриват резерва на плодохранилището за поемане на допълнително съхраняване на плодове и зеленчуци.
3. Настоящият математико-икономически модел може да бъде използван за оценка на възможностите при проектиране на други близки по същност или подобни инвестиционни проекти чрез задаване на съответните стойности на основните параметри и по този начин да се прогнозира ефективността и ефикасността от реализацията им.
4. Използването на транспортна задача за разрешаване на поставените цели внася допълнителна изчисленост в модела, правейки го по-разбираем и лесно приложим за други подобни проекти.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Георгиев, И. Г., С. Р. Караколева. Решаване на Транспортна задача с MATLAB, Студентска научна сесия, СНС'09, РУ А. Кънчев“, 2009, с. 30-35.
- [2] Караколева, С.Р. Електронен учебен курс “Изследване на операциите” <http://ecet.ecs.ru.acad.bg/else/>, Русенски университет, 2005.
- [3] Михова В., Е. Христова, И. Георгиев, Математико-икономически анализ на инвестиционен проект – изграждане на хладилно плодохранилище, НАУЧНИ ТРУДОВЕ НА РУ - 2014, том 53, серия 6.1, Р., 2014, с. 28-34, ISSN 1311-3321.
- [4] Павлов, В. Количествени методи в управлението, ПРЕПРЕС, С., 2013, с 72-90.
- [5] Тончев, Й., Matlab 7 Част III: Преобразувания, изчисления, визуализация, Техника, 2009.
- [6] Matlab site: <http://www.mathworks.com/>

За контакти:

Докторант Весела Михова², Катедра ПМС, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 424, e-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

Ас. Иван Георгиев³, Катедра ПМС, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 424, e-mail: irgeorgiev@uni-ruse.bg

² Докладът отразява резултати от работата на Весела Михова по проект

No 2015 - ФОЗЗГ - 03, финансиран от фонд "Научни изследвания" на Русенския университет. / This paper contains results of the work of Vesela Mihova on project No 2015 - FPHHC - 03, financed by "Scientific Research" Fund of Ruse University.

³ Докладът отразява резултати от работата на Иван Георгиев по проект No 2015 - ФОЗЗГ - 03, финансиран от фонд "Научни изследвания" на Русенския университет. / This paper contains results of the work of Ivan Georgiev on project No 2015 - FPHHC - 03, financed by "Scientific Research" Fund of Ruse University.

Решаване на задачи по линейна алгебра чрез системи за компютърна алгебра Mathematica и MATLAB/MuPAD

автор: Иван Стефанов
научен ръководител: ас. Стефка Караколева

Abstract: *Solving problems in linear algebra by computer algebra systems Mathematica and MATLAB / MuPAD. This article is about the advantages of using Computer Algebra Systems (CAS) for solving problems with matrices and matrix equations and how they make it easier for students to solve difficult mathematical problems related with them. It will take a lot of effort and time without their help. Some different Matrices and matrix equations related problems are considered.*

Key words: *matrix equations, MATLAB, matrices, determinant, rank, National Students Olympiad in Computer Mathematics, Computer Algebra Systems (CAS), Mathematics*

ВЪВЕДЕНИЕ

Компютърната и комуникационна техника е навлязла до такава степен във всички области на науката и практиката, че е невъзможно да се пренебрегва необходимостта от използването им и в сферата на образованието. Използването на компютърни системи за изчисление като MATLAB, Mathematica, Maple, [1,5,6,7] осигурява нагледност, точност и провокират логическото мислене на студентите. Налични са достъпни ръководства и help-система, с които се улеснява тяхното използване.

В настоящата статия се разглеждат различни класове задачи от Линейна алгебра, които могат да бъдат решавани успешно чрез система за компютърна математика. Задачите са решени с Mathematica, MATLAB и MuPAD, като е направен анализ на решенията им в съответните системи за изчисление.

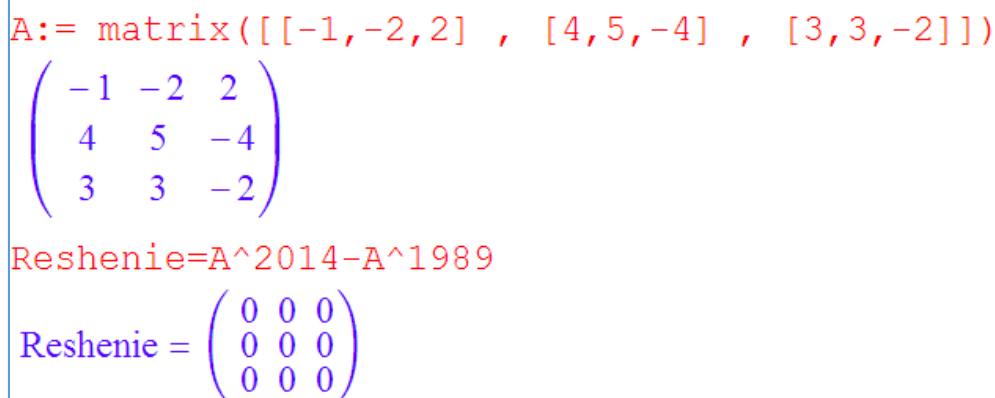
РЕШАВАНЕ НА МАТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Задача 1. (CompMath-2014/A-11) [8] Дадени са функцията $f(x) = x^{2014} - x^{1989}$ и матрицата

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Да се пресметне $f(A)$.

Решение: Използваме стандартната функция на MuPAD за задаване на матрица, след което пресмятаме функцията от матрицата A, Фиг.1. В резултат програмата ни връща нулева матрица.



```
A:= matrix([[ -1, -2, 2] , [4, 5, -4] , [3, 3, -2]])  

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$
  
Reshenie=A^2014-A^1989  
Reshenie = 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

Фиг. 1. Решаване на Задача 1 с MuPAD.

Задача 2. (CompMath-2012/A-7) [3] Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2012 & x \\ 0 & 1 & 2012 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За кои стойности на x е вярно равенството $A^{2012} = B$?

Решение: Въвеждаме двете матрици, означени с a и b , след което повдигаме матрицата a на 2012 степен чрез матричната функция `MatrixPower` на системата Mathematica и накрая, със `Solve` [5] решаваме матричното уравнение спрямо x , Фиг. 2.

```
a = {{1, 1, x}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}};

b = {{1, 2012, x}, {0, 1, 2012}, {0, 0, 1}};

c = MatrixPower[a, 2012]

{{1, 2012, 2 023 066 + 2012 x}, {0, 1, 2012}, {0, 0, 1}}

Solve[c == b, x]

{{x -> -1006}}
```

Фиг. 2. Решаване на Задача 2 с Mathematica.

Задача 3. (CompMath-2012/A-8) [3] Да се намери матрицата X , ако

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: След като въведем трите матрици, намираме обратните матрици на a и b чрез матричната функция `Inverse`, след което умножаваме трите матрици и накрая, за да бъде и отговорът във вид на матрица, използваме матричната функция `MatrixForm`, Фиг.3.

```
a = {{1, 2, 3}, {2, 3, 1}, {3, 1, 2}};

b = {{2, 3, 4}, {3, 4, 2}, {4, 2, 3}};

c = {{3, 4, 5}, {4, 5, 3}, {5, 3, 4}};

x = Inverse[a].c.Inverse[b] // MatrixForm


$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{27} & \frac{2}{27} & \frac{11}{27} \\ \frac{2}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{7}{27} \\ \frac{11}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{2}{27} \end{pmatrix}$$

```

Фиг. 3. Решаване на Задача 3 с Mathematica.

Задача 4. (CompMath-2013/A-11) [2] Да се пресметне рангът на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на параметъра a .

Решение: С $r1, r2, r3, r4$ въвеждаме в Mathematica последователно редовете на матрицата като вектори, след което с матричната функция Det намираме нейната детерминанта. От получения резултат можем да направим извода, че ако $a=0$, то рангът на матрицата е 3, а ако $a \neq 0$ - рангът на матрицата е 4, Фиг.4.

```

r1 = {a, 4, 10, 1};
r2 = {3, 1, 1, 4};
r3 = {1, 7, 17, 3};
r4 = {2, 2, 4, 1};

Det[{r1, r2, r3, r4}]

-20 a

Следователно, за  $a = 0$ , рангът на матрицата е 3,
а за  $a \neq 0$ , рангът на матрицата е 4.

```

Фиг. 4. Решаване на Задача 4 с Mathematica.

Задача 5. (CompMath-2013/A-8) [2] Да се намерят целочислените 2×2 матрици A със следа -1 , за които $A^2 + A^T = E$.

```

A:=matrix([[a, b],[c, d]]):
B:=A+A+transpose(A):
assume(a in Z_):assumeAlso(b in Z_):assumeAlso(c in Z_):assumeAlso(d in Z_):
S:= solve({a+d=-1,B[1,1]=1, B[1,2]=0,B[2,1]=0,B[2,2]=1}, {a, b, c, d})
{{a = 0, b = -1, c = -1, d = -1}, {a = 0, b = 1, c = 1, d = -1},
{a = -1, b = -1, c = -1, d = 0}, {a = -1, b = 1, c = 1, d = 0}}

```

Фиг. 5. Решаване на Задача 5 с Mathematica

Решение: Задаваме матрицата A чрез командата `matrix` в средата на MuPAD и след това получаваме B като сбор от квадрата на матрицата A и нейната транспонирана матрица.

След деклариране на необходимите изисквания на условието на задачата, елементите на търсената матрица A да са цели числа с командата `assume`, стартираме изпълнението чрез командата `solve`. В командата `solve` първо задаваме следата, след това приравняваме останалите елементи на B с единичната

матрица и в резултат получаваме четири решения, които са квадратни матрици, фиг. 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представените задачи и техните решения, които са давани на олимпиадите по компютърна математика [2, 3, 4, 8, 9], илюстрират ползата от използването на системи за компютърни изчисления за решаване на нестандартни задачи и такива, чието решаване е свързано с множество преобразувания и изчисления. Предстои изучаване на други системи за компютърна алгебра и използването им за решаване на разнообразни задачи от други области на математиката.

ЗАБЕЛЕЖКА

Статията отразява резултати от работата по проект № 2015 – ФОЗЗГ - 03, финансиран от фонд "Научни изследвания" на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Велева, Е., Караколева, С. *Числени методи и статистика – теория и практика с MATLAB*, РУ „Ангел Кънчев“, Русе, 2011.
- [2] *Втора Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Русенски университет „Ангел Кънчев“, Русе, 17-19. 10. 2013.
<http://nsocm2013.ami.uni-ruse.bg/>
- [3] *Първа Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Технически университет – Габрово, Габрово, 24-26. 10. 2012.
- [4] *Студентска олимпиада по компютърна математика*, Технически университет – Габрово, Габрово, 20-22. 10. 2011.
<http://www.tugab.bg/compmath/Regbg.html>
- [5] Тончев, Й., *MATHEMATICA. Преобразувания, изчисления, визуализация*, Техника, 2013.
- [6] Тончев, Й., *MuPAD. Новият символен мотор на MATLAB*, Техника, 2011.
- [7] Тончев, Й., *Приложение на MATLAB в инженерните изследвания*, Част I, РУ „Ангел Кънчев“, 2004.
- [8] *Трета Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Софийски университет „Св. Климент Охридски“, Хисаря, 7-9. 11. 2014.
<http://compmath.fmi.uni-sofia.bg/>;
- [9] Kapralov S., M. Manev, A New Brand of Math Competition for University Students, Proc. 12th International Conference of Informatics and Information Technologies – CIIT-2015, Bitola, Macedonia, April 24-26, 2015.

За контакти:

Иван Стефанов Стефанов, специалност „Компютърни науки“, II курс, Факултет „Природни науки и образование“, Русенски университет „Ангел Кънчев“, e-mail: meteora9405@abv.bg

Научен ръководител: ас. Стефка Романова Караколева, катедра „Приложна математика и статистика“, Факултет „Обществено здраве и здравни грижи“, Русенски университет „Ангел Кънчев“, тел. 082 / 888 606, e-mail: skarakoleva@uni-ruse.bg

Решаване на интеграли и производни чрез системи за компютърни изчисления и визуализация Mathematica и MATLAB/MuPAD

автор: Иван Стефанов
научен ръководител: ас. Стефка Караколева

Abstract: *Solving integrals and derivatives through a computer algebra systems Mathematica and MATLAB / MuPAD. This article is about the advantages of using Computer Algebra Systems (CAS) and how they make it easier for students to solve difficult mathematical problems. It will take a lot of effort and time without their help. Some different Derivatives and Integrals related problems are solved, with the help of a few commands.*

Key words: *Computer Algebra Systems (CAS), Mathematics, Mathematical Analysis, derivative, integral, MATLAB, MuPAD, Mathematica*

ВЪВЕДЕНИЕ

С непрекъснатото развитие на компютърната и комуникационна техника и масовото използване на компютърни технологии във всички области, включително и в образованието, се налага решаването на задачи по Висша математика да бъде изградено на съвременно ниво. Използването на компютърни системи за изчисление като MATLAB, Mathematica, Maple, [1, 5, 6, 7] осигурява нагледност, бързина и стимулират логическото мислене на студентите. Решаването на задачи с тези системи се улеснява от достъпните ръководства и help-системи.

В настоящата статия се разглеждат различни класове задачи от Математичен анализ – Диференциално и интегрално смятане, които могат да бъдат решавани успешно чрез система за компютърна математика. Задачите са решени с Mathematica, MATLAB и MuPAD, като е направен анализ на решенията им в съответните системи за изчисление.

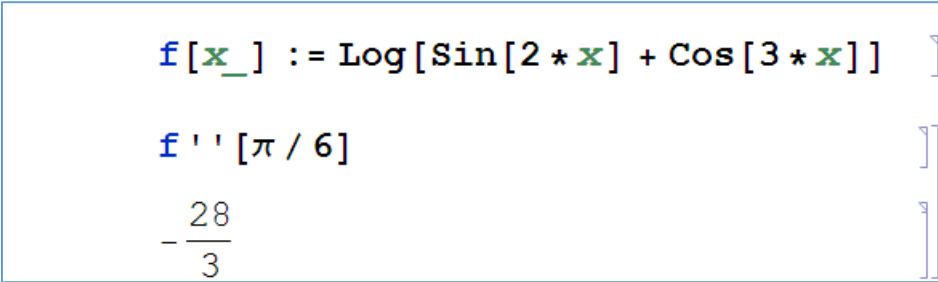
Представените задачи и техните решения илюстрират ползата от използването на системи за компютърни изчисления за решаване на нестандартни задачи и такива, чието решаване е свързано с множество преобразувания и изчисления.

РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ОТ ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

Следните задачи са част от задачите, давани на Национални студентски олимпиади по компютърна математика [2, 3, 4, 8, 9, 10], които са свързани с решаване на производни и интеграли.

Задача 1. (CompMath-2012/A-16) [3] *Да се пресметне $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ако $(x) = \ln(\sin 2x + \cos 3x)$.*

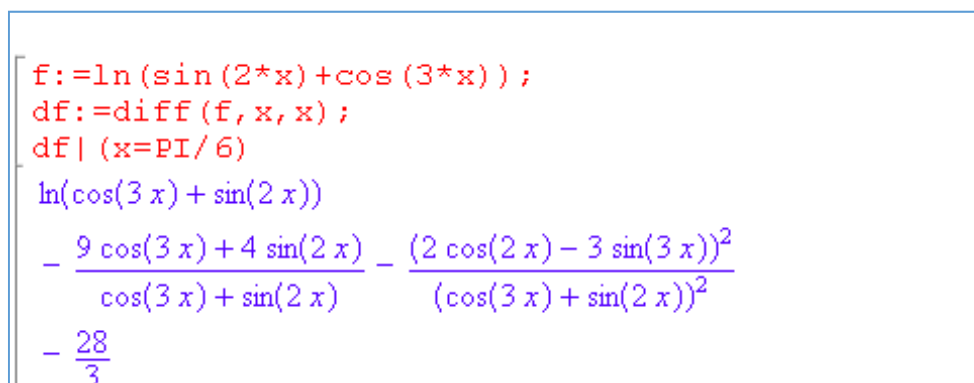
Решение: Пресмятаме втората производна [5] спрямо x , след което заместваем аргумента с $\left(\frac{\pi}{6}\right)$, фиг.1.



```
f[x_] := Log[Sin[2 * x] + Cos[3 * x]]  
f''[π / 6]  
- 28 / 3
```

Фиг. 1. Решение на Задача 1 с Mathematica

По подобен начин получаваме решението в MuPAD, [6]. Използваме процедурата `diff` от стандартната библиотека на MuPAD за намиране на производните на функцията, след което заместваме стойността на променливата в получения израз за втората производна, фиг. 2.



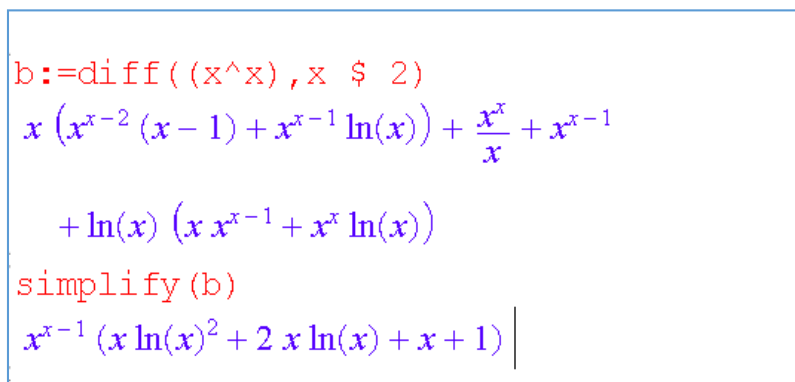
```
f:=ln(sin(2*x)+cos(3*x));
df:=diff(f,x,x);
df|(x=PI/6)
```

$$\ln(\cos(3x) + \sin(2x)) - \frac{9\cos(3x) + 4\sin(2x)}{\cos(3x) + \sin(2x)} - \frac{(2\cos(2x) - 3\sin(3x))^2}{(\cos(3x) + \sin(2x))^2} - \frac{28}{3}$$

Фиг.2 Решение на Задача 1 с MuPAD

Задача 2. (CompMath-2013/A-17) [2] Да се намери втората производна на функцията $f(x) = x^x$

Решение: Задачата е подобна на Задача 1, затова отново прилагаме стандартната процедура `diff` на системата MuPAD [6], като за намиране на втората производна вместо двукратно изписване на променливата, по която диференцираме, използваме аналогичния запис чрез символ \$, виж фиг. 2. Чрез командата `simplify` опростяваме получения резултат.



```
b:=diff((x^x),x,$ 2)
x (x^{x-2} (x-1) + x^{x-1} ln(x)) + \frac{x^x}{x} + x^{x-1}
+ ln(x) (x x^{x-1} + x^x ln(x))
simplify(b)
x^{x-1} (x ln(x)^2 + 2 x ln(x) + x + 1) |
```

Фиг. 3. Решение на Задача 2 с MuPAD.

Задача 3. (CompMath-2012/A-22) [3] Да се пресметне интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

Решение: Стандартната процедура на системата Mathematica [5] за решаване на интегралите `Integrate` изисква задаване на подинтегралната функция, променливата, по която интегрираме и интервала на интегриране, фиг. 4:


```
Integrate[1 / (1 + Sin[x] + Cos[x]), {x, 0, Pi / 2}]
Log[2]
```

Фиг. 4. Решение на Задача 3. със системата Mathematica

Задача 4. (CompMath-2014/A-19) [8] *Да се пресметне определения интеграл*

$$\int_0^{2014} \frac{\ln x \, dx}{\sqrt{2014x - x^2}}$$

Решение: Тъй като подинтегралната функция не е дефинирана в горната граница на интеграла, опитът ни да го решим чрез стандартната процедура на MuPAD [6] за решаване на определен интеграл не дава задоволителен резултат. Затова използваме процедурата `int` от библиотеката `numeric` на MuPAD, фиг. 5.

```
numeric::int(ln(x) / sqrt(2014 * x - x^2), x = 0..2014)
19.54568169
```

Фиг. 5 Решение на Задача 4 с MuPAD

Задача 5. (CompMath-2013/A-23) [2] *Да се пресметне*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos x}{(\sin x + \cos x + 2)^3} dx,$$

като решението се запише с точност осем знака след десетичната запетая.

Решение: `NIntegrate` е функция на системата Mathematica за числено решаване на определени интеграли [5]. В задачата използваме параметъра `WorkingPrecision` за задаване на работната точност, като за по-точен отговор я задаваме първо 20, а след това - 9 значещи цифри, фиг. 6.

```
N[NIntegrate[1 + Cos[x] / (Sin[x] + Cos[x] + 2)^3, {x, 0, 2 Pi}, WorkingPrecision -> 20], 9]
2.22144147
```

Фиг. 6. Решение на Задача 5 с Mathematica

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С настоящата разработка ние искаме да покажем на студентите, които не са използвали досега системи за компютърна математика колко лесно и бързо могат да бъдат решавани разнообразни задачи, свързани с учебните ангажименти. Нашите изследвания в областта на Компютърната математика не спират до тук и са свързани с разработване на нови класове задачи по Висша математика, които могат да бъдат решавани със системи за компютърни изчисления и визуализация.

ЗАБЕЛЕЖКА

Статията отразява резултати от работата по проект № 2015 – ФОЗЗГ - 03, финансиран от фонд "Научни изследвания" на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Велева, Е., Караколева, С. *Числени методи и статистика – теория и практика с MATLAB*, РУ „Ангел Кънчев“, Русе, 2011.

[2] *Втора Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Русенски университет „Ангел Кънчев“, Русе, 17-19. 10. 2013.
<http://nsocm2013.ami.uni-ruse.bg/>

[3] *Първа Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Технически университет – Габрово, Габрово, 24-26. 10. 2012.

[4] *Студентска олимпиада по компютърна математика*, Технически университет – Габрово, Габрово, 20-22. 10. 2011.
<http://www.tugab.bg/compmath/Regbg.html>

[5] Тончев, Й., *MATHEMATICA. Преобразувания, изчисления, визуализация*, Техника, 2013.

[6] Тончев, Й., *MuPAD. Новият символен мотор на MATLAB*, Техника, 2011.

[7] Тончев, Й., *Приложение на MATLAB в инженерните изследвания*, Част I, РУ „Ангел Кънчев“, 2004.

[8] *Трета Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Софийски университет „Св. Климент Охридски“, Хисаря, 7-9. 11. 2014.
<http://compmath.fmi.uni-sofia.bg/>;

[9] Kapralov S., M. Manev, A New Brand of Math Competition for University Students, Proc. 12th International Conference of Informatics and Information Technologies – CIIT-2015, Bitola, Macedonia, April 24-26, 2015.

[10] Karakoleva S., I. Georgiev, S. Georgiev, P. Zlatarov, *Results from Computer Mathematics Education for Motivated Students at Ruse University*, Proc. of the Union of Scientists – Ruse '15.

За контакти:

Иван Стефанов Стефанов, специалност „Компютърни науки“, II курс, Факултет „Природни науки и образование“, Русенски университет „Ангел Кънчев“, e-mail: meteora9405@abv.bg

Научен ръководител: ас. Стефка Романова Караколева, катедра „Приложна математика и статистика“, Факултет „Обществено здраве и здравни грижи“, Русенски университет „А. Кънчев“, тел. 082 / 888 606, e-mail: skarakoleva@uni-ruse.bg

Решаване на матрични уравнения с MATLAB / MuPAD

автор: Слави Георгиев

научен ръководител: ас. Стефка Караколева

Abstract: Solving matrix equations with MATLAB/MuPAD: In this paper problems which include solving matrix equations are considered. In the beginning some short theory introduction is made. The next section consists of pure matrix equations in different shapes. Later some systems of linear equations are proposed, which can be done by solving the matrix form of the systems. In the end a real-world problem is presented.

Key words: matrix equations, MATLAB, MuPAD, matrices, determinant, rank, system of linear equations, National Student Olympiad in Computer Mathematics

ВЪВЕДЕНИЕ

Теорията на матриците е един от основните дялове на линейната алгебра. Тяхното решаване е често възникваща задача в множество научни области като физика, химия, инженерни науки, икономика и др.

Към матрични уравнения се свежда и решаването на системи линейни уравнения, числено решаване на диференциални уравнения, оптимизационни задачи и пр. Поради голямото си практическо значение, те са важна част от съвременната линейна алгебра.

В настоящата разработка са показани и решени множество задачи, дадени на Национални студентски олимпиади по Компютърна математика [1, 6, 9, 10,11], които съдържат или водят до решаване на матрични уравнения. Обсъдени са различни подходи и са обяснени някои особености при решаването на матрични уравнения в MATLAB и неговият символен пакет MuPAD.

ТЕОРЕТИЧНА ПОСТАНОВКА

Тук са изяснени някои основни правила и термини, които са използвани в решенията на изложените задачи.

Определение. Система от вида

[illegible]

се нарича система от m линейни уравнения с n неизвестни [3]. Числата a_{ij} се наричат коефициенти пред неизвестните x_j , $j = \overline{1, n}$, а b_i , $i = \overline{1, m}$ – свободни коефициенти.

Определение. Решение $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ на системата (1) е такъв вектор, че ако неговите координати се заместят вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ в левите страни на уравненията на системата, се получават тъждествени равенства.

Всяка система от линейни уравнения може да се запише в матричен вид по следния начин:

$$Ax = b,$$

където A е матрица от коефициентите на системата уравнения, x е вектор на неизвестните и b е вектор на свободните коефициенти.

Детерминантата и рангът на матрицата са важни скаларни числови характеристики. Изчисляването им е възможно само при квадратни матрици.

Те могат да се изчислят съответно с командите `det` и `rank` в `MATLAB`.

Определение. Матрицата A^{-1} е обратна на матрицата A , ако е изпълнено

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

където E е единичната матрица [4].

Както можем да забележим, не всяка матрица има обратна.

Определение. Квадратна матрица се нарича неособена (неизродена), ако нейната детерминанта е различна от нула.

Теорема. Всяка неособена матрица има обратна матрица.

Теорема (Кронекер – Капели). Разглеждаме системата нехомогенни уравнения в матричен вид:

$$Ax = b,$$

където

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (2)$$

1. Ако $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = r$, то (2) има решение и се нарича съвместима. При това:

- ако $r = n$, системата (2) има единствено решение и се нарича определена;
- ако $r < n$, то (2) има безброй много решения и се нарича неопределена, като r неизвестни са базисни, а останалите $(n - r)$ неизвестни – свободни. В този случай системата се решава спрямо базисните неизвестни, като на свободните неизвестни се дават произволни стойности, т. е. решението е функция на $(n - r)$ константи.

2. Ако $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A|b)$, то (2) няма решение и се нарича несъвместима.

ЗАДАЧИ ОТ ОЛИМПИАДИ ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА, СЪДЪРЖАЩИ МАТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

В този раздел разглеждаме задачи, в които матричното уравнение е дадено в явен вид. Показваме някои подходи за решаването им, които ще използваме при задачите, от които възникват матрични уравнения, например системи линейни уравнения.

Задача 1. (CompMath-2011-Примерна тема/10) Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ 9 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Намерете матрица X , за която $AX = B$.

Решение. Решението на задачата не е толкова трудоемко, колкото на пръв поглед изглежда. За да намерим матрицата X , можем да умножим отляво двете страни на уравнението с обратната матрица A^{-1} на матрицата A , ако съществува, и да използваме дефиницията на обратна матрица за намирането на матрицата X :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Бихме могли да приложим това решение в MATLAB:

A = [1 5 4 8; -1 3 5 4; 3 4 5 9; 8 5 7 3]

B = [4 6; 3 4; 9 -7; 3 5]

det(A)

X = inv(A)*B

A*x

Проверката за съществуване на обратна матрица се извършва с командата `det(A)`. Получаваме стойността на X и, след заместване на полученото решение в матричното уравнение, се уверяваме в коректността на отговора:

Всъщност, за да решим матричното уравнение $AX = B$, не е нужно да намираме A^{-1} . Можем да използваме оператора за „ляво деление“ в MATLAB:

```
X = A\B
ans =
    0.4015    -1.3011
   -2.0372     6.5279
    0.8736    -1.4052
    1.2862    -2.4647
```

Сега сме убедени, че винаги, когато уравнението има решение, ние можем да го получим. Операторите за ляво (\) и дясно (/) деление решават системата по метода на Гаус в случай, че тя е определена (има единствено решение) и по метода на най-малките квадрати – ако е неопределена. Също така те са универсални и действат и при правоъгълни матрици [7].

Задача 2. (CompMath-2011/8) [6] Да се реши уравнението $XA = B$, ако

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 8 & 6 & 9 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Аналогично на предходната задача, тук прилагаме умножение отдясно на двете страни на уравнението с A^{-1} :

$$XAA^{-1} = X = BA^{-1}.$$

Вместо $B \cdot \text{inv}(A)$ използваме оператора за дясно деление:

```
A = [1 3 5; 8 6 9; 3 -1 4]
B = [3 2 -9; 1 6 4; 7 4 -7]
X = B/A
X =
   -2.8839    1.4554   -1.9196
    0.9018    0.3839   -0.9911
   -3.5089    2.0804   -2.0446
```

Задача 3. (CompMath-2013/A-9) [1] Да се реши уравнението $AXA = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Тук ситуацията не е много по-сложна, отколкото в предходните задачи. Умножаваме двете страни на равенството с A^{-1} отляво и отдясно:

$$A^{-1}AXAA^{-1} = X = A^{-1}BA^{-1}.$$

Отбелязваме, че редът на действията не е от значение.

```
A = [sym('1') -2 2; 3 -4 1; 2 2 -1]
B = [sym('-1') 2 1; 1 4 -1; 2 -2 1]
X = (A\B)/A
X = A\ (B/A)
X =
[ 27/100,   -3/100,   21/100]
[  11/40,    1/40,   -7/40]
[ 69/100,  -41/100, -13/100]
```

Задача 4. (CompMath-2012/Б-7) [5] Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2012 & x \\ 0 & 1 & 2012 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За кои стойности на x е вярно равенството $A^{2012} = B$?

Решение. Нека да изчислим A^{2012} и да сравним двете матрици.

```
syms x
A = [1 1 x; 0 1 1; 0 0 1]
B = [1 2012 x; 0 1 2012; 0 0 1]
```

Получаваме, че $\tilde{A} = A^{2012} = \begin{pmatrix} 1 & 2012 & 2012x + 2023066 \\ 0 & 1 & 2012 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Две матрици са равни, ако са с еднакви размери и елементите им са равни.

Така че, за да получим решението на задачата, трябва да приравним $\tilde{a}_{13} = b_{13}$:

```
solve(2012*x + 2023066 == x)
```

Отговорът на задачата е $x = -1006$.

Задача 5. (CompMath-2011/9) [6] Да се реши уравнението $X^2 = A$, където

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Решение. Това уравнение се различава от разглежданите досега. Решението е да го сведем до тривиалното уравнение $X = \sqrt{A}$. Намирането на корен квадратен от матрица се извършва с командата `sqrtm`:

```
A = [sym('13') 9; 12 16]
sqrtm(A)
ans =
[ 23/7, 9/7]
[ 12/7, 26/7]
```

Разбира се, можем и да повдигнем матрицата A на степен $1/2$:

```
A^(1/2)
```

Резултатът, както се очаква, е същият.

Задача 6. (CompMath-2014/A-11) [9] Дадени са функцията $f(x) = x^{2014} - x^{1989}$

и матрицата

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Да се пресметне $f(A)$.

Решение. Нека обявим f като анонимна функция:

```
f = @(x) x^2014 - x^1989
A = [sym('-1') -2 2; 4 5 -4; 3 3 -2]
```

Сега остава просто да извикаме $f(A)$:

```
f(A)
ans =
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
```

Забележка. При обявяването на анонимната функция трябва да внимаваме да не заменим оператора за степенуване (^) с оператора за почленно степенуване (.^), защото в такъв случай бихме повдигали елементите на матрицата в степен, а не самата матрица.

ЗАДАЧИ ОТ ОЛИМПИАДИ ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА, ВОДЕЩИ ДО РЕШАВАНЕТО НА МАТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

В този раздел разглеждаме задачи, в процеса на решаването на които възникват матрични уравнения. Такива са например системи линейни уравнения и сродни задачи.

Задача 7. [3] Да се реши системата уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение: Системата е нехомогенна. Съгласно гореизложената теория, нека да запишем системата в матричен вид $Ax = b$, където:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

```
A = [1 2 3; 2 3 4; 4 2 5]
```

```
b = [4; 5; 1]
```

```
rank(A) == rank([A b])
```

Ранговете на основната и разширената матрица са равни, следователно системата има решение.

```
rank(A)
```

Рангът на матрицата A е 3, което е точно колкото е броят на неизвестните, така че решението е единствено. Можем да го получим с командата:

```
x = A\b
```

```
x =
```

```
-1.4000
```

```
1.8000
```

```
0.6000
```

Задача 8. (CompMath-2014/Б-5) [9] При какви стойности на параметъра a системата

$$\begin{cases} ax + 3y + z = 0 \\ x + (a + 1)y - z = 0 \\ (2a - 1)x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

има ненулево решение?

Решение: За да решим задачата, трябва да си припомним теорията. Първо забелязваме, че системата е хомогенна. Знаем, че хомогенна система винаги има тривиално (нулево) решение, а ненулево решение се получава тогава, когато детерминантата на системата е равна на нула. След тези разсъждения, вече сме готови да решим задачата. Нека да го направим с MuPAD [8], фиг. 1:

```

A := matrix([[a,3,1],[1,a+1,-1],[2*a-1,2,4]]);

$$\begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 \\ 2a-1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

solve(det(A) = 0, a);
 $\left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$ 

```

Фиг. 1. Решение на Задача 8 с MuPAD

Задача 9. (CompMath-2012/Б-10) [5] Да се изследва и реши системата в зависимост от стойностите на параметъра α :

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = \alpha^2 \end{cases}$$

Решение: Записваме системата в матричен вид и дефинираме матрицата от коефициентите, зависеща от параметъра α и десните страни, след което решаваме с ляво деление:

```

syms x alpha
A = [alpha 1 1; 1 alpha 1; 1 1 alpha]
b = [1; 1; alpha^2]
x = A\b
x =
    -alpha/(alpha + 2)
    -alpha/(alpha + 2)
    (alpha^2 + 2*alpha + 2)/(alpha + 2)

```

Получаваме, че системата е неопределена за $\forall \alpha \neq -2$.

Сега ще завършим с една задача от практиката [2]:

Задача 10. [2] Фирма е поела ангажимент да обработи четири вида семена – пшеница, царевица, слънчоглед и ечемик. За обработката на всеки един вид от тези семена са необходими три вида препаратите П1, П2 и П3. Разходните норми за количествата на препаратите, използвани за обработка на единица семена от всеки вид, в условни единици, са дадени в табл. 1.

Таблица 1. Разходни норми за количествата на препаратите

	Пшеница	Царевица	Слънчоглед	Ечемик
1	1	3	3	4
2	1	4	3	5
3	1	3	4	4

За следващия сезон фирмата разполага с наличности от П1, П2 и П3 съответно 70, 75 и 80. Да се намери какви количества семена могат да се обработят с наличните количества препарати, при пълното им изразходване.

Нека количествата от съответните семена са неотрицателни реални числа x_1, x_2, x_3, x_4 (табл. 2).

Таблица 2. Модел за задача 10

	Пшеница	Царевица	Слънчоглед	Ечемик	Наличности
П1	1	3	3	4	70
П2	1	4	3	5	75
П3	1	3	4	4	80
Количества	x_1	x_2	x_3	x_4	

Тогава количествата от различните видове семена се определя от системата линейни алгебрични уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 70 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 75 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 80 \end{cases}$$

Рангът на основната матрица е по-малък от броя уравнения, така че системата е неопределена. Ако се опитаме да я решим с матричния подход, ще получим само едно частно решение. Затова използваме интерфейса на `solve` за системи:

```
[x1 x2 x3 x4] = solve('x1+3*x2+3*x3+4*x4=70',
    'x1+4*x2+3*x3+5*x4=75',
    'x1+3*x2+4*x3+4*x4=80', 'x1', 'x2', 'x3', 'x4')
```

В резултат на изпълнение на командата се получава решение

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (25 - z, 5 - z, 10, z),$$

където z е параметър. От ограниченията за неизвестните x_1, x_2, x_3, x_4 параметърът $z \in [0; 5]$.

След анализ на резултатите се установява, че количеството на слънчогледа е фиксирано, докато количествата на останалите семена са различни при различни стойности на параметъра z . Логично се избира най-добре удовлетворяващото нуждите решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящата разработка разкрива предимствата на решаването на матрични уравнения с помощта на MATLAB. Изложени са основни определения и теореми, свързани с аналитичното изучаване на матричните уравнения и системите линейни уравнения. Използвани са примерни задачи, давани на Национална студентска олимпиада по компютърна математика [10,11], които включват в решението си работа с матрични уравнения. Предимството при използването на MATLAB е очевидно – то спестява много усилия и разкрива някои математически идеи. В доклада са изложени разнообразни подходи при решаването на задачите и са използвани различни команди и възможности на MATLAB.

ЗАБЕЛЕЖКА

Статията отразява резултати от работата по проект № 2015 – ФОЗЗГ - 03, финансиран от фонд "Научни изследвания" на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Втора Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Русенски университет „Ангел Кънчев“, Русе, 17-19.10.2013.
<http://nsocm2013.ami.uni-ruse.bg/>.
- [2] Караколева, С., Георгиев, И., *Компютърна математика за мотивирани студенти*, Шеста Национална конференция „Образование в информационното общество“, 2013.
- [3] Караколева, С., Велева, Е., *Числени методи и статистика – теория и практика с MATLAB*, РУ „Ангел Кънчев“, Русе, 2011.
- [4] Марков, И., *Въведение в матричното смятане*, София, 2007.
- [5] *Първа Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Технически университет – Габрово, Габрово, 24-26.10.2012.
- [6] *Студентска олимпиада по компютърна математика*, Технически университет – Габрово, Габрово, 20-22.10.2011.
<http://www.tugab.bg/compmath/Regbg.html>.
- [7] Тончев, Й., *Приложение на MATLAB в инженерните изследвания*, Част I, РУ „Ангел Кънчев“, 2004.
- [8] Тончев, Й., *MuPAD – Новият символен мотор на MATLAB*, Техника, София, 2011.
- [9] *Трета Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Софийски университет „Св. Климент Охридски“, Хисаря, 7-9.11.2014.
<http://compmath.fmi.uni-sofia.bg/>.
- [10] Kapralov S., M. Manev, A New Brand of Math Competition for University Students, Proc. 12th International Conference of Informatics and Information Technologies – CIIT-2015, Bitola, Macedonia, April 24-26, 2015.
- [11] Karakoleva S., I. Georgiev, S. Georgiev, P. Zlatarov, *Results from Computer Mathematics Education for Motivated Students at Ruse University*, Proc. of the Union of Scientists – Ruse '15.

За контакти:

Слави Георгиев Георгиев, специалност „Финансова математика“, II курс, Факултет „Природни науки и образование“, Русенски университет „Ангел Кънчев“, e-mail: aslv@abv.bg

Научен ръководител: ас. Стефка Романова Караколева, катедра „Приложна математика и статистика“, Факултет „Обществено здраве и здравни грижи“, Русенски университет „Ангел Кънчев“, тел. 082 / 888 606, e-mail: skarakoleva@uni-ruse.bg

Приложение на MATLAB за решаване на алгебрични и тригонометрични уравнения

автор: Слави Георгиев

научен ръководител: ас. Стефка Караколева

Abstract: *An application of MATLAB in solving algebraic and trigonometrical equations: In this paper interesting problems whose solutions can be derived with MATLAB are considered. Some of them are algebraic equations, which may be examined with trigonometric approach. Others appear to be purely trigonometric tasks that cannot be solved straightforward. The advantage in using MATLAB and its symbolic engine MuPAD for the task solutions is revealed and discussed. Some techniques and approaches in problem solving are proposed.*

Key words: *trigonometry, MATLAB, Computer Algebra Systems, analytic and numeric solvers, computer mathematics*

ВЪВЕДЕНИЕ

Настоящата разработка има за цел да онагледява предимствата на решаването на различни класове задачи със система за компютърна математика MATLAB. За целта са подбрани алгебрични уравнения, решими аналитично с тригонометрични субституции, както и тригонометрични задачи, дадени на Национална студентска олимпиада по Компютърна математика [9]. В доклада са изложени разнообразни подходи при решаването на задачите и са използвани различни команди и процедури от функционалния интерфейс на MATLAB и MuPAD.

ИЗЛОЖЕНИЕ

РЕШАВАНЕ НА АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ ЧРЕЗ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ СУБСТИТУЦИИ

Следните задачи илюстрират използването на тригонометрията за решаване на алгебрични уравнения. На пръв поглед дадените задачи нямат нищо общо с тригонометрията, но тук ние представяме елегантни решения, използващи тригонометрични способности [2]. Освен аналитично, решенията са получени и с помощта на системата за компютърни изчисления MATLAB за илюстрация на нейните възможности и аргументиране на ползата от Компютърната математика.

Задача 1. Решете уравнението $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Решение. Уравнението съдържа радикал и висока степен на x , което означава, че решаването му с изцяло алгебрични средства би било трудоемко. Забелязваме, че $|x| \leq 1$. Този факт ни подсказва да извършим полагането $x = \cos \alpha$, при което, за да бъде съответствието еднозначно обратимо, нека $\alpha \in [0; \pi]$. Уравнението придобива вида:

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

След прилагане на основното тригонометрично тъждество и формулата за утроен ъгъл получаваме $\sin \alpha = \cos 3\alpha$, което, поради дефиниционната област на α е еквивалентно на

$$\cos 3\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0.$$

Решенията на последното уравнение се дават с

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \end{cases}, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Отчитайки условието $0 \leq \alpha \leq \pi$, получаваме три решения за α : $\alpha_1 = \pi/8$, $\alpha_2 = 5\pi/8$, $\alpha_3 = 3\pi/4$. Вече сме готови с отговора на поставената задача – уравнението в условието има три корена:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad x_2 = \cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad x_3 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Нека сега да решим задачата с помощта на MATLAB.

Означаваме променливата x като символна и записваме първоначалното уравнение за решаване, като сме прехвърлили всички членове в лявата страна на равенството. Тук няма нужда да указваме спрямо коя променлива да се решава:

```
syms x
solve(sqrt(1-x^2)-4*x^3+3*x)
```

Отговорът не се нуждае от опростяване. Можем да използваме функцията `pretty`, за да видим резултата в по-четим вид.

Задача 2. Решете уравнението $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Можем да решим задачата, като използваме познатата субституция $x = \cos \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$. Решаването с тригонометрични способности води до отговор $x = \cos \frac{3\pi}{10}$.

Сега нека да решим уравнението с MATLAB:

```
syms x
solve(sqrt(1-x)-2*x^2+1-2*x*sqrt(1-x^2))
```

След като приложим някои прости преобразувания върху получения резултат, получаваме отговор на задачата:

$$x = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Задача 3. Решете уравнението:

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

Решение. Отново можем да положим $x = \cos \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$. След елементарни преобразувания получаваме уравнението

$$\sqrt{\frac{1+\sin 2\alpha}{2}} = -\cos 2\alpha.$$

То е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} 1 + \sin 2\alpha = 2 - 2\sin^2 2\alpha \\ \cos 2\alpha \leq 0. \end{cases}$$

Решенията ѝ са следните:

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} + n\pi \end{cases}, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Съответно две стойности лежат в интервала $[0; \pi]$:

$$x_1 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

С MATLAB решаването на задачата става аналогично на Задача 2:

```
syms x
solve(sqrt((1+2*x*sqrt(1-x^2))/2)+2*x^2-1)
```

След рационализиране на резултата, се получават съответните стойности за променливата x .

Решенията на гореизложените примери ни убеждават, че можем да използваме универсалния солвър на MATLAB за разнообразни алгебрични уравнения, чиито решения дори и с тригонометричен подход биха се оказали не чак толкова прости. Но възможностите на MATLAB се простират много над тази функционалност [5]. Нека да разгледаме още няколко задачи.

Задача 4. Колко корена на уравнението $8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$ лежат в интервала $[0; 1]$?

Решение. Наличието на множителя $1 - 2x^2$ ни подсказва да направим тригонометричната замяна $x = \cos \varphi$, $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

След заместване в уравнението се получава

$$-8 \cos \varphi \cos 2\varphi \cos 4\varphi = 1,$$

откъдето следва

$$-\sin 8\varphi = \sin \varphi.$$

Последното уравнение е еквивалентно на

$$2 \sin \frac{9}{2}\varphi \cos \frac{7}{2}\varphi = 0.$$

Следователно, получаваме две групи решения: $\varphi = \frac{2\pi k}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$ и $\varphi = \frac{\pi}{7} + \frac{2n\pi}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$. От първата група решения в интервала $[0; 1]$ лежат две стойности, а от втората – също две.

Така, окончателният отговор на задачата е, че в посочения интервал лежат точно четири корена на уравнението.

Тъй като изразът в условието е алгебричен полином, можем да използваме командата `roots` в MATLAB. Първо привеждаме полинома в нормален вид:

$$\text{expand}(8*x*(1-2*x^2)*(8*x^4-8*x^2+1)-1)$$

След това записваме коефициентите на резултатния полином като вектор-ред и ги подаваме на командата

$$\text{roots}([-128 \ 0 \ 192 \ 0 \ -80 \ 0 \ 8 \ -1])$$

Забелязваме, че точно четири корена на уравнението лежат в интервала $[0; 1]$.

Задача 5. Колко корена в интервала $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ има уравнението

$$4\sqrt{2}|x|(x^2 - 1)(2x^4 - 4x^2 + 1) = 1?$$

Решение. Тъй като можем да разгледаме даденото уравнение като функция на $|x|$, то достатъчно е да изследваме броя на корените в интервала $[0; \sqrt{2}]$. Полагаме

$$x = \sqrt{2} \cos \alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

След поредица преобразувания и опростявания, получаваме

$$8 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = 1.$$

Това уравнение в интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ е еквивалентно на

$$\sin 8\alpha - \sin \alpha = 0.$$

Получаваме корените

$$\alpha_1 = \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{9}, n \in \mathbb{Z}.$$

От първата група решения в интервала $(0; \frac{\pi}{2})$ намираме само един корен, а от втората – два. И така, в интервала $[0; \sqrt{2}]$ уравнението има три корена, следователно в интервала $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ уравнението има шест корена.

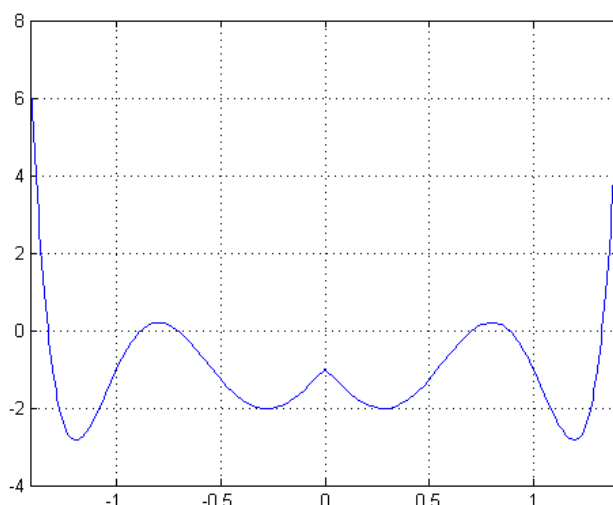
Сега нека да използваме графичните възможности на MATLAB. Можем да приложим универсалната команда `plot`, но вместо да дискретизираме x , обявяваме анонимна функция

```
f=@(x) 4*sqrt(2)*abs(x)*(x^2-1)*(2*x^4-4*x^2+1)-1
```

и я начертаваме в изискуемия интервал (фиг. 1):

```
fplot(f, [-sqrt(2) sqrt(2)]), grid
```

Получената графика потвърждава аналитичното решение – в интервала $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ има шест корена на даденото уравнение, фиг. 1.



Фиг. 1. Графика на функцията $4\sqrt{2}|x|(x^2 - 1)(2x^4 - 4x^2 + 1) - 1$.

ЗАДАЧИ ОТ ОЛИМПИАДИ ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА, СЪДЪРЖАЩИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ

Националната студентска олимпиада по Компютърна математика се провежда веднъж годишно [1,3,7,9]. Според регламента на олимпиадата, състезателите решават математически задачи с помощта на система за компютърна математика като MATLAB, Mathematica, Maple и други [8]. Задачи 6 – 11 илюстрират използването на MATLAB и неговия символен пакет MuPAD за решаване на нестандартни задачи, съдържащи тригонометрични функции.

Задача 6. (CompMath-2012/A-19) [3] Да се намерят корените на уравнението $11 \sin 3x = 9 \ln x$.

Решение. Забелязваме, че корените на даденото трансцендентно уравнение не могат да се намерят аналитично, тъй като универсалният солвър не ни връща адекватен резултат. Нека да намерим приближените стойности на x , удовлетворяващи уравнението. За целта използваме символния мотор на MATLAB – MuPAD, фиг. 2.

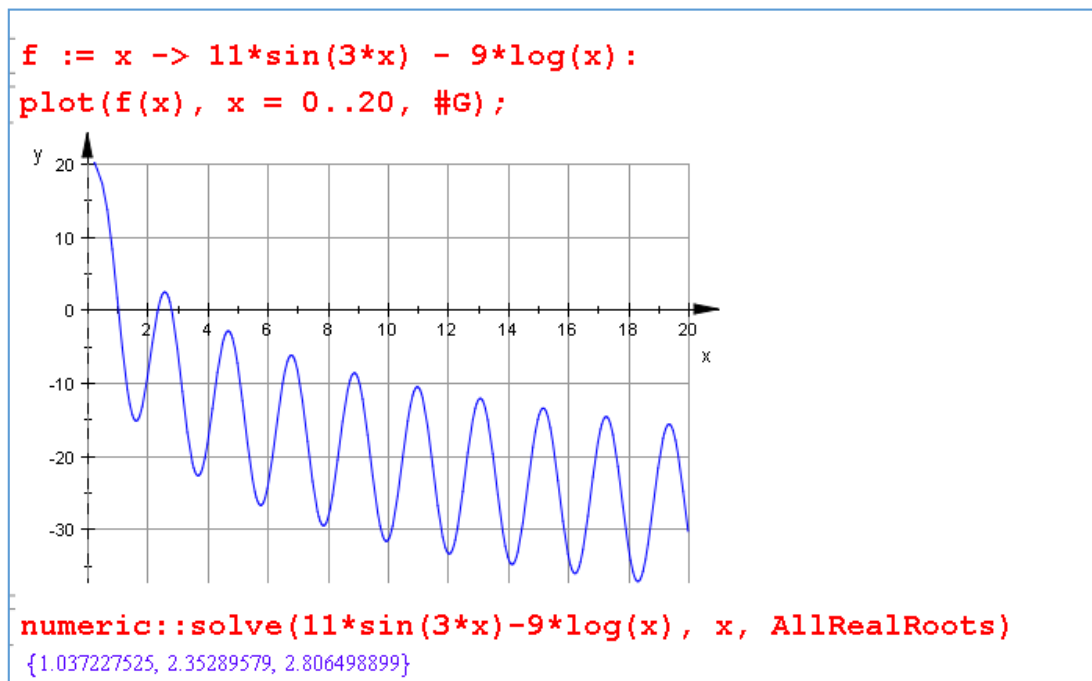
Тук трябва да обърнем внимание, че когато извършваме символни пресмятания в MATLAB, той неявно се обръща към MuPAD и извиква съответните функции. Така че, както се очаква, използването на числения солвър ни връща

същия незадоволителен резултат. В случая използваме опцията `AllRealRoots`, за да изолираме всички реални корени на уравнението:

```
numeric::solve(11*sin(3*x)-9*log(x), x, AllRealRoots)
```

Сега вече задачата е решена, фиг. 2:

```
{1.037227525, 2.35289579, 2.806498899}
```



Фиг. 2. Решаване на Задача 6 с MuPAD

Задача 7. (CompMath-2012/A-18) [3] Да се намери най-малкото положително решение на уравнението $\sin x = \cos(4 - x)$.

Решение. Тук можем да подходим по няколко начина. Първо, можем да начертаяме графиката на функцията $\sin x - \cos(4 - x)$ в някакъв интервал отдалечено от нулата, за да придобием представа къде се намира най-малкият положителен корен. След това бихме могли да го приближим, например, с `numeric::fsolve`. Но този подход има няколко недостатъка, най-същественият от които е, че ще сме намерили приближената, а не точната стойност на корена.

Вместо това, нека просто получим решението на уравнението:

```
solve(sin(x)-cos(4-x), x)
```

```
{π/4 + π*k + 2 | k ∈ ℤ}
```

След като разгледаме отговора, лесно е да съобразим, че търсеният най-малък положителен корен се получава при $k = 0$, а той е именно $\frac{\pi}{4} + 2$.

Задача 8. (CompMath-2013/Б-28) [1] Да се пресметне границата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

Решение. Задачата не е толкова трудна, колкото изглежда. Нека да обърнем внимание на някои технически аспекти. Първо, да представим сбора като символна сума с итератор k . По принцип, най-интуитивната променлива за тази цел е i , но използването ѝ не е добра практика, тъй като води до объркване с имажинерната единица. След това се изчислява границата върху резултата:

```
limit(1/n * symsum(sin(k*pi/n), k, 1, n-1), n, Inf)
```

Отговорът на задачата е получен: $\frac{2}{\pi}$.

Задача 9. (CompMath-2014/A-15) [7] Да се намери най-близкият до 10 корен на уравнението $e^{-x^2} - \cos x = 0$.

Решение. Подобно на някои от предходните ситуации, опитът за директно решаване на уравнението не ни води до резултат. Затова нека предприемем алтернативна стратегия. Първо начертаваме графиката на функцията $e^{-x^2} - \cos x$ в някаква околност на 10. След като разгледаме поведението на функцията, сме убедени, че итерационният процес с начално приближение 10 е сходящ, така че използваме процедурата `fsolve` от библиотеката `numeric` на MuPAD [6]:

```
numeric::fsolve(f, x = 10)
```

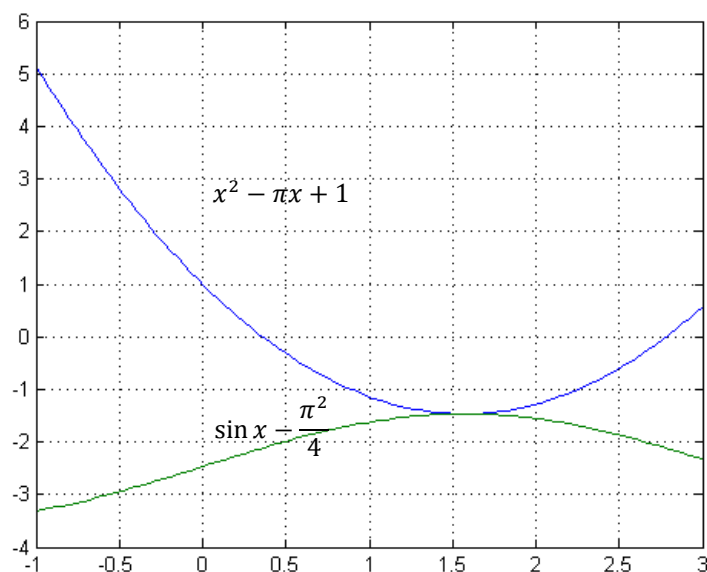
Отговорът на задачата е следният:

$[x = 10.99557429]$

ДРУГИ ИНТЕРЕСНИ ЗАДАЧИ

Задача 10. [4] Да се реши уравнението $x^2 - \pi x + 1 = \sin x - \frac{\pi^2}{4}$.

Решение. Решаването на уравнението със стандартни алгебрични методи би било много трудно. Решавайки даденото уравнение в MATLAB, установяваме, че аналитично решение е невъзможно да се намери на този етап; извикан е численият солвър и е върната приближена стойност на корена на уравнението. Затова, не чертаем графика на функцията на уравнението, а разглеждаме двете страни на равенството като отделни функции (фиг. 3). Там, където се пресичат двете графики, се намират корените на първоначалното уравнение.



Фиг. 3. Графики на функциите $x^2 - \pi x + 1$ и $\sin x - \frac{\pi^2}{4}$.

За да не гадаем по чертежа, изследваме поведението на двете функции. Намираме, че най-малката стойност на $x^2 - \pi x + 1$ се достига при $x = \frac{\pi}{2}$ и е равна на $1 - \frac{\pi^2}{4}$. Също така, най-голямата стойност на функцията $\sin x - \frac{\pi^2}{4}$ се достига при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и е равна на $1 - \frac{\pi^2}{4}$. При $k = 0$ се оказва, че двете графики се

пресичат в точка $\left(\frac{\pi}{2}, 1 - \frac{\pi^2}{4}\right)$. Уверено заключаваме, че даденото уравнение има единствен корен $x = \frac{\pi}{2}$.

В [10] е описано интересно свойство на тригонометричните функции. Показаното твърдение е само един пример от многото случаи, в които може да се приложи тази идея.

Задача 11. [10] Ако N е естествено число, да се изрази $N + 1$ без използване на аритметичните операции.

Решение. За число $z > 0$ имаме, че $\operatorname{arccotg}(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{z}\right)$. Тогава, за $z = \sin(y) \in (0, 1)$ се получава, че $\operatorname{arccotg}(\sin(y)) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin(y)}\right)$. Чрез полагане $y = \operatorname{arccotg}(\sqrt{N}) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], N \geq 0$ стигаме до $\sqrt{N+1} = \sqrt{\cot^2(y) + 1} = \frac{1}{\sin(y)}$. Това води до $\operatorname{arctg}(\sqrt{N+1}) = \operatorname{arccotg}(\sin(\operatorname{arccotg}(\sqrt{N})))$, от което следва

$$N + 1 = \left(\operatorname{tg}(\operatorname{arccotg}(\sin(\operatorname{arccotg}(\sqrt{N}))))\right)^2.$$

Аналогично се доказва и

$$N + 1 = \left(\operatorname{tg}(\operatorname{arccotg}(\cos(\operatorname{arctg}(\sqrt{N}))))\right)^2.$$

Можем да се убедим в твърдеството с командата:

```
simplify((tan(acot(cos(atan(sqrt(n))))))^2)
```

Отговорът е $n + 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разгледаните приложения на системата за математически изчисления и визуализация MATLAB, използват творчески подходи при решаване на тригонометрични уравнения и задачи, съдържащи тригонометрични функции. Предимствата при съчетаването на математически знания и опит с използването на MATLAB и символния му мотор MuPAD са очевидни – то спестява много усилия и поражда нестандартни математически идеи.

Предмет на нашите изследвания в бъдеще са възможностите на системите за математически изчисления за решаване на различни класове задачи от курса по Висша математика.

ЗАБЕЛЕЖКА

Статията отразява резултати от работата по проект № 2015 – ФОЗЗГ - 03, финансиран от фонд "Научни изследвания" на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Втора Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Русенски университет „Ангел Кънчев“, Русе, 17-19.10.2013. <http://nsocm2013.ami.uni-ruse.bg/>

[2] Мерзляк, А. Г., Полонский, В. Б., Якир, М. С., *Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач*, Киев, Агрофирма „Александрия“, 1993.

[3] *Първа Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Технически университет – Габрово, Габрово, 24-26.10.2012.

[4] Петров, Й., *Математика, задачи по математика*, Български сайт за математика <http://www.math10.com/f/viewtopic.php?f=85&t=15610>

[5] Тончев, Й., *MATLAB 7. Преобразувания. Изчисления. Визуализация. Част I*, Техника, София, 2010.

[6] Тончев, Й., *MuPAD – Новият символен мотор на MATLAB*, Техника, София, 2011.

[7] *Трета Национална студентска олимпиада по компютърна математика*, Софийски университет „Св. Климент Охридски“, Хисаря, 7-9.11.2014.
<http://compmath.fmi.uni-sofia.bg/>

[8] Karakoleva S., I. Georgiev, S. Georgiev, P. Zlatarov, *Results from Computer Mathematics Education for Motivated Students at Ruse University*, Proc. of the Union of Scientists – Ruse '15, Ruse, 2015.

[9] Kapralov S., M. Manev, *A New Brand of Math Competition for University Students*, Proc. 12th International Conference of Informatics and Information Technologies – CIIT-2015, Bitola, Macedonia, April 24-26, 2015.

[10] Tersian S., *Some Examples of the Research Approach in the Education of Mathematical Analysis*, Sixth International Conference, South-West University, Faculty of Mathematics & Natural Sciences, Blagoevgrad, Bulgaria 10 - 14 June, 2015, pp.1-14.

За контакти:

Слави Георгиев Георгиев, специалност „Финансова математика“, II курс, Факултет „Природни науки и образование“, Русенски университет „Ангел Кънчев“, e-mail: aslv@abv.bg

Научен ръководител: ас. Стефка Романова Караколева, катедра „Приложна математика и статистика“, Факултет „Обществено здраве и здравни грижи“, Русенски университет „Ангел Кънчев“, тел. 082 / 888 606, e-mail: skarakoleva@uni-ruse.bg

Времева стойност на парите

автор: Слави Георгиев

научен ръководител: проф. д-р Велизар Павлов

Abstract: Time value of money: *In this paper the concept of the time value of money is presented. The strategies for investment on the financial markets are based on comparing different money flows in different forms. The required terminology of interest and interest capitalization is explained. Then the main idea of the present value and future value of single and multiple cash flows are proposed and discussed. The mathematical problems are presented with formulae and graphics and some examples are included. In conclusion, some correlations and applications are derived.*

Key words: *time value of money, interest, capitalization, present value, future value, investment.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Много от финансовите решения са свързани с оценяване и сравняване на парични потоци, което възникват в различни моменти от времето. Базата, върху която се извършват такива сравнения, е идеята за *стойност на парите във времето*. Тя дава възможност за обективно сравняване на парични суми, които следват да бъдат изплащани или получавани в различни моменти.

Според икономическата теория времето си има цена и тази цена е лихвата. Това обуславя различната стойност на едно и също количество пари във времето. Парите, налични „днес“, са по-скъпи от парите, с които ще разполагаме „утре“, тъй като днешните пари могат да бъдат вложени, да се превърнат в капитал и след време да се изплатят с печалба.

Концепцията за различната стойност на парите във времето има фундаментално значение в съвременните финанси като наука за управлението на парите. Тази концепция отразява същността на парите като капитал и се абстрахира от промените в тяхната покупателна способност в битието им на средство за размяна, т. е. тя е валидна и при нулева инфлация.

Различната времева стойност на парите е проявление на природата на капитала – един икономически феномен, който едва ли би могъл да бъде дефиниран еднозначно. Ако се абстрахираме от спецификата на конкретните форми, в които той съществува, бихме могли да определим *капитала като нарастваща с течение на времето стойност* [3]. Независимо от конкретния ѝ носител, тази стойност винаги би могла да бъде парично изразена и оценена. Това дава възможност да се измерват количествените изменения на капитала във времето и да се извършват количествени сравнения между различните форми, в които той може да бъде държан от пазарните участници.

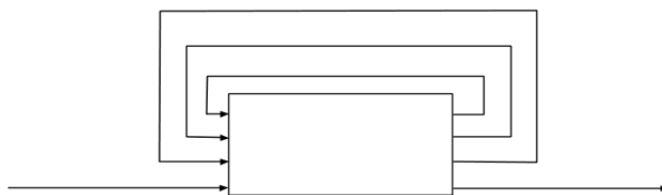
ОЛИХВЯВАНЕ И БЪДЕЩА СТОЙНОСТ

Когато парите са инвестирани, нормално е те да нарастват с времето поради доходността, която носят. Стойността, до която нараства дадена сума пари в резултат на инвестирането ѝ за един или повече периоди, се нарича бъдеща стойност на тази сума. Бъдещата стойност, както бе споменато, винаги надвишава сегашната. Икономическата теория разглежда доходността от инвестицията като компенсация за невъзможността за опериране с парите. Тази компенсация се разглежда и като алтернативна цена – доходността, която може да бъде спечелена, ако парите са вложени.

Номинален и реален лихвен процент

Нарастването на капитала като резултат от неговото олихвяване невинаги е достатъчно примамливо за притежателите на свободни парични средства [2].

Съществуват периоди от развитието на икономиката, когато независимо от обявения лихвен процент, паричният капитал реално не нараства, т. е. е налице разлика между обявения номинален лихвен процент и реалния. *Номиналният* лихвен процент показва с колко единици нарастват сто парични единици, инвестирани за един лихвен период. *Реалният* лихвен процент се получава от номиналния, като се отчете темпът на инфлация за съответния лихвен период. Всъщност, реалният лихвен процент не е просто разлика между номиналния лихвен процент и темпа на инфлация. Зависимостта между тях е малко по-сложна и е известна като ефект на Фишер. *Реалният лихвен процент винаги е по-малък от разликата между номиналния лихвен процент и темпа на инфлация, освен в случаи на нулева инфлация или на непрекъснато олихвяване.*



Фиг. 1. Ефектът от капитализацията на лихвата след три периода на олихвяване

Сложна лихва

Сложната лихва е един от най-мощните инструменти на финансовите пазари. Ефектът от капитализацията на лихвата може да се види на фигура 1.

С K_0 е означен началният капитал, n е броят периоди на олихвяване, p е лихвеният процент за един лихвен период, а с K_n се бележи нарасналият капитал след n периода. *Сумата, олихвена със сложна лихва, винаги е по-голяма от сумата, олихвена с проста лихва.* Това явление най-лесно се обяснява с факта, че при сложната лихва се дължи и лихв

Формулата за K_n при олихвяване на K_0 за $n = 3, p > 0$ е следната:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Ефективен лихвен процент

Често някои инвестиции са със срок, по-малък от една година. Тогава ние се интересуваме не само от номиналния лихвен процент за срока на инвестицията, но и от капитализираната годишна лихва, т. е. от ефективната годишна норма на възвръщаемост. Ефективният лихвен процент е такъв лихвен процент, определен на годишна база, който осигурява същото годишно нарастване, както и номинален лихвен процент, който се капитализира m пъти в годината.

Ефективният лихвен процент се изчислява по следния начин:

$$i = \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m - 1,$$

където с p означаваме номиналния лихвен процент за съответния срок, изразен като десетична дроб.

Нека да направим сравнение между ефективните норми на възвръщаемост при еднакъв номинален лихвен процент и различни срокове на олихвяване, съответно различна честота на капитализиране за една година. За целите на примера годишната номинална процентна лихва е 6% [1]. Данните са показани в таблица 1:

Таблица 1. Сравнение на стойностите на ефективния годишен лихвен процент при различни честоти на олихвяване; годишният номинален лихвен процент е 6%.

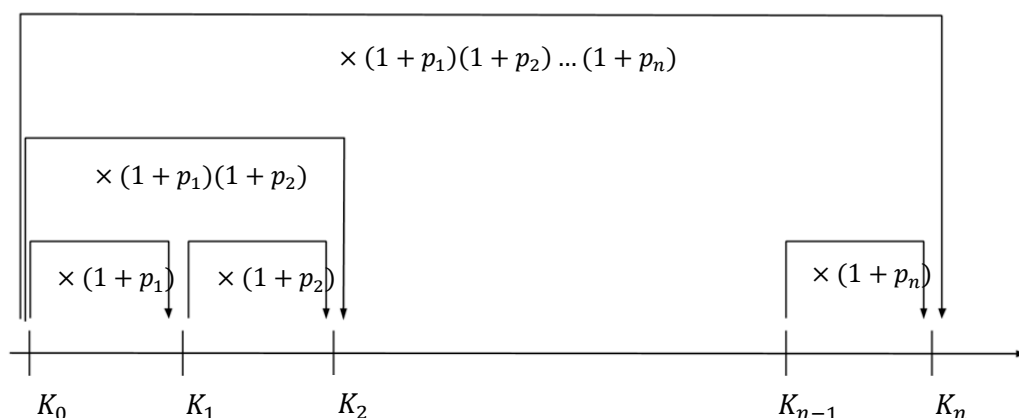
Честота на олихвяване	m	i (%)
Годишно	1	6.00000
Полугодишно	2	6.09000
Тримесечно	4	6.13636
Месечно	12	6.16778
Седмично	52	6.17998
Ежедневно	365	6.18313
Непрекъснато	∞	6.18365

С оглед на получените резултати стигаме до извода, че колкото по-голяма е честотата на олихвяване, толкова по-голям е ефективния годишен лихвен процент, съответно по-печеливша е инвестицията. Когато е налице непрекъснато олихвяване, изчислението на ефективния годишен лихвен процент се извършва с помощта на следното гранично равенство:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m = e^p. \quad (1)$$

Бъдеща стойност на еднократно капиталовложение

Нека представим нарастването на капитала с течение на времето графично:



Фиг. 2. Графично представяне на нарастването на капитала с течение на

В границите на година 1 капитал K_0 е сегашна, настояща стойност – капитал, който се влага в началото на годината и след една година трябва да се изплати с капитал K_1 .

В границите на година 2 настоящата стойност е капитал K_1 , който се влага в началото на тази година и след една година се изплаща с капитал K_2 . Или в границите на година 2 капитал K_2 е бъдеща стойност на капитал K_1 .

Теоретично, капиталът K_2 , платим в края на година 2, следва да е по-голям от капитала K_1 , платим в края на година 1, минимум с лихвата върху този капитал за година 2, а от капитал K_0 съответно минимум с лихвата, натрупана върху този капитал за двете години – за година 1 и година 2. Най-общо казано, теорията третира капитала, платим в края на година t след базисния момент 0, като нараснал

с натрупаната за t години лихва капитал, платим в началото на година 1, съответно като нараснал с лихвата за година t капитал, платим в началото на година t / края на година $t - 1$.

Следователно, теоретичният модел, формулата за количествената зависимост между бъдещата и настоящата стойност съдържа като ключов елемент натрупаната, капитализираната за съответния брой години лихва, третирана едновременно като цена на парите и цена на времето. Тази формула е:

$$K_n = K_0(1 + p_1)(1 + p_2) \dots (1 + p_n).$$

Ако нормата на лихвата за всички n години е еднаква – p , то формулата придобива вида:

$$K_n = K_0(1 + p)^n. \quad (2)$$

В случай, че доход се реализира на времеви интервали, по-кратки от една година, формулата за бъдещата стойност изглежда така:

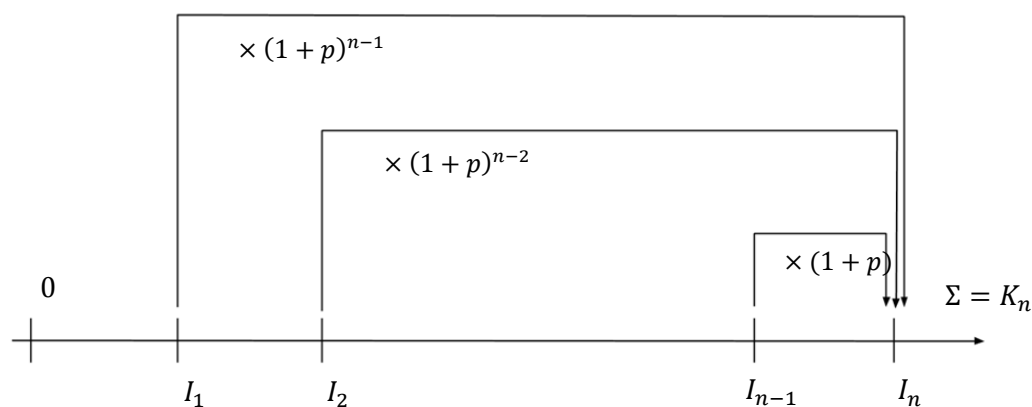
$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kn}, \quad (3)$$

където k е броят на капитализациите за една година. В случай на непрекъсната капитализация, формула (3) се преобразува с помощта на равенството (1).

Изведените формули са валидни и при стойности на n и k , които не са цели.

Бъдеща стойност на краен брой капиталовложения

На фигура 2 е изобразено времевото позициониране на краен брой капиталовложения, платими в края на n поредни години, считано от края на година 1, чиито бъдещи стойности следват да се пресметнат платими към края на година n .



Фиг. 3. Бъдеща стойност на краен брой капиталовложения

Капиталовложение I_1 , платимо в края на година 1 след базисния момент 0, отстои на $n - 1$ години от края на година n . Следователно, за да се намери бъдещата му стойност върху I_1 , следва да се натрупа по $p\%$ лихва за $n - 1$ години. Капиталовложение I_2 , платимо в края на година 2, отстои на $n - 2$ години от края на година n . Следователно, за да се намери бъдещата му стойност върху I_2 , то следва да се увеличи с $p\%$ лихва за $n - 2$ години. Аналогично, за да се намери бъдещата стойност на капиталовложение I_{n-1} , то следва да се увеличи с $p\%$ лихва за една година. За разлика от това, капиталовложение I_n не следва да бъде олихвявано, тъй като то е платимо в края на година n , към който момент трябва да се сметнат платимите бъдещи стойности на всичките капиталовложения, образуващи разглежданата времева редица от стойности. Платимата в края на година n бъдеща стойност на образуващите тази редица капиталовложения е сумата от техните бъдещи стойности. Формулата изглежда така:

$$K_n = I_1(1+p)^{n-1} + I_2(1+p)^{n-2} + \dots I_n(1+p)^0,$$

или

$$K_n = \sum_{t=1}^n I_t(1+p)^{n-t}. \quad (4)$$

ДИСКОНТИРАНЕ И СЕГАШНА СТОЙНОСТ

В практиката често възникват случаи, при които едно бъдещо плащане се изплаща предсрочно. В тези случаи трябва да се изплати лихвата, която за времето на предсрочното плащане е всъщност право на дебитора [2]. Поради това изчислената лихва се приспада от дължимата на падежа сума. Този отбив се нарича дисконт (сконто). Следователно под дисконт се разбира отстъпката, която се прави от номиналната стойност в момента на предсрочното плащане на едно задължение, платимо след определен период. Изплащането на дисконта е задължение на кредитора. Процесът на превръщането на едно по-късно платимо задължение в платимо на определен по-ранен момент (т. е. намиране на настоящата му стойност) се нарича дисконтиране (сконтиране).

Математически дисконт

При математическото дисконтиране, наричано още точно, се работи с *лихвени* проценти и се търси настоящата стойност на едно бъдещо плащане. *При математическия дисконт номиналната стойност на задължението се приема като включваща ефективната стойност и съответната лихва, която се изчислява на база ефективна стойност.*

От гореспомената формула за сложна лихва може да се изведе формулата за сложно математическо дисконтиране:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+p)^n}.$$

Изразът $1/(1+p)^n$ се нарича дисконтов фактор и показва настоящата стойност на единица задължение n периода преди падежа.

Банков дисконт

При банковото дисконтиране, наричано още търговско, практическо, се работи със *сконтови* проценти, които показват с колко намалява единица дълг с отдалечаването на момента на сконтирането с единица период преди падежа. *При банковия дисконт ефективната сума се получава като разлика между номиналната сума и дисконта, а база на изчислението е номиналната стойност.*

Сложното банково сконтиране се извършва по следната формула:

$$K_0 = K_n(1-d)^n,$$

където d е сконтовият лихвен процент, а $(1-d)^n$ се нарича сконтиращ множител.

Настояща стойност на еднократно очаквано плащане

Ако уравнение (2) бъде решено относно K_0 , се получава моделът на днешната, сегашната или настоящата стойност на еднократно очаквано плащане или неговата теоретична текуща цена, представен на фигура 4:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+p)^n}.$$



Фиг. 4. Графично изображение на осъвременяването на бъдещата стойност

При различни стойности на годишния лихвен процент p моделът на настоящата стойност придобива вида:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + p_1)(1 + p_2) \dots (1 + p_n)}.$$

Настояща стойност на краен брой очаквани плащания

При еднакви дисконтови норми за всички периоди моделът има вида:

$$K_0 = \frac{P_1}{1 + p} + \frac{P_2}{(1 + p)^2} + \dots + \frac{P_n}{(1 + p)^n},$$

а при различни дисконтови норми за отделните времеви периоди:

$$K_0 = \frac{P_1}{1 + p_1} + \frac{P_2}{(1 + p_1)(1 + p_2)} + \dots + \frac{P_n}{(1 + p_1)(1 + p_2) \dots (1 + p_n)}.$$

ОБОБЩЕНИЕ

Стойността на парите, платими в различно време, се определя едновременно от няколко фактора [3]:

1. Времето и им позициониране. Теоретично, даден капитал, който се влага, т. е. е платим в настоящето, трябва да се изплати след време (в бъдещето) с по-голям капитал.

2. Броят на годините. При равни други условия, колкото е по-голямо числото на годините между моментите, в които капиталите са платими, толкова по-голяма теоретично би следвала да е количествената разлика между тях.

3. Годишният лихвен процент. При равни други условия, колкото по-голяма е годишната лихва, толкова по-голяма би следвала да е количествената разлика между платимите в различно време капитали. Теорията третира лихвата като възнаграждение, което инвеститорът следва да получи заради раздялата с ликвидността, отлагането на текущото потребление и поемането на риска от финансови загуби.

4. Покупателната сила на парите. При инфлация парите, платими в бъдещето, са с по-малка покупателна способност или имат по-малка стойност от инвестираните пари. Ето защо инфлацията е допълнителен фактор, обуславящ изискванията на инвеститорите за по-големи номинални бъдещи стойности на инвестициите.

От гледна точка на инвеститорите стойността на даден финансов инструмент произтича от печалбата, която те получават от него. Така стойността му може да се разгледа като сегашна стойност на очакваните по него бъдещи плащания. Такова разбиране дава основание на всеки инвеститор да сравнява текущата пазарна цена на даден финансов инструмент със сегашната стойност на очакваните бъдещи

плащания, които той ще получи. По този начин инвеститорите се ориентират дали текущата цена подценява или надценява стойността на дадения инструмент и могат да вземат съответното инвестиционно решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боди, З., А. Кейн, А. Маркърс, Инвестиции, „Натурела“, 2000.
2. Йовкова, Й., Б. Петков, Финансова математика, УИ „Стопанство“, С., 1993.
3. Николова, Н., Основи на финансите, „Сиела“, София, 2009.

За контакти:

Слави Георгиев Георгиев, специалност Финансова математика, II курс, факултет „Природни науки и образование“, Русенски университет, e-mail: aslv@abv.bg.

научен ръководител: Проф. д-р Велизар Тодоров Павлов, катедра Приложна математика и статистика, Русенски университет, тел. 082 / 888 466, e-mail: vpavlov@uni-ruse.bg.

GFastPay

Author: Georgi Chavdarov

Scientific Supervisors: Assoc. Prof., PhD Katalina Grigorova

Abstract: Millions of people use their computers, mobile phones and tablets as a tool for shopping online. Hundreds of thousands of people use debit or credit cards as payment tool in various outlets. Now it's time for something new, something different, something attractive and something quickly - one-click way to pay. GFastPay is an alternative which completely replaced the need for a bank card.

1. INTRODUCTION

Before entering the technology in our everyday life, the only way to pay for a given amount has been - manually, i.e. banknotes and coins. For the purpose of convenience of the customer, cards are created with the help of which were possible purchases of fuel and goods on the stations [1]. Later, they are followed by the department stores.

With the bank cards payment became faster. It is not necessary person to search coins and bills to make payments, but he or she must have own card. And what happens if the customer has forgotten it? What employee should do, if Point of sale (POS) terminal device doesn't work, in the shop? If the card is present and POS terminal works, but there is a failure on the chip card, how the customer can pay the product with the money that he HAS, but cannot use as intended?

With GFastPay life becomes easier. The employee enter the information about purchased items and it's enough the customer to take in his or her hands own smartphone or tablet, load the QR Code reader and with one click is able to make the payment.

Actually, GFastPay is simple software that allows introducing one or more products and their price values. This makes it possible to generate a link to 'Pay Now' functionality of PayPal, by converting it into QR Code, and ready for scan from the client. Depending of requirement mode of the payment, every product may be static (in restaurants, bars) or dynamic (gas stations, private parking).

The application is written using Java and is intended for all of the most used operating systems like Windows, Mac and Linux. For storing products, page & printer settings and the private credential information are used binary files. The API used for QR Code images generation is QrGen which is based on ZXING – one of the most popular barcode-reader libraries.

2. PAY EASY AND FAST

2.1. Main functionality

Digital shopping has never been so easy before. Adding products, paying and verifying after that has never been done with such ease and speed.

The presented GFastPay application allows operation of many products with a sense of paying with real credit card and ease of online buying.

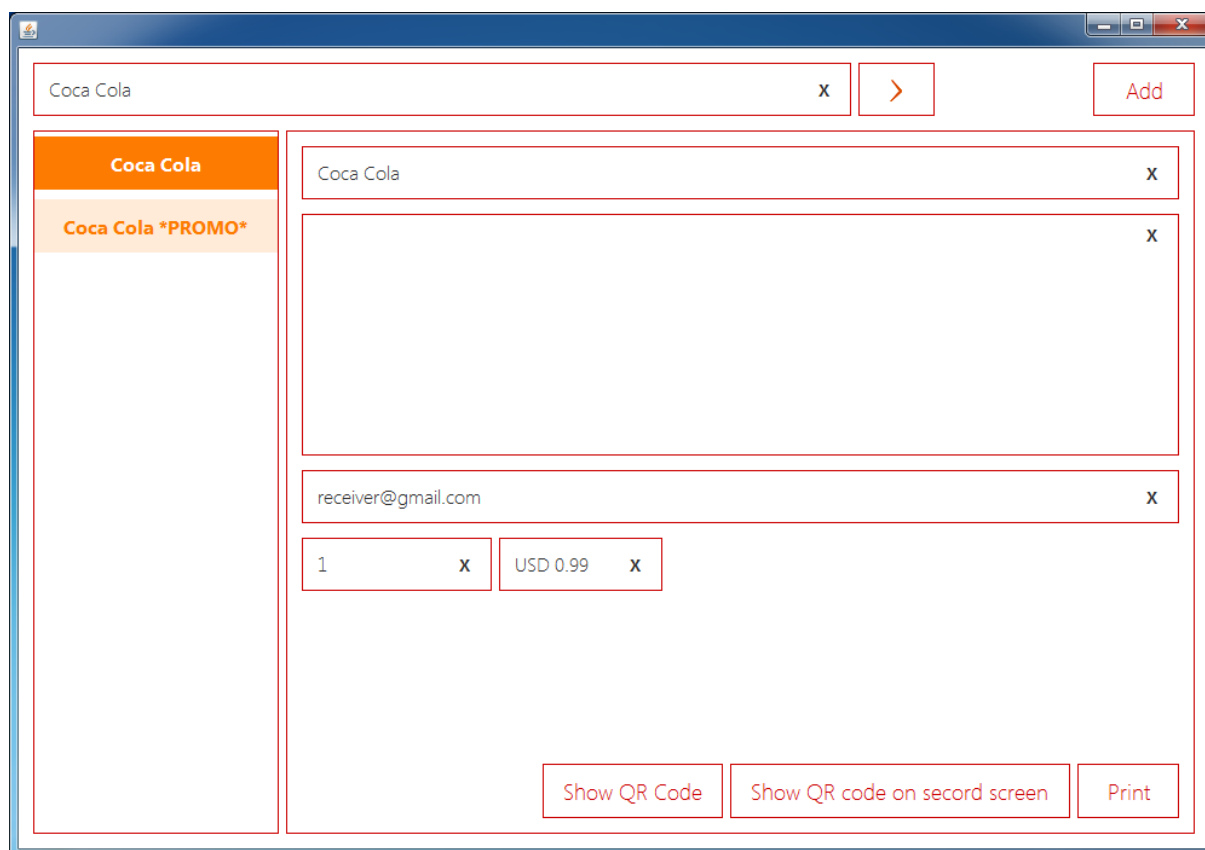


Fig. 1. Main window

2.1.1. Loading application

When the application loads, the main window is shown, an empty order is selected and 'New product' action is executed. If the user wants to select existing product, it can be selected from 'Recent products' list. If the user wants to add new products, it can be done with 'Add' button located on the top right corner (Fig. 1).

2.1.2. Manipulating products

Excluding the option to add products data, each one can be edited or deleted instantaneous with double-click over desired item. For each product, the employee have the opportunity to define different fields like title, body, product quantity, price per one item and the receiver email registered on PayPal web site. If the user uses more than one email, an autocomplete function can be used for fast switching between them.

As we said there are two product types - static and dynamic. Static items are able to be created once and then to be saved for repeatedly using. Dynamic items also can be used repeatedly, but the only variable unit is the one that the user has defined. Examples of variable units:

- Current date - option to generate the day, month and year of shopping
- Current time - an option that generates hour, minute and second of shopping
- Date (plus / minus) (some) (days / months / years) - a feature that can be used to pay for rent, monthly contracts and others.
- Hour (plus / minus) (some) (seconds / minutes / hours) - a feature that can be used for prepaid parking, subscribing for any service, reserving a table in restaurant or bar for a certain period of time and etc.

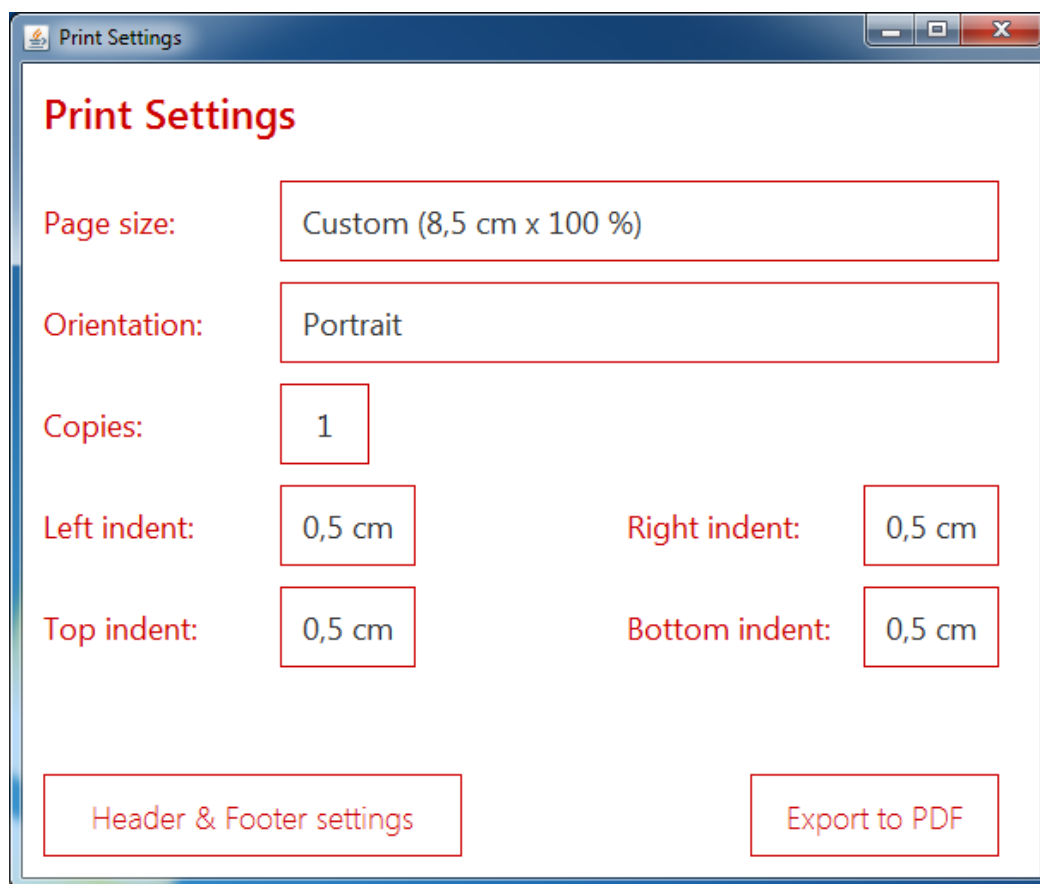


Fig. 2. Print Settings

2.1.3. Processing products

Once the employee has chosen an existing product or added a new one, he or she immediately has the ability to prepare a buy link as QR Code for product purchasing, by pressing the 'Show QR Code' button. Customer loads its QR Code Reader Application and go to load generated PayPal 'Pay now' link. User confirms the payment into PayPal system by entering his personal information.

If at the site is not provided work of employees (private parking, self-check bus / metro / train tickets), the manager can use the 'Print QR Code'. A typical example would be a request such as: **'One Hour subscription from %tn% -% tn + 1h%'**, which will generate a new PayPal link titled **'Hour subscription from 12:00 to 13:00'**.

2.1.4. Printing product details

When the user choose to print a cash receipt, a new print settings dialog is shown. It allows to export generated content to PDF format, the light of greater functionality of Adobe Reader for printing in different paper size and various printer devices (Fig. 2).

Fig. 3. Header & Footer Settings

The options for printing are:

- Determining the size of paper in international ISO standard (A2, A3, A4, A5, etc.) [3]
- Determining the size of paper set precise dimensions (cm, mm, px / dpi, etc.);
- User defined color print - print QR Codes with different color combinations to fit on brochures, magazines (such as donation campaigns);
- Setup page margins;
- Definition the number of copies (eg. when two copies are needed - one for the client and one for the employee, the lessor or the owner).

2.1.5. Header & Footer Templates

'Header & Footer' dialog makes it possible to position the static or dynamic text to be used on every future generated printout. In this case the company name, title, current date and time and other additional information can be reused every time.

2.1.6. Review of existing solutions

There is a wide range of methods allows the generation of QR codes [2]. One of them is Scansfer. It allows dynamically QR Code generation, but it has no options for saving and reusing entered information, again. QuaR.me is another simple project with same functionality, but there are not provided options for cash receipt printing, it needs the employee to load the browser always. Zapper is another project but it also needs web platform and login which takes more time.

2.1.7. System requirements

For a good and complete operation the application needs in addition a good internet connection and the large display. The minimum resolution for the proper visualization of all the menus and dialogs is 1280x600 pixels.

Although these minimum requirements, the user may need to install additional printer driver(s).

3. CONCLUSION

The designed application proposes convenient and easy to use features. But as expected the application can not be perfect and therefore the author plans expanding the capabilities in the following areas:

- Option for adding logos and pictures;
- Ability to customize the font for printing;
- Login option for more security;
- Keyboard mapping for fast working;
- Direct print support;
- Integration with Windows 8/10 Metro UI;
- Sound equalizer;
- QR Code picture correction tools.

REFERENCES

- [1] Wikipedia. *Payment card*. 2008, http://en.wikipedia.org/wiki/Payment_card
[2] Mobile Payments Today, 2013,
<http://www.mobilepaymentstoday.com/articles/this-rise-of-hce-based-mobile-payments/>
[3] Wikipedia. *Paper size*. 2009, http://en.wikipedia.org/wiki/Paper_size

About the author:

GEORGI CHAVDAROV, University of Ruse, course Computer Sciences,
address: Studentska St. 8, 7017, Ruse, Bulgaria, E-mail: powerbsd@abv.bg

Проект информационной системы отдела планирования учебного процесса Поволжского государственного университета сервиса

Авторы: Асташов Роман, Шумкина Любовь, Васильева Юлия, Корнишин Евгений
Научный руководитель: доц. к.т.н. Елена Малышева

Abstract: *This paper describes the development of an information system to work with the curriculum. As a development environment using MS Visual Studio, data is stored in the database MS SQL Server.*

Key words: *Information system, curricula, Visual Studio.net, MS SQL Server*

Для реализации целей и задач в подготовки специалистов требуется последовательно приобретать знания, умения и навыки в рамках дисциплин учебного плана. Основой для этого служит учебный план подготовки с распределением дисциплин по семестрам и годам обучения.

В Поволжском государственном университете сервиса была разработана программа для отдела планирования учебного процесса, но возникли проблемы с её использованием связанные с новыми образовательными стандартами и рядом объективных причин. В настоящее время работа с учебными планами ведется, в основном, в виде Excel документов, что приводит к значительной трудоемкости процессов и большой вероятности возникновения ошибок.

Целью работы была разработка проекта информационной системы для формирования и редактирования учебных планов. В ходе проектирования решались следующие задачи: изучить процесс работы с учебными планами, разработать базу данных ИС, разработать схему меню ИС, внешний вид форм, разработать прототип системы, рассчитать экономические показатели проекта, разработать предложения по совершенствованию информационной системы.

Для разработки информационной системы использовалась технология Microsoft .NET, в том числе ADO.NET и компонентно – ориентированный подход [1,3,4].

Компонентно-ориентированный подход к программированию является наиболее существенным нововведением идеологии Microsoft .NET. Компонентно-ориентированный подход к проектированию и реализации программных систем и комплексов можно рассматривать как развитие объектно-ориентированного и он практически более пригоден для разработки крупных и распределенных систем. Для отображения бизнес - процессов, структуры классов и их взаимодействии использовался универсальный язык моделирования UML [2].

UML-модели помогают понимать, обсуждать и разрабатывать системы программного обеспечения. Одним из средств графического отображения классов является также возможность экспорта данных из Visual Studio в пакет Visio с последующей работой с UML-диаграммами.

Данная информационная система разрабатывается для отдела планирования учебного процесса который входит в учебное управление ПВГУС. Учебное управление разделяется на два отдела (рисунок 1): Отдел планирования учебного процесса и отдел организации учебного процесса (расписание) В отдел планирования входят начальник отдела планирования, начальник отдела планирования учебного процесса, специалист, статистик, 2 специалиста по работе с документами.

Структура учебного управления



Рис. 1. Организационная структура учебного управления

Основной документ отдела планирования - учебный план. Он включает в себя список изучаемых дисциплин, сгруппированных по циклам, формы контроля (экзамены, зачеты, курсовые работы) и виды занятий по семестрам (лекции, практики, лабораторные работы)

Была построена схема информационных потоков учебного управления. Учебный план создается на основе государственных стандартов (ФГОС), согласовывается с кафедрами, утверждается руководством университета и используется для формирования нагрузки преподавателей, расписания и других документов. Он включает в себя список изучаемых дисциплин, сгруппированных по циклам, формы контроля (экзамены, зачеты, курсовые работы) и виды занятий по семестрам (лекции, практики, лабораторные работы)

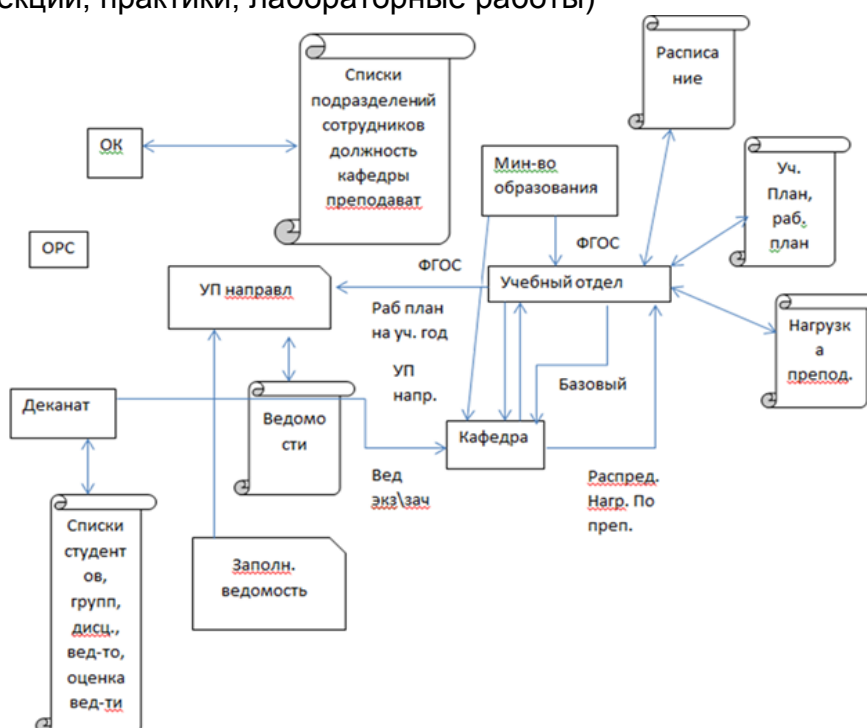


Рис. 2. Схема информационных потоков учебного управления

На рисунке 3 представлен фрагмент схемы базы данных, созданной в MS SQL Server. Здесь показаны 9 основных таблиц: дисциплины, дисциплины учебного плана, вид занятий, вид занятий дисциплин учебного плана, учебный план, направления, кафедра, форма контроля, форма контроля дисциплин учебного плана.

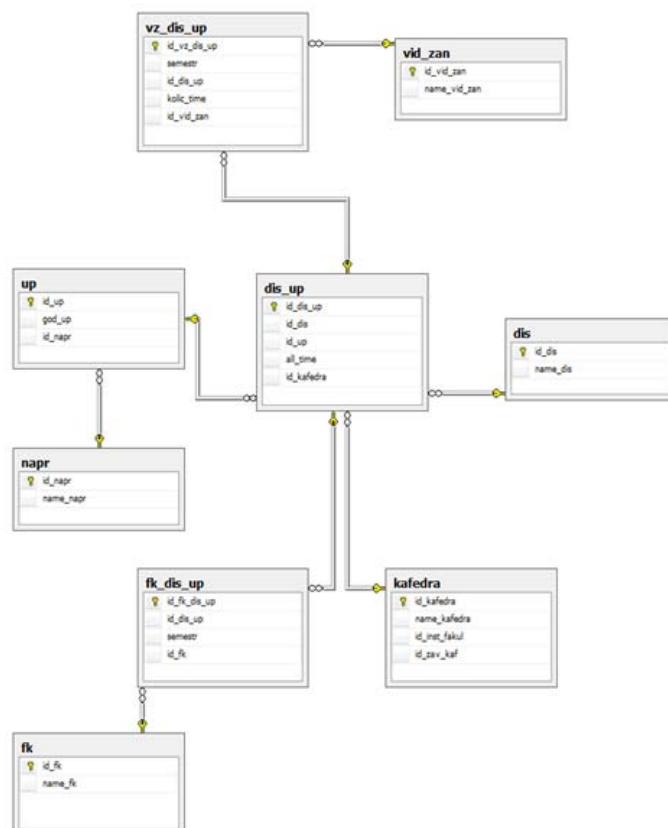


Рис. 3. Фрагмент схемы базы данных

Для разработки приложения использовалась среда Visual Studio. Меню программы (рисунок 4) включает в себя следующие разделы: Работа со справочниками, планами, помощь и выход из программы.

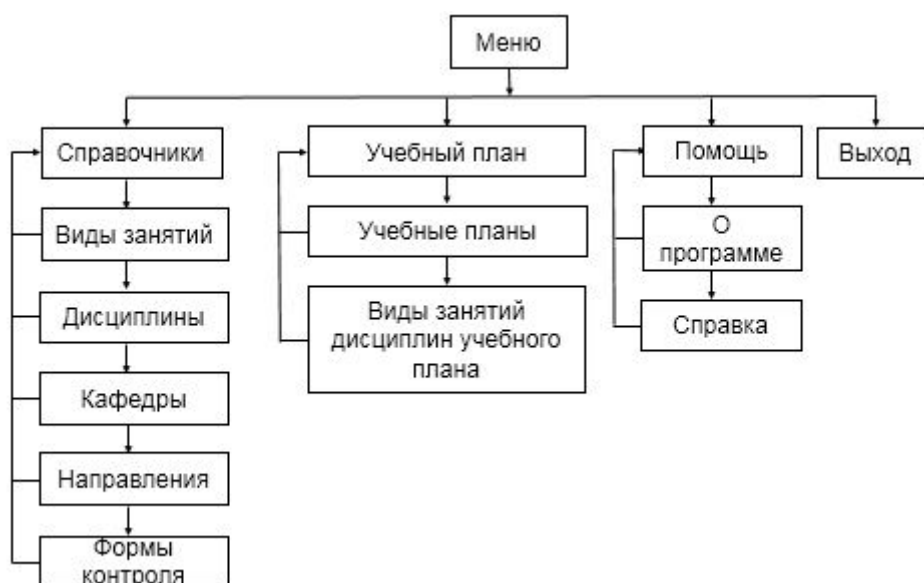


Рис. 4. Меню программы

Связь с базой данных осуществлялась с помощью технологии ADO.NET. Для доступа к базе данных использовались компоненты DataSet, TableAdapter, BindingSource. Для заполнения таблиц набора данных и изменения данных в базе данных MS SQL Server необходимо было настроить свойства адаптеров, в том числе параметрические SQL-запросы.

Для отображения данных - компоненты TextBox, Panel, Button, Label, GridView, ComboBox. На рисунке 5 представлена диаграмма классов для главной формы и формы отображения дисциплин.

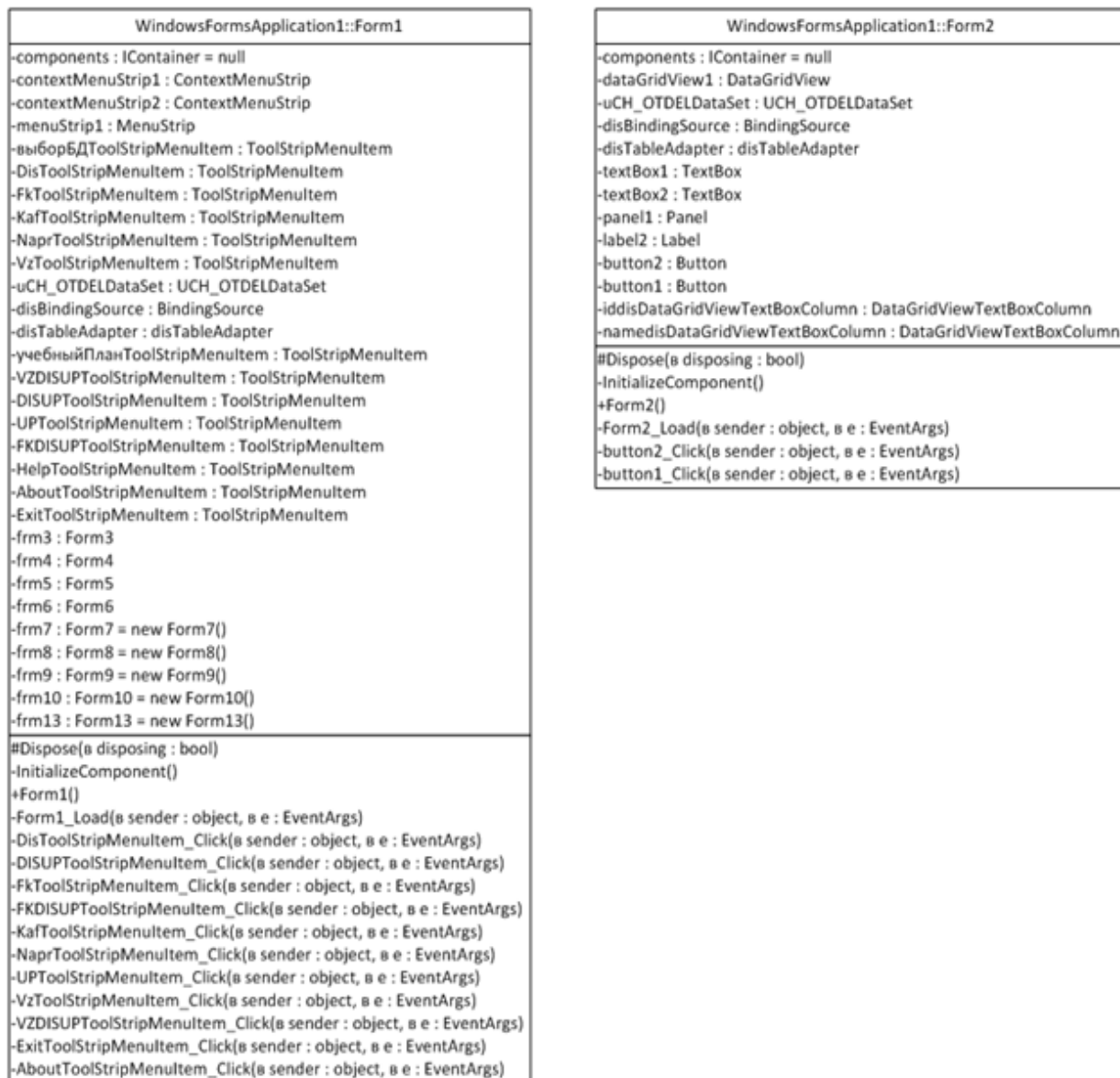


Рис. 5. Диаграмма классов для главной формы и формы отображения дисциплин.

На рисунке 6 представлена основная форма приложения - Дисциплины учебного плана. Для выбранного учебного плана можно увидеть список дисциплин, название кафедры, отвечающей за данную дисциплину, виды занятий по семестрам с указанием часов и формы контроля по семестрам. При нажатии на кнопку Excel документ формируется и открывается выбранный учебный план.

Дисциплины учебного плана

Прикладная информатика 2012

Показать Дисциплины УП Добавить Дисциплины УП

	Общее Количество Часов	Дисциплины	Кафедры
	150	Иностранный язык	Кафедра «Русский и иностранные языки»
	120	История	Кафедра «Отечественная история и правоведение»
	115	Математика	Кафедра «Высшая математика»
▶	102	Русский язык	Кафедра «Русский и иностранные языки»
	160	Литература	Кафедра «Философия и культурология»
*			

	Семестр	Количество часов	Вид занятия
▶	1	34	Практические занятия
	2	44	Практические занятия
*			

	Семестр	Формы контроля
▶	1	Зачёт
	2	Экзамен
	1	Контрольная работа
	2	Контрольная работа
*		

Добавить виды занятий Excel документ Добавить формы контроля

Рис. 6. Дисциплины учебного плана

Были рассчитаны экономические показатели проекта. Стоимость разработки приложения около 60 тыс. рублей, экономическая эффективность – 18 тыс. рублей в год, срок окупаемости проекта – 3,3 года

Дальнейшее развитие информационной системы предполагает разработку и реализацию библиотеки пользовательских классов и интерфейсов предметной области. Для этого были разработаны UML диаграммы, некоторые из которых приводятся ниже.

На рисунке 7 представлена диаграмма прецедентов области составления учебных планов для направления или специальности ПВГУС, которая включает в себя составление базового учебного плана, его согласование, изменение и утверждение.

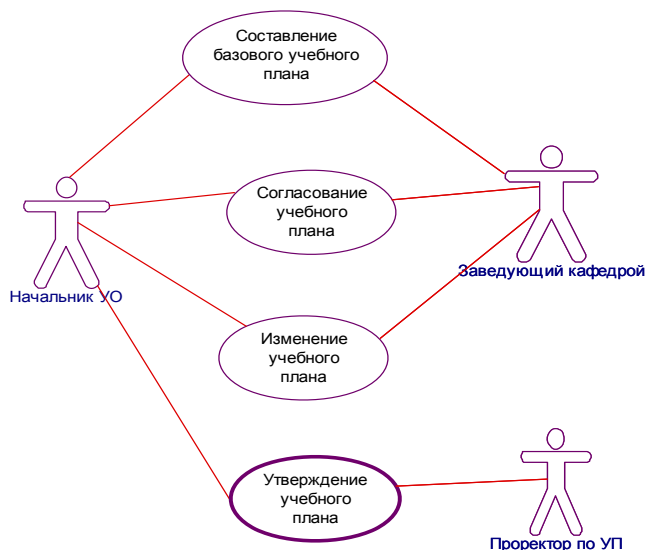


Рис. 7. Диаграмма прецедентов «Составления учебных планов»

На рисунке 8 отображена диаграмма активностей прецедента создания базового учебного плана и ее блока «Выбор типа и вида учебного плана».

Она состоит из четырех блоков действий (выбор типа и вида учебного плана, выбор дисциплин, расчет и проверка часов) и блока ветвления. Все четыре блока являются составными. Если в результате проверки обнаружены несоответствия, то проводится корректировка учебного плана.

Диаграмма блока «Выбор типа и вида учебного плана» включает в себя шесть блоков активностей, два узла ветвления и два узла объединения потоков. Блоками активности являются: Выбор типа учебного плана, Выбор специальности, Выбор направления и вида плана, Выбор профиля СПО, Выбор профиля бакалавриата и Выбор профиля магистратуры.

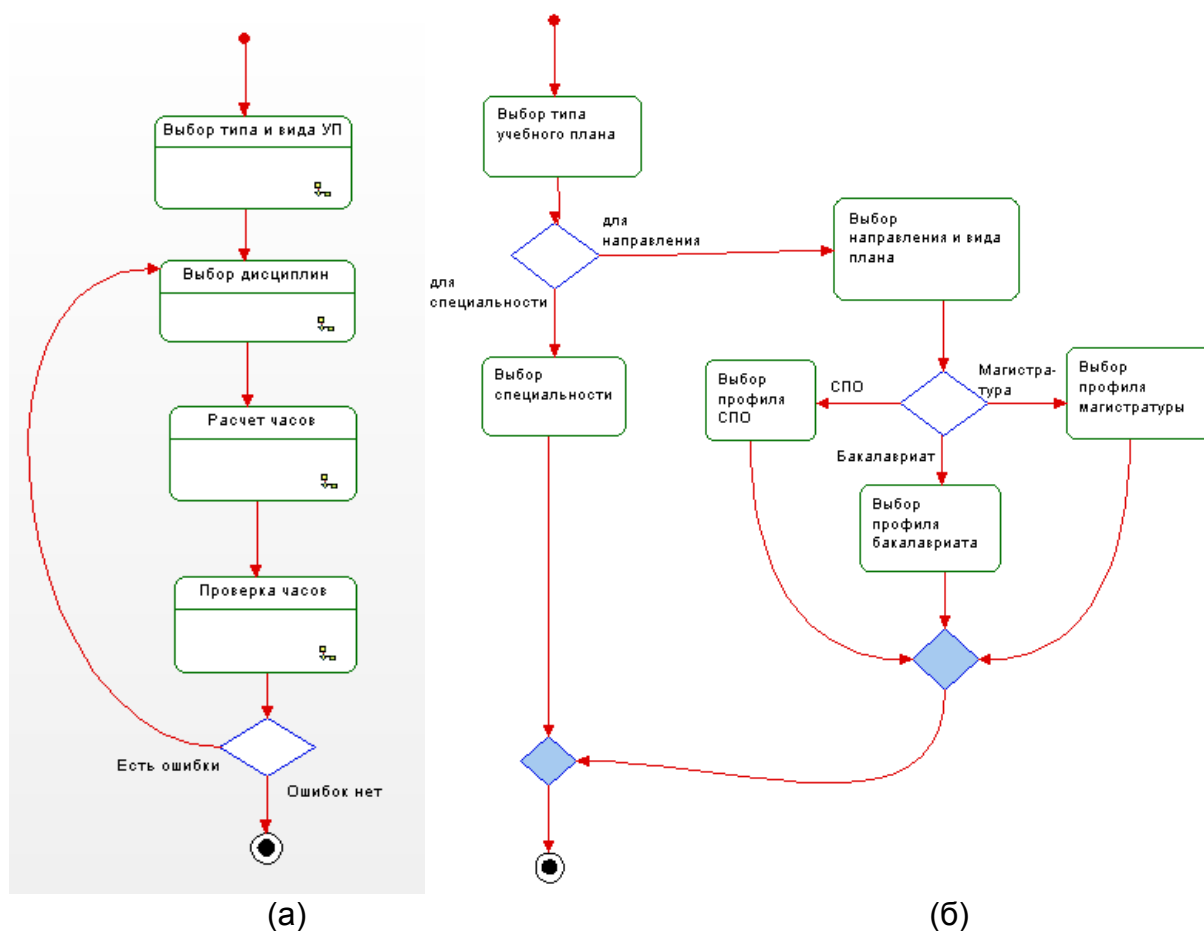
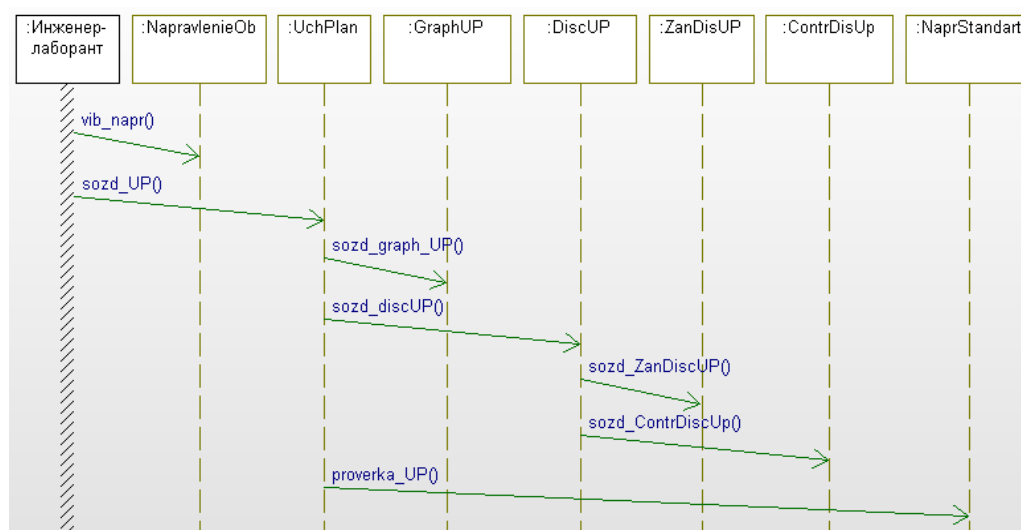


Рис. 8. Диаграмма активности прецедента «Создание базового учебного плана»(а) и ее блока «Выбор типа и вида учебного плана» (б).

Далее рассмотрим диаграмму последовательности для прецедента «Составление базового учебного плана», которая представлена на рисунке 9.

Инженер лаборант выбирает направление обучения (сообщение vib_napr()), для которого составляется базовый учебный план (сообщение sozd_UP()). Далее создается график учебного плана (сообщение sozd_graph_UP()) и его дисциплины (сообщение sozd_discUP()). Для каждой дисциплины заполняются данные полей, соответствующие часам по каждому виду занятия (сообщение sozd_ZanDiscUP()) и по каждой форме контроля (сообщение sozd_ContrDiscUp()). Последнее сообщение proverka_UP() позволяет проверить соответствие базового учебного плана федеральному государственному стандарту направления обучения.



**Рис. 9. Диаграмма последовательности для прецедента
«Составление базового учебного плана»**

Очевидно, что эта диаграмма является упрощенной, так как в ней не отражены интерфейсные объекты, не показаны объекты, соответствующие предварительным данным по дисциплинам и их элементам.

Можно сделать вывод, что возможности среды Visual Studio.NET и СУБД MS SQL Server позволяют эффективно создавать системы подобного уровня.

ЛИТЕРАТУРА

1. VB.NET: Объектно-ориентированное программирование, формы Windows, безопасность [Текст] / Р. Блэр, Ф. Барвелл, Р. Кейс [и др.] : [пер. В. Пучков ; науч. ред. О. Труфанов]. - М. : Лори, 2008. - 766 с.
2. Буч Г., Рамбо Д., Якобсон И. Язык UML. Руководство пользователя. 2-е изд.: Пер. с англ. Мухин Н. –М.: ДМК Пресс, 2006. – 496 с.
3. Гросс Кристиан Самоучитель С# 2008 [Текст] / Кристиан Гросс - СПб.: БХВ-Петербург, 2009 – 576 с.
4. Нейгел Кристиан С# 4.0 и платформа .NET 4 для профессионалов [Текст] / Кристиан Нейгел, Билл Ивсен, Джей Глинн.— М.: Диалектика 2011 - 1440с.

Об авторах:

доц. к.т.н Елена Малышева, кафедра «Прикладная информатика в экономике»
Поволжский государственный университет сервиса: +7-(8482)-22-91-08, E-mail: em_tgas@mail.ru

Асташов Роман, бакалавр, Бизнес-Информатика, 1 курс, Поволжский государственный университет сервиса, E-mail: 89093644733G@gmail.com

Шумкина Любовь, спец. Прикладная информатика, 3 курс, Поволжский государственный университет сервиса, E-mail: lyubavkaly@gmail.com

Васильева Юлия, спец. Прикладная информатика, 3 курс, Поволжский государственный университет сервиса, E-mail: Vas.yulia14@yandex.ru

Корнишин Евгений, спец. Прикладная информатика, 3 курс, Поволжский государственный университет сервиса, E-mail: micrid1995@gmail.com

Проект автоматизации мониторинга деятельности студентов

Author: Chaburkina Iuliia

Scientific Supervisor: Assoc. Prof. Olga Filippova, Ph.D.

Abstract: *The summary The rating of the best students of PVGUS is done for the purpose of identifying and encouraging excellent students who show a high standard of knowledge during their studies. The best students actively participate in the scientific, public, sports, cultural and leisure events organized by their University.*

Keywords: *project of automation, rating of students, monitoring of student's activity, information streams, functional model of process.*

ВВЕДЕНИЕ

Одной из самых действенных методик, используемых при определении поощрений, является построение рейтинга. Именно такую систему предлагается использовать для поощрения студентов вузов, что положительно повлияет на их успеваемость и общественную активность. В настоящее время многие образовательные организации уже имеют подсистемы автоматизации решения отдельных задач, при этом информационные ресурсы подсистем ориентированы на определенное подразделение или приложение и физически дублируются в каждой из подсистем. Такое построение автоматизированной информационной системы приводит к многократному дублированию общей информации в подсистемах. В связи с выше сказанным предлагается разработать программное приложение по проведению мониторинга деятельности студентов и построению их рейтингов, объединяющее в себе уже существующие в вузе базы данных. Предполагается, что основная информация для данной системы будет вноситься различными подразделениями вуза, участвующими в данном процессе, для которых система будет доработана, или запрашиваться из баз данных, уже существующих в ВУЗе, что значительно ускорит исполнение данного процесса и обеспечит всех его участников актуальной информацией.

1. Анализ предметной области

Реализацию поставленной задачи рассмотрим на примере Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Поволжский государственный университет сервиса». Целью данного проекта является автоматизация возможности выявления и поощрения всесторонне развитых студентов, показавших за время обучения высокий уровень знаний, активно участвующих в научной, общественной, спортивной и культурно-досуговой деятельности вуза, а также с целью повышения конкурентоспособности выпускников. В рейтинге могут участвовать все студенты вуза, обучающиеся по программам высшего и среднего профессионального образования по очной форме обучения на бюджетной и внебюджетной основе и имеющие средний балл успеваемости в течение 2 следующих друг за другом семестров, предшествующих определению рейтинга, не ниже 4,5 баллов.

Рассмотрим функциональную модель процесса деятельности студентов. Основной процесс «Проведения мониторинга деятельности студентов ФГБОУ ВПО «ПВГУС» состоит из следующих подпроцессов: учет культурно-досуговой деятельности, учет академической успеваемости студентов, учет научной деятельности студентов, учет общественной деятельности студентов, учет спортивно-туристической деятельности студентов, формирование рейтинга ФГБОУ ВПО «ПВГУС», формирование отчетной документации (см. рис. 1). Входными данными в этом случае являются: рейтинг-лист лучших студентов ПВГУС, отчет по

рейтингу, рейтинг-лист групп, рейтинг-лист старост, отчет для внешних организаций, рейтинг-листы факультетов, приказ о поощрении студентов.

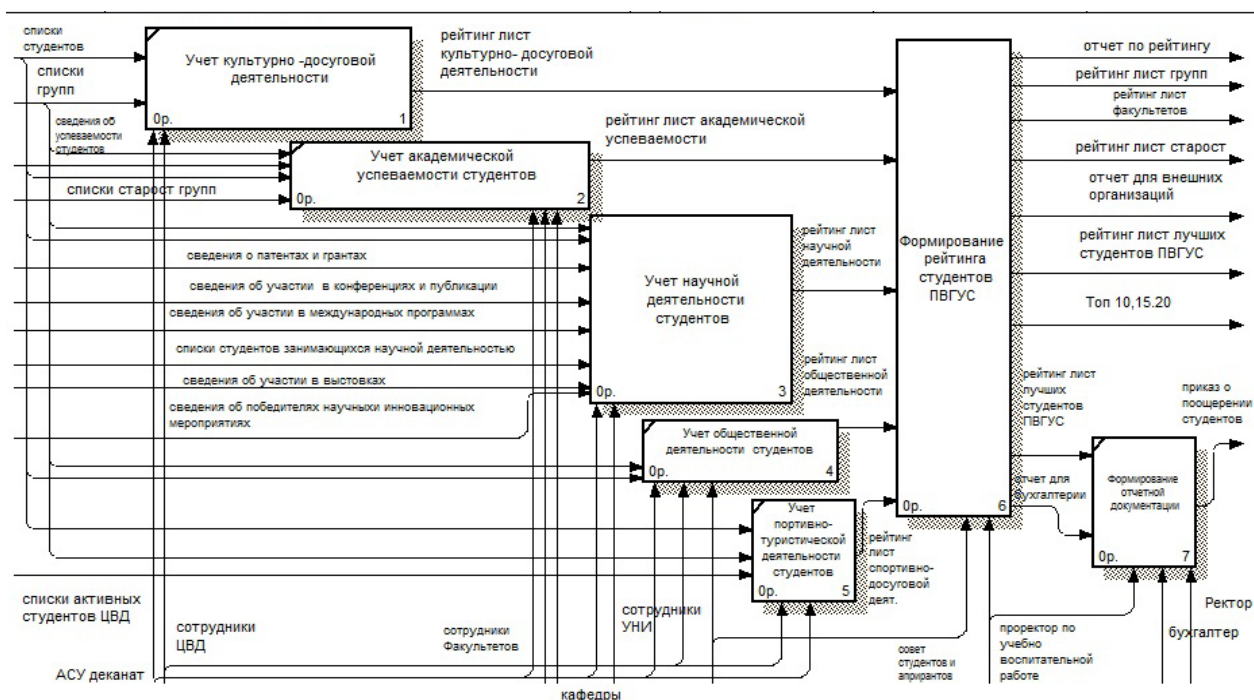


Рисунок 1. Функциональная модель процесса мониторинга деятельности студентов ФГБОУ ВПО «ПВГУС»

Анализ данного процесса показал, что существует высокая загруженность нескольких подразделений университета, участвующих в проведении мониторинга деятельности студентов, что значительно замедляет получение результата. В связи с вышесказанным было принято решение автоматизировать процесс проведения мониторинга деятельности студентов, разработав сетевое программное приложение с разграничением системы доступа к данным.

2. Разработка проекта программного приложения

В процессе проектирования данного программного продукта была разработана база данных, которая состоит из 33 таблиц и включает в себя всю необходимую информацию о деятельности студентов. Для повышения качества работы подразделений в базе представлено большое количество справочников. На рисунке 2 показанная схема меню предлагаемой информационной системы.

В меню программы реализованы такие функции как: администрирование программного средства, ведение справочников, учет успеваемости и деятельности студентов, формирование документов и отчетов, справка о программе.

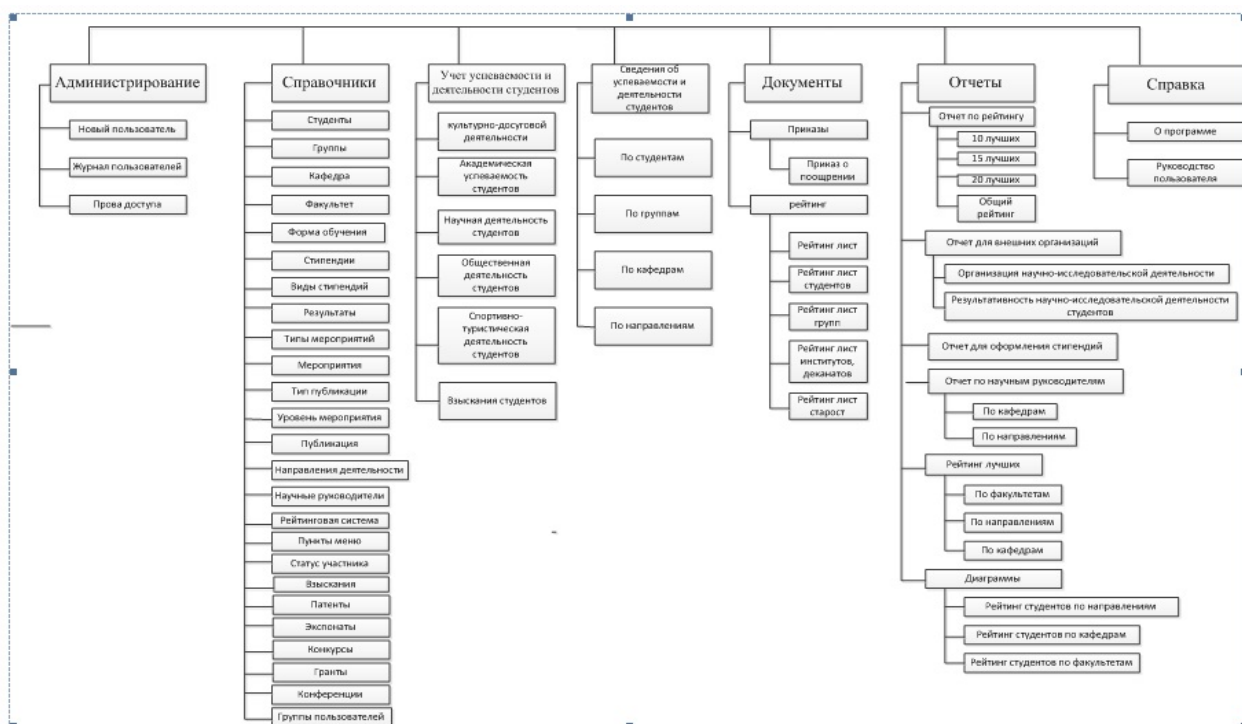


Рисунок 2. Схема меню программного приложения

Администрирование позволяет распределять доступ и соответствующие задачи между группами пользователей. Ведение справочников предоставляет возможность постоянно поддерживать рейтинговую систему в актуальном состоянии, а также исключает большое количество возможных ошибок при заполнении данных через пункты меню учёта деятельности студентов и при формировании необходимых отчётов с помощью соответствующих пунктов меню.

Основные функции программного приложения отражены с помощью его интерфейса. Рассмотрим рисунок 3, на котором представлена одна из основных форм программного приложения.

Данная форма интерфейса специально разработана для Управления научными исследованиями, которое принимает непосредственное участие в формировании рейтинга студента. На рисунке 3 представлена вкладка научные публикации, в этой вкладке специалист управления добавляет публикации для каждого отдельного студента и оценивает их критерии. Для удобного поиска и ввода информации с помощью запросов реализована сначала выборка кафедр из указанного института или факультета, а затем выборка студента из указанной группы конкретной кафедры. Следует отметить, что внести в базу данных эту информацию может только работник Управления научными исследованиями, остальным участникам данного процесса эта информация будет доступна только для просмотра и формирования необходимых документов.

Аналогично вносятся данные по другим видам деятельности студентов другими подразделениями университета, участвующими в данном процессе. При этом все они имеют различные права доступа – каждое отвечает за конкретные части формирования общего рейтинга студента.

**Рисунок 3. Форма для ввода данных о научной деятельности студентов
Управлением научных исследований**

На основании имеющихся данных о студентах формируются не только рейтинговые листы различной направленности, но и необходимая отчетная документация, необходимая для оформления заявок на различные виды поощрений.

Некоторым участникам процесса информация доступна только для просмотра. Например, студенты могут войти в систему под собственным паролем и увидеть всю личную информацию о состоянии своего рейтинга и историю его формирования (см. рис. 4).

Курс	учебный год	семестр	средний балл
1	2011/2012	1	5
1	2011/2012	2	4,86
2	2012/2013	1	4,4
2	2012/2013	2	5
3	2013/2014	1	4,5
3	2013/2014	2	4
4	2014/2015	1	5
4	2014/2015	2	5

Рисунок 4. Форма для просмотра информации о личном рейтинге для студента

Студент может просматривать личную информацию по всем видам деятельности, что позволяет контролировать и улучшать свою успеваемость.

Также, формы для просмотра информации различными участниками процесса будут доступны и на сайте университета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены проблемы, связанные с автоматизацией мониторинга рейтинга студентов «Поволжского государственного университета сервиса» и способы их решения. В процессе работы были изучены деятельность образовательного учреждения «Поволжский государственный университет сервиса» и его организационная структура, основные цели и задачи, поставленные перед подразделениями университета при формировании рейтинга по результатам деятельности студентов.

В ходе выполнения работы был создан проект программного приложения, дающего возможность вести учет деятельности студентов и формировать различную документацию, связанную с этим процессом. Программа интуитивно проста и понятна для любого пользователя. При этом она выполняет все функции, необходимые для качественной и своевременной работы всех участников процесса. Также, в ходе работы, была рассчитана общая стоимость разрабатываемого программного приложения и проведена оценка его эффективности, что подтвердило актуальность и необходимость данной разработки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Базы данных. Проектирование и разработка / Рэймонд Фрост, Джон Дей, Крейг Ван Слайк, - М. : НТ Пресс, 2007 г., 592 с.

[2] Базы данных: основы, проектирование, использование: учеб. пособие для вузов по направл. "Информатика и вычисл. техника" / М. П. Малыхина. - 2-е изд., [перераб. и доп.]. - СПб. : БХВ-Петербург, 2007. - 517 с.

[3] Филиппова, О.А. Применение методов экономико-математического моделирования для оценки качества услуг предприятий / О.А. Филиппова, Л.С. Завьялова - Наука - промышленности и сервису. 2011. № 6-1. С. 277-285.

About the Author:

Chaburkina Iuliia, course Applied Informatics, Department of Applied Informatics in Economics, Volga Region State University of Service – Togliatti, Russia, Email: Chaburkina@inbox.ru

Scientific Supervisor: Assoc. Prof. Olga Filippova, Ph.D., Department of Applied Informatics in Economics, Volga Region State University of Service – Togliatti, Russia

Решаване на уравнения чрез системата за компютърна математика MATLAB/ MuPAD

Автор: Лидия Петрова

Научни ръководители: гл. ас. д-р Анна Лечева и ас. Стефка Караколева

Abstract: *Solving equations by computer mathematics system MATLAB/MuPAD. This article presents an interesting and challenging approach to teaching mathematics in school. It is about the advantages of using Computer Algebra System (CAS) for solving equations. Some different unusual and interesting examples are considered.*

Key words: *equations, MATLAB, MuPAD, Computer Algebra Systems (CAS), teaching Mathematics, education.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Традиционното решаване на задачи в часовете по математика все по-трудно предизвиква интереса на съвременните ученици. Използването на системи за компютърни изчисления и визуализация в извънкласното обучение по математика представлява успешен, интригуващ и предизвикателен образователен подход.

Решаването на уравнения е задача, която възниква често както в математиката, така и в почти всички области на науката и практиката. Бурното развитие на компютърната и изчислителната техника и технологии в последните години е обусловено от необходимостта от бързо и прецизно решаване на конкретни практически задачи. Тези условия поставят нови съвременни изисквания пред обучението по математика в училищата [2]. Използването на системи за компютърна математика, в частност MATLAB/MuPAD, дава възможност както на учителите, така и на учениците, за добра визуализация на решенията. Освен това, от съществено значение е пестенето на време при решаването на трудоемки задачи, особено в случаите, когато те нямат решение и се налага това да бъде доказано.

Не бива да се пренебрегва фактът, че използването на която и да система за компютърна математика изисква предварителна математическа подготовка, която се придобива в часовете по математика чрез традиционния подход за усвояване на теоретичния материал и решаване на конкретни задачи.

В настоящата статия е представено използването на системата за компютърна математика MATLAB/MuPAD при решаването на уравнения, включени в задължителната учебна програма за 9. и 10. клас по Алгебра [3,4,5].

РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЯ

Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са функции на променливата $x \in \mathbb{R}$ с общо дефиниционно множество $D \subset \mathbb{R}$. Равенството

$$f_1(x) = f_2(x) \quad (1)$$

се нарича уравнение с едно неизвестно. Задачата за решаване на дадено уравнение се състои в това да се намерят стойностите на променливата x , ако такива съществуват, при които функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имат равни стойности.

Ако едно уравнение се удовлетворява от всички допустими стойности на променливата $x \in D$, то се нарича твърдение, т.е. казваме, че уравнението се удовлетворява твърдествено [6].

В настоящата статия е използван графичният метод за изследване на уравнение (1). Методът се състои в изобразяване графиките на функциите $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ на обща фигура. Абсцисите на пресечните точки на графиките на тези

функции съответстват на тези стойности на променливата x , за които стойностите на двете функции съвпадат, т.е. това са корените на уравнение (1).

За да се намерят координатите на пресечните точки на графиките на двете функции, уравнение (1) трябва да бъде решено [1].

За целта се използва приложението за компютърни изчисления и визуализации MuPAD, което е част от пакета за символни пресмятания Symbolic Math Toolbox на програмната система MATLAB [7].

ПРИМЕРИ

Задача 1. Да се реши ирационалното уравнение [2, с. 101]

$$(x^4 - 4x^2 + 3)(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{13}) = 0$$

Решение:

Даденото уравнение би могло да се реши традиционно, като се разгледат поотделно уравненията, получени от приравняването на нула на двата множителя

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{13} = 0.$$

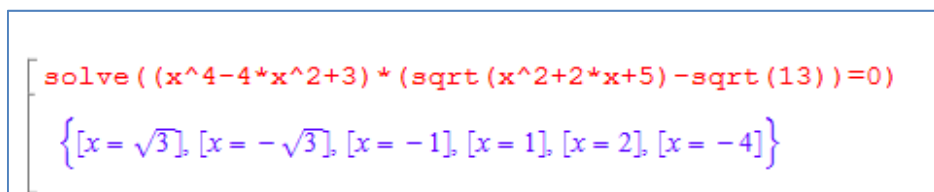
Традиционният подход за решаване е много трудоемък, защото първото уравнение е биквадратно и за решаването му се налага смяна на променливата с цел свеждането му до квадратно уравнение чрез полагането $x^2 = t$, а второто уравнение е ирационално.

Решаването на даденото уравнение става лесно и бързо с MuPAD чрез използването на командата **solve**:

$$\text{solve}((x^4 - 4x^2 + 3) * (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{13}) = 0).$$

Резултатът е показан на фиг. 1. Решенията са следните

$$x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = -1, x_4 = 1, x_5 = 2, x_6 = -4.$$



The screenshot shows the MuPAD command window with the following text:

```
solve((x^4-4*x^2+3)*(sqrt(x^2+2*x+5)-sqrt(13))=0)
{[x = sqrt(3)], [x = -sqrt(3)], [x = -1], [x = 1], [x = 2], [x = -4]}
```

Фиг. 1. Решаване на Задача 1 с MuPAD

Задача 2. Да се реши уравнението [1, с. 56]

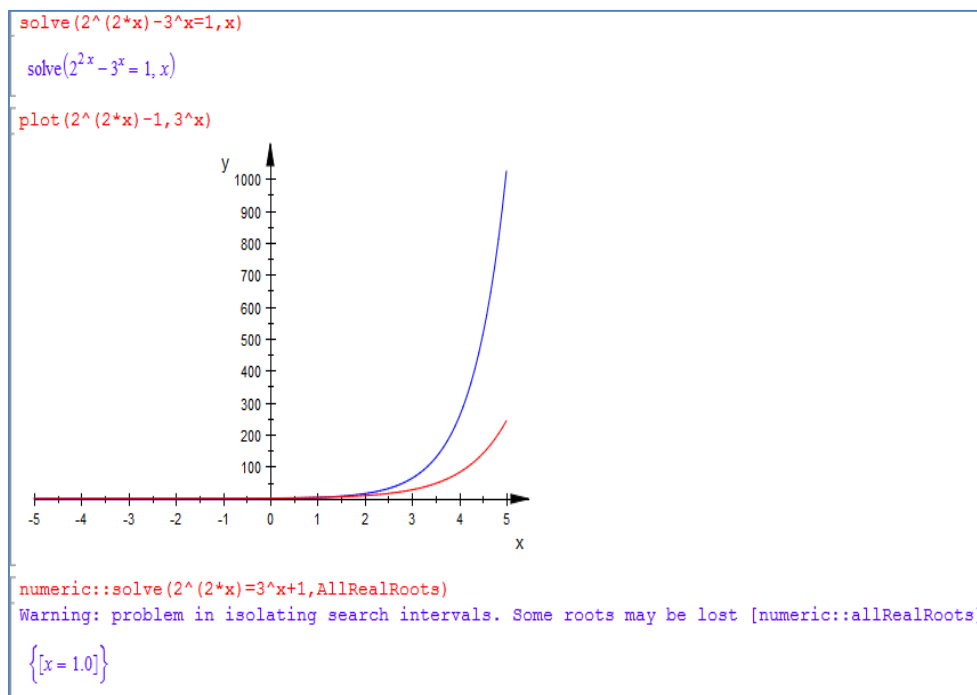
$$2^{2x} - 3^x = 1.$$

Решение:

Солвърът на MuPAD се затруднява да визуализира корените на това уравнение. На екрана излиза съобщението

“Problem in isolating search intervals. Some roots may be lost”,

което е показано на следващата фиг. 2. Възниква въпросът как да бъде получен категоричен резултат.



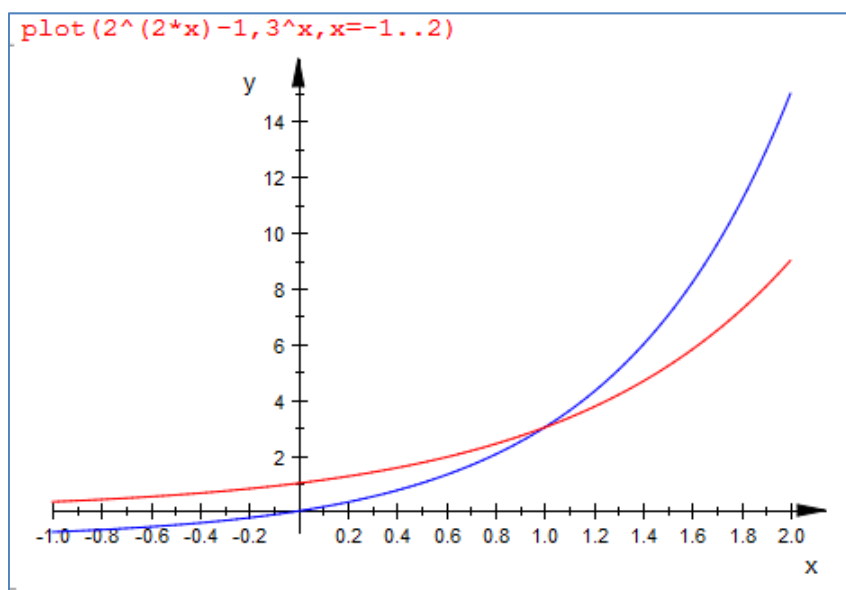
Фиг. 2. Решаване на Задача 2 с MuPAD

За да бъде получен този резултат, отново е приложен графичният метод за изследване решенията на даденото уравнение по следния начин. Нека $y_1 = f_1(x) = 2^{2x} - 1$ и $y_2 = f_2(x) = 3^x$. На фиг. 3 са показани графиките на тези функции, начертани чрез командата **plot**:

$$\text{plot}(2^{(2*x)}-1, 3^x, x=-1..2),$$

като целта е по-добре да се визуализира поведението на функциите в околност на точката $x = 1$. Начертани са графиките на двете функции в тази околност, като в командата **plot** е зададен интервал на изменение на аргумента $x = -1..2$.

Получената графика, показана на фиг. 3, окончателно потвърждава извода, че задачата има само едно решение $x = 1$.



Фиг. 3. Допълнително изследване за изолиране на решението на Задача 2

Задача 3. Решете уравнението [1, с. 56]

$$2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|).$$

Решение:

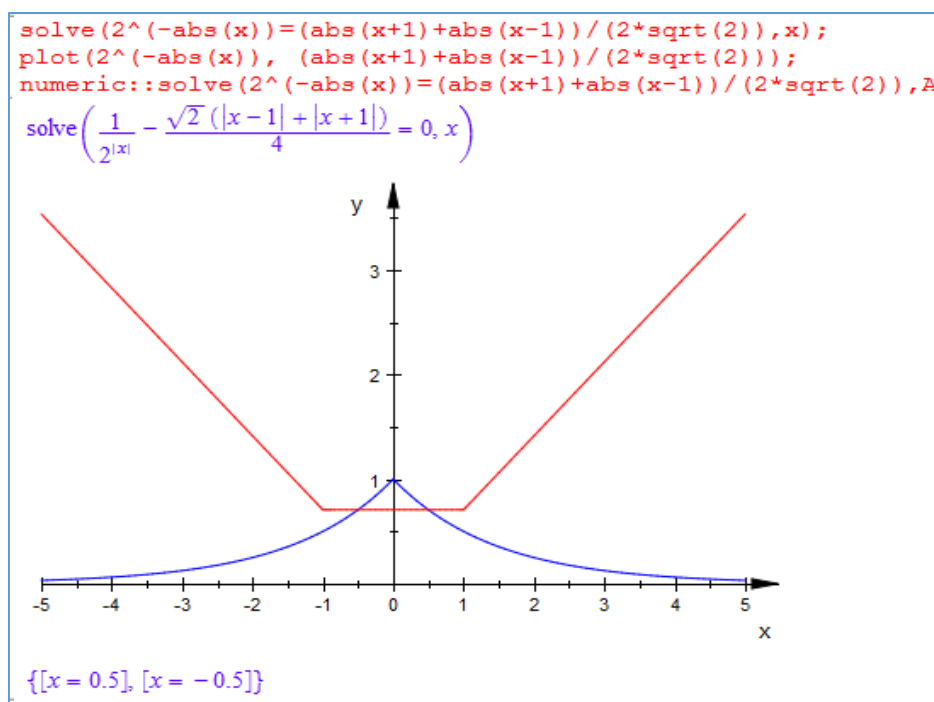
Решаването на задачата по стандартния начин не дава резултат. Отново е приложен графичният метод за изследване решенията на даденото уравнение по следния начин:

Нека $y_1 = f_1(x) = 2^{-|x|}$ и $y_2 = f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|)$. На фиг. 4 са показани графиките на тези функции, начертани чрез командата **plot**:

```
plot(2^(-abs(x)), (abs(x+1)+abs(x-1))/(2*sqrt(2))).
```

На фигурата се вижда, че двете графики се пресичат в две точки, следователно, уравнението има два корена. Абсцисите на двете пресечни точки са намерени числено чрез солвъра **solve** от библиотеката **numeric**.

Уравнението има две решения: $x = -0.5$ и $x = 0.5$.



Фиг. 4. Решаване на Задача 3 с MuPAD

Задача 4. Решете уравнението [1, с. 56]

$$\sin 3x - \sin 2x = 2.$$

Решение:

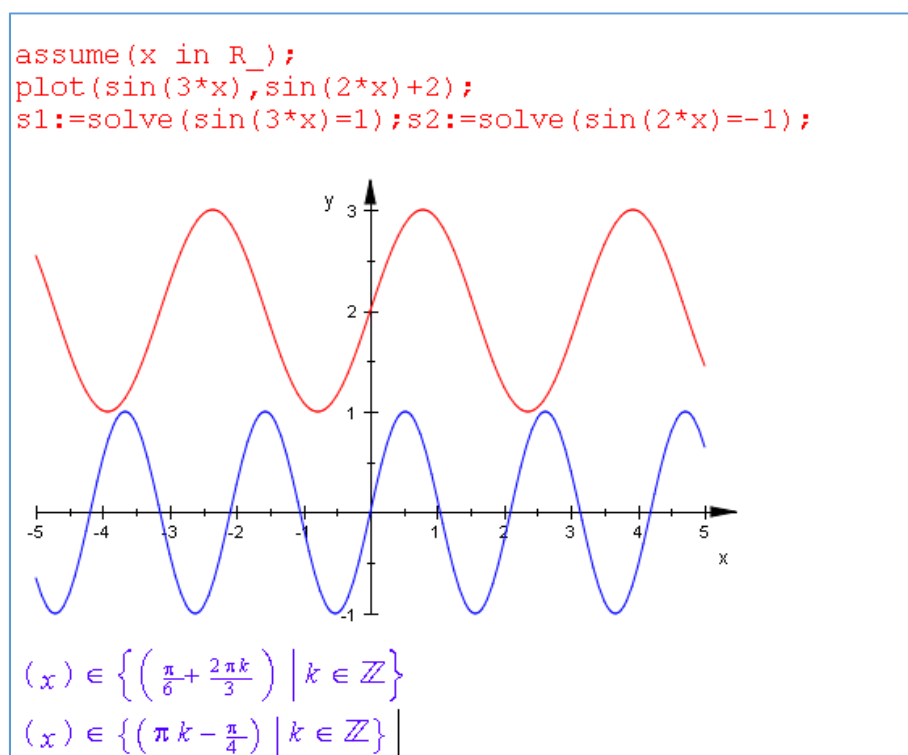
Директното решаване на задачата със солвъра на MuPAD не дава резултат. Приложен е графичният метод за изследване решенията на даденото уравнение по следния начин:

Нека $y_1 = f_1(x) = \sin 3x$ и $y_2 = f_2(x) = \sin 2x + 2$. На фиг. 5 са показани графиките на тези функции, начертани чрез командата **plot**:

```
plot(sin(3*x), sin(2*x)+2).
```

След изчертаване на графиките на двете функции, от фиг. 5 се вижда, че те нямат пресечни точки. Предположението е, че уравнението няма решение. За да бъде потвърден този извод, е направено следното изследване:

Поради ограничеността на функциите $\sin 2x$ и $\sin 3x$ в интервала $[-1,1]$, се стига до извода, че решение би се получило само когато първото събираемо има стойност 1, а второто събираемо (-1), т.е. когато $\sin 3x = 1$ и $\sin 2x = -1$. По-нататък двете уравнения са решени поотделно и е потърсено сечението на множествата от техните решения. За извличане на множествата от решения е използвана командата **op**, а за намиране на сечението им – командата **intersect**. Полученият резултат окончателно потвърждава направения по-горе извод, че даденото уравнение няма решение, фиг. 6.



Фиг. 5. Графики на функциите от Задача 4, начертани с MuPAD

```

s1:=solve(sin(3*x)=1); s2:=solve(sin(2*x)=-1);
set1:=op(s1,2); set2:=op(s2,2);
set1 intersect set2;
{ (pi/6 + 2*pi*k/3) | k in Z }
{ (pi*k - pi/4) | k in Z }
∅

```

Фиг. 6. Окончателно решение на Задача 4

Задача 5. Да се реши уравнението [1, с. 56]

$$\sin^4 x + \cos^{10} x = 1.$$

Решение:

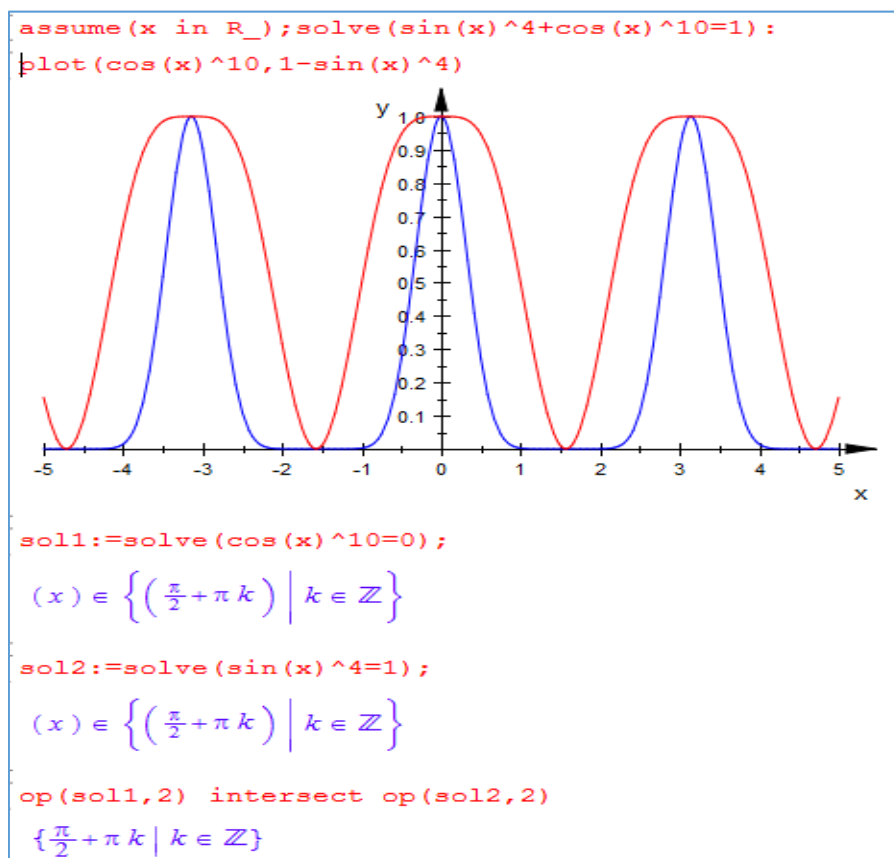
Поради високите и различни степени на тригонометричните функции $\sin x$ и $\cos x$, с които те участват в уравнението, аналитично решение не може да бъде намерено от солвър на MuPAD. Използвана е командата **solve**:

```
solve(sin(x)^4+cos(x)^10=1).
```

От фиг. 7 се вижда, че солвърът на MuPAD не е намерил решение. Затова е приложен графичният метод за изследване решенията на даденото уравнение по следния начин:

Нека $y_1 = f_1(x) = \cos^{10} x$ и $y_2 = f_2(x) = 1 - \sin^4 x$. На фиг. 7 са показани графиките на тези функции, начертани чрез командата **plot**:

```
plot(cos(x)^10, 1-sin(x)^4).
```



Фиг. 7. Решение на Задача 5 с MuPAD

Вижда се, че пресечните точки на графиките на двете функции са точките на локален максимум и локален минимум на тези функции. Следователно, даденото уравнение има много решения. За да се получат тези решения, е намерено сечението на двете множества от решения на уравненията $\cos^{10} x = 0$ и $\sin^4 x = 1$ чрез командата **intersect**. Окончателно, решението на Задача 5 е следното:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ където } k \in \mathbb{Z}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представените задачи и техните решения илюстрират ползата от използването на системата за компютърни изчисления MATLAB/MuPAD за решаване на стандартни и нестандартни уравнения, които са включени в задължителната учебна програма за 9. и 10. клас по Алгебра [3, 4, 5]. Богатите възможности и широкото приложение на тази компютърна система за изчисления и визуализации, спомагат за творческата и изследователска дейност на изявени ученици в областта на математиката и информационните технологии в извънкласното им обучение по математика.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Башмаков М.И., *Уравнения и неравенства*, Наука, Москва, 1976.
- [2] Караколева С., *Компютърна математика с MuPAD за ученици*, VII национална конференция „Образованието и изследванията в информационното общество“, Пловдив, 29-30 май 2014, с. 97 – 106, ISBN 978-954-8986-39-7.
- [3] Паскалев Г., Паскалева З., *Математика за 9. клас – второ равнище*, Архимед-ПП, София, 2001, ISBN 954-907-61-13.
- [4] Паскалев Г., Паскалева З., *Математика за 10. клас – второ равнище*, Архимед, София, 2001, ISBN 954-907-61-21.
- [5] Паскалев Г., Паскалева З., Алашка М., *Сборник по математика за 9. клас – първо и второ равнище*, Архимед 2 ЕООД, София, 2012, ISBN 978-954-779-139-8.
- [6] Петров К., *Ръководство за решаване на задачи по математика*, Народна просвета, София, 1984.
- [7] Тончев И., *MuPAD - Новият символен мотор на MATLAB*, Техника, 2011, ISBN 978-954-03-0698-8.

За контакти:

Лидия Стоянчева Петрова, специалност Математика и информатика, IV курс, Факултет Природни науки и образование, Русенски университет „А. Кънчев“, e-mail: lidiq.1988@abv.bg

Научни ръководители:

гл. ас д-р Анна Симеонова Лечева, катедра Математика, Факултет Природни науки и образование, Русенски университет „А. Кънчев“, тел. 082/888420, e-mail: alecheva@uni-ruse.bg

ас. Стефка Романова Караколева, катедра Приложна математика и статистика, Факултет Обществено здраве и здравни грижи, Русенски университет „А. Кънчев“, тел. 082/888606, e-mail: skarakoleva@uni-ruse.bg