

ISSN 1311-3321 (print)  
ISSN 2535-1028 (CD-ROM)  
ISSN 2603-4123 (on-line)

**UNIVERSITY OF RUSE “Angel Kanchev”**  
**РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ “АНГЕЛ КЪНЧЕВ”**

**BSc, MSc and PhD Students & Young Scientists**  
**Студенти, докторанти и млади учени**

**PROCEEDINGS**

**Volume 58, book 6.5.**  
**Financial Mathematics**  
**&**  
**Informatics**

**НАУЧНИ ТРУДОВЕ**

**Том 58, серия 6.5.**  
**Финансова математика**  
**&**  
**Информатика**

**Ruse**  
**Русе**  
**2019**

Volume 58 of PROCEEDINGS includes the papers presented at the scientific conference RU & SU'19, organized and conducted by University of Ruse "Angel Kanchev" and the Union of Scientists - Ruse. Series 6.5. contains papers reported in the Financial Mathematics & Informatics section.

| Book                                             | Code                               | Faculty and Section                       |
|--------------------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------|
| <b>Faculty of Natural Sciences and Education</b> |                                    |                                           |
| <b>6.1</b>                                       | FRI-1.414-1-MIP                    | Mathematics, Informatics and Physics      |
| <b>6.2</b>                                       | FRI-2G.307-1-PP                    | Pedagogy and Psychology                   |
| <b>6.3</b>                                       | FRI-2G.405-1-LL<br>FRI-2G.407-1-AS | Linguistics and Literature<br>Art Studies |
| <b>6.4</b>                                       | FRI-2G.305-1-ERI                   | Education - Research and Innovations      |
| <b>6.5</b>                                       | FRI-SSS-2.203-FMI                  | Financial Mathematics. Informatics        |
| <b>6.6</b>                                       | TUE-2G.405-SSS-EMI                 | Education of Mathematics and Informatics  |
|                                                  | MON-2.209-SSS-PPL                  | Pedagogy, Psychology and Literature       |

The papers have been reviewed.

**ISSN 1311-3321 (print)**

**ISSN 2535-1028 (CD-ROM)**

**ISSN 2603-4123 (on-line)** Copyright © authors

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.

The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access



## PROGRAMME COMMITTEE

- **Prof. Velizara Pencheva, PhD,**  
University of Ruse, Bulgaria
- **Prof. Leon Rothkrantz**  
Delft University of Technology, Netherlands
- **Assoc. Prof. Antonio Jose Mendes,**  
University of Coimbra, Portugal
- **Prof. Ville Leppanen,**  
University of Turku, Finland
- **Assoc. Prof. Marco Porta,**  
University of Pavia, Italy
- **Prof. Douglas Harms,**  
DePauw University, USA
- **Prof. Ismo Hakala, PhD,**  
University of Jyväskylä, Finland
- **Prof. Dr. Artur Jutman,**  
Tallinn University of Technology, Estonia
- **Prof. RNDr. Vladimír Tvarozek, PhD,**  
Slovak University of Technology in Bratislava, Bratislava, Slovakia
- **Doc. Ing. Zuzana Palkova, PhD,**  
Slovak University of Agriculture in Nitra, Nitra, Slovakia
- **Andrzej Tutaj, PhD,**  
AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland
- **Assoc. Prof. Behiç TEKİN, PhD,**  
Ege University, Izmir, Turkey,
- **Prof. Valentin NEDEFF Dr. eng. Dr.h.c.,**  
“Vasile Alecsandri” University of Bacău, Romania
- **Dr. Cătălin POPA,**  
“Mircea cel Bătrân” Naval Academy, Constantza, Romania
- **Prof. dr Larisa Jovanović,**  
Alfa University, Belgrade, Serbia
- **Prof. dr hab. Edmund LORENCOWICZ,**  
University of Life Sciences in Lublin, Poland
- **Assoc. Prof. Ion MIERLUS - MAZILU, PhD,**  
Technical University of Civil Engineering, Bucharest, Romania
- **Prof. Dojčil Vojvodić PhD,**  
Faculty of Philosophy, University of Novi Sad, Serbi
- **Assoc. Prof. Alexandrache Carmen, PhD,**  
Department of Teacher Training, “Dunarea de Jos”, Galati University, Romania
- **Prof. Alberto Cabada,**  
University of Santiago de Compostela, Faculty of Mathematics, Santiago de Compostela, Spain
- **Assoc. Prof. Dr. Mehmet Şahin,**  
Necmettin Erbakan University, Ahmet Keleşoğlu Faculty of Education, Konya, Turkey
- **Assoc. Prof. Erika Gyöngyösi Wiersum, PhD,**  
Eszterházy Károly University, Comenius Campus in Sárospatak, Institute of Real Sciences, Sárospatak, Hungary
- **Anna Klimentova, PhD,**  
Constantine the Philosopher University in Nitra, Slovakia
- **Prof. Igor Kevorkovich Danilov, DSc,**  
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia

- **Prof. Aleksander Valentinov Sladkowski, DSc,**  
Silesian University of Technology, Poland
- **Prof. Pether Shulte, PhD,**  
Institute for European Affairs (INEA), Dusseldorf, Germany
- **Prof. Aslitdin Nizamov, DSc., PhD,**  
Bukhara Engineering-Technological Institute, Bukhara, Uzbekistan
- **Prof. Marina Sheresheva, PhD,**  
Lomonosov Moscow State University, Russia
- **Prof. Erik Dahlquist, PhD,**  
Mälardalen University, Sweden
- **Prof. Erik Lindhult, PhD,**  
Mälardalen University, Sweden
- **Prof. Annika Kunnasvirta, PhD,**  
Turku University of Applied Sciences, Finland
- **Prof. Walter Leal, Dr. (mult.) Dr.h.c. (mult.),**  
Hamburg University of Applied Sciences, Germany
- **Prof. Dr. Gerhard Fiolka,**  
University of Fribourg, Switzerland
- **Prof. Haluk Kabaalioglu, PhD,**  
Yeditepe University, Turkey
- **Prof. Silva Alves, PhD,**  
University of Lisbon, Portugal
- **Hanneke van Bruggen,**  
Appeldoorn, The Netherlands
- **Nino Žganec,**  
President of European Association of Schools of Social Work, Assoc. Prof. at the Department of Social Work,  
University of Zagreb, Croatia
- **Prof. Violeta Jotova,**  
Направление „Педиатрия“ в УМБАЛ „Св. Марина“ – Варна, България
- **Assoc. Prof. Tanya Timeva, MD, PhD,**  
Obstetrics and Gynecology Hospital "Dr. Shterev", Sofia, Bulgaria
- **Prof. Kiril Stoychev, PhD,**  
Institute of Metal Science, Equipment and Technologies "Acad. A. Balevski" with Hydroaerodynamics centre  
– BAS, Bulgaria
- **Assoc. Prof. Mark Shamtsyan, PhD,**  
Technical University, Saint Petersburg, Russia
- **Assoc. Prof. Oleksii Gubenia, PhD,**  
National University of Food Technology, Kiev, Ukraine
- **Assoc. Prof. Olexandr Zaichuk, DSc,**  
Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnepropetrovsk, Ukraine
- **Prof. Eugene Stefanski, DSc,**  
Samara University, Russia
- **Doc. Dr. Tatiana Strokovskaya,**  
International University of Nature "Dubna", Dubna, Russia
- **Prof. DSc. Petar Sotirow,**  
Maria Curie-Skłodowska University of Lublin, Poland
- **Prof. Papken Eghiasar Hovsepian,**  
Sheffield Hallam University, Sheffield, UK
- **Assoc. Prof. Krassimir Dochev Dochev, PhD,**  
University of Portsmouth School of Engineering, UK
- **Mariana Yordanova Docheva, PhD,**  
University of Portsmouth School of Engineering, UK

- **Assoc. Prof. Ivan Antonov Lukanov, PhD,**  
University of Botswana, Faculty of Engineering and Technology, Gaborone, Botswana
- **Assoc. Prof. Petko Vladev Petkov, PhD,**  
Research Associate Cardiff University, UK
- **Prof. Stepan Terzian DSc,**  
Bulgarian Academy of Science, Bulgaria
- **Prof. Dr. Gabriel Negreanu,**  
University Politehnica of Bucharest, Romania

## ORGANISING COMMITTEE

♦ **ORGANIZED BY: University of Ruse (UR) and  
Union of Scientists (US) - Ruse**

♦ **ORGANISING COMMITTEE:**

• **Chairpersons:**

COR. MEM Prof. Hristo Beloev, DTSc – Rector of UR, Chairperson of US - Ruse

• **Scientific Secretary:**

Prof. Diana Antonova PhD, Vice-Rector Research,  
dantonova@uni-ruse.bg, 082/888 249

♦ **MEMBERS:**

Assoc. Prof. Kaloyan Stoyanov, PhD  
Assoc. prof. Velina Bozduganova, PhD,  
Assoc. Prof. Kiril Sirakov, PhD,  
Assoc. Prof. Milko Marinov, PhD,  
Pr. Assist. Ivanka Tsvetkova, PhD,  
Assoc. Prof. Simeon Iliev, PhD,  
Assoc. Prof. Pavel Vitliemov, PhD,  
Assoc. Prof. Mimi Kornazheva, PhD,  
Boryana Stancheva, PhD,  
Prof. Vladimir Chukov, DESc,  
Pr. Assist. Krasimir Koev, PhD,  
Prof. Juliana Popova, PhD,  
Pr. Assist. Hristina Sokolova, PhD,  
Pr. Assist. Magdalena Andreeva, PhD,  
Assoc. Prof. Emilia Velikova, PhD,  
Assoc. prof. Bagryana Ilieva, PhD,  
Pr. Assist. Reneta Zlateva, PhD,  
Assoc. Prof. Velislava Doneva, PhD,  
Assoc. Prof. Stefka Mindova,  
Assoc. Prof. Sasho Nunev, DSc.,  
Assoc. Prof. Despina Georgieva, PhD,  
Pr. Assist. Vanya Panteleeva, PhD,  
Assoc. Prof. Emil Trifonov, PhD,  
Assoc. Prof. Galina Lecheva;  
Assist. Prof. Milen Sapundzhiev, PhD;  
Assoc. Prof. Tsvetan Dimitrov, PgD,  
Assoc. Prof. Nastya Ivanova, PhD,

♦ **REVIEWERS:**

- Prof. Angela Slavova, DSc
- Prof. Velizar Pavlov, PhD
- Assoc. Prof. Iliya Brayanov, PhD
- Assoc. Prof. Yuriy Kandilarov, PhD
- Assoc. Prof. Evelina Veleva, PhD
- Assoc. Prof. Desislava Atanasova, PhD,
- Assoc. Prof. Miglena Koleva, DSc,
- Assist. Prof. Tihomir Gyulov, PhD

# FINANCIAL MATHEMATICS & INFORMATICS

## Content

|                                                                                                                                            |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1. FRI-2.203-SSS-FM-01                                                                                                                     |           |
| <b>Elliott wave theory and corrective waves .....</b>                                                                                      | <b>9</b>  |
| <i>Denitsa Doncheva, Vesela Mihova</i>                                                                                                     |           |
| 2. FRI -2.203-SSS-FM-02                                                                                                                    |           |
| <b>Comparison of heuristic algorithms in solving a specific model of transport problem using mixed integer linear programming .....</b>    | <b>16</b> |
| <i>Tsvetelina Dimitrova, Ivan Georgiev</i>                                                                                                 |           |
| 3. FRI -2.203-SSS-FM-03                                                                                                                    |           |
| <b>Butterfly spread strategy for option trading .....</b>                                                                                  | <b>22</b> |
| <i>Mariela Kostova, Iliyana Raeva</i>                                                                                                      |           |
| 4. FRI-2.203-SSS-FM-04                                                                                                                     |           |
| <b>Analysis of the movement of interest rates for the nonfinancial organizations' credits for the period 2013 – 2018 .....</b>             | <b>28</b> |
| <i>Elif Fikret, Petar Penchev</i>                                                                                                          |           |
| 5. FRI-2.203-SSS-FM-05                                                                                                                     |           |
| <b>Black-Scholes Model for pricing a European put option .....</b>                                                                         | <b>35</b> |
| <i>Nikoleta Kirilova, Iliyana Raeva</i>                                                                                                    |           |
| 6. FRI-2.203-SSS-FM-06                                                                                                                     |           |
| <b>An analysis on prices of assets of Four American Banks from 'The Big Four' according to their Index Standard &amp; Poor's 500 .....</b> | <b>41</b> |
| <i>Virginia Centeno, Elitsa Raeva</i>                                                                                                      |           |
| 7. FRI-2.203-SSS-FM-07                                                                                                                     |           |
| <b>Application of Neural Network for credit card fraud detection .....</b>                                                                 | <b>49</b> |
| <i>Sevdalina Georgieva, Maya Markova</i>                                                                                                   |           |
| 8. FRI-2.203-SSS-FM-08                                                                                                                     |           |
| <b>Option pricing using Merton's jump-diffusion model .....</b>                                                                            | <b>55</b> |
| <i>Borislav Chakarov, Iliyana Raeva</i>                                                                                                    |           |
| 9. FRI-2.203-SSS-FM-09                                                                                                                     |           |
| <b>Travelling waves for the Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation with examples .....</b>                                         | <b>61</b> |
| <i>Slavi Georgiev, Julia Chaparova</i>                                                                                                     |           |



## ELLIOTT WAVE THEORY AND CORRECTIVE WAVES<sup>1</sup>

---

### **Denitsa Doncheva**

Financial Mathematics Student

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: d.doncheva@abv.bg

### **Assistant Prof. Vesela Mihova, PhD**

Department of Applied Mathematics and Statistics,

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

**Abstract:** *Elliott Wave principle is a widely used approach to forecasting financial markets. In the recovery period, after the Great Depression of the 1930s, Ralph Nelson Elliott dealt with a detailed analysis of the movement of the securities market. In the process of work, he develops a theory that describes these movements. Eliot believed that market prices are moving in a predetermined number of waves in line with Fibonacci numbers. This is based on the assumption that the average market level rises in the form of five waves and drops in the form of three waves.*

**Keywords:** *Elliott Wave Theory, market prices, Fibonacci numbers, waves*

## **ВЪВЕДЕНИЕ**

Вълновата теория на Елиът носи името на американския счетоводител Ралф Нелсън Елиът (28 юли 1871 - 15 януари 1948 г.). Вдъхновен от теорията на Дау и от наблюденията, открити в природата, Елиът заключил, че движението на фондовия пазар може да се предскаже чрез наблюдение и идентифициране на повтарящи се вълни.

Елиът успява да анализира пазарите по-задълбочено, като идентифицира специфичните характеристики на вълновите модели и прави подробни пазарни прогнози въз основа на моделите. Той установява няколко правила, с които е възможно както да се определи посоката на основния пазарен тренд, така и да се установи дали е налице обръщане на тренда или просто локална промяна (корекция). Работата му се базира върху теорията на Дау, която също определя ценовото движение по отношение на вълните, но Елиът открива фракталния характер на пазарните действия (Robert, R., 1994). Елиът първо публикува своята теория за пазарните модели в книгата, озаглавена „Принцип на вълната“ през 1938 година.

Движението в посоката на тренда се разгръща в 5 вълни (наричани мотивираща вълна), докато всяка корекция срещу тренда е в три вълни (наричани коригираща вълна). Движението в посоката на тренда е обозначено като 1, 2, 3, 4 и 5. Корекцията на три вълни е обозначена като а, b и с. Тези модели могат да се разглеждат както в дългосрочен план, така и в краткосрочни графики.

В идеалния случай по-малки модели могат да бъдат идентифицирани в по-големите модели. В този смисъл вълните на Елиът са като парче броколи, където по-малкото парче, ако се отдели от по-голямото парче, всъщност изглежда като голямо парче. Тази информация (за по-малките модели, вписващи се в по-големи модели), съчетана с връзките на Фибоначи между вълните, предлага на търговеца ниво на прогнозиране и / или прогнозиране, когато търси и идентифицира възможностите за търговия със солидни съотношения на награди / риск.

---

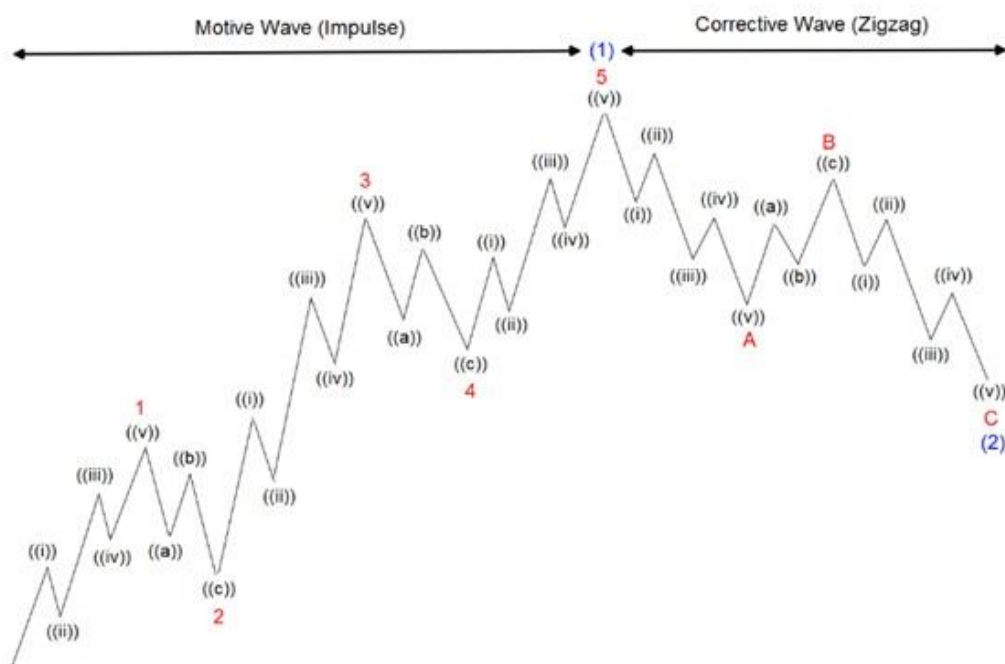
<sup>1</sup> Докладът/ статията отразява резултати от работата по проект No 2019 - ФПНО - 05, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

## ИЗЛОЖЕНИЕ

В модела на Елиът пазарните цени се редуват между импулсивна или мотивираща фаза и коригираща фаза във всички времеви мащаби на тенденцията.

На Фиг.1, вълни 1, 3 и 5 са мотивиращи вълни и са разделени на 5 импулса с по-малка степен, обозначени като ((i)), ((ii)), ((iii)), ((iv)) и ((v)). Вълна 2 и 4 са коригиращи вълни и са подразделени на 3 вълни с по-малка степен, обозначени като ((a)), ((b)) и ((c)). Петте вълни се движат във вълна 1, 2, 3, 4 и 5 и представляват по-голяма мотивна вълна (1).

Коригиращите вълни се разделят на 3 вълни с по-малка степен, обозначени като А, В и С. Коригиращите вълни започват с 5-вълнов контра-тренд импулс (вълна А), обратна връзка (вълна В) и друг импулс (вълна С). Трите вълни А, В и С съставляват по-голяма степен на коригираща вълна (2).



Фиг. 1. Обща схема на вълновата теория

Източник: *Elliott Wave Forecast*

Вълновата теория на Елиът дава важна информация за това в коя фаза на тренда се намира пазарът в момента. Тя може да се използва от финансовите анализатори като ориентир при откриване на най-ниско рисковите нива за влизане на пазара. Тези нива са най-често в началото на вълна 3 и в по-малка степен в началния стадий на развитие на вълна 5, тоест след края на развитието на корективните вълни (Elana Trading Blog, 2013).

## Начин на изчисление

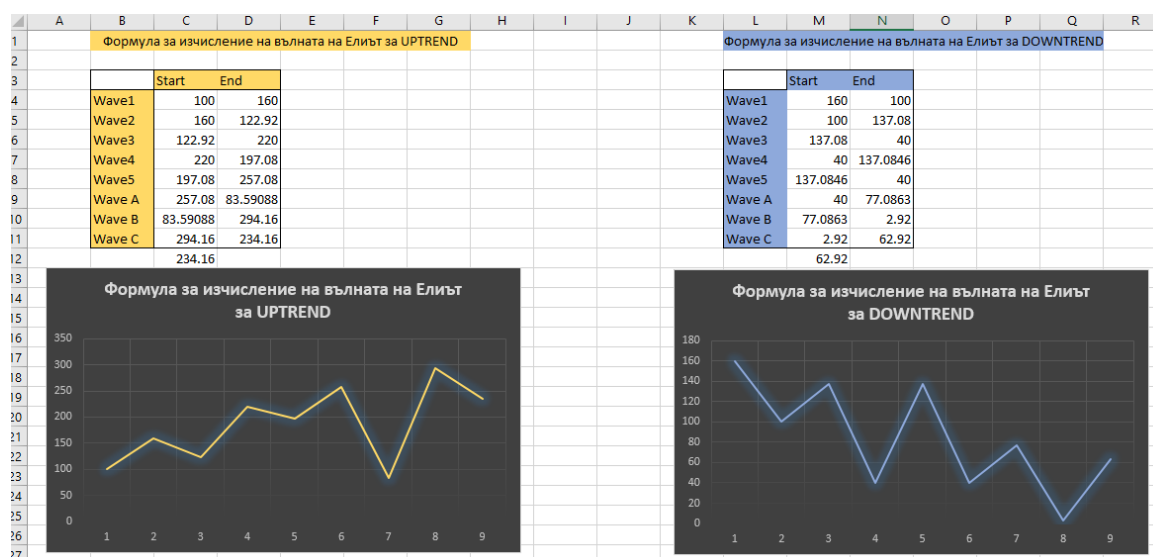
Изчисленията за мотивиращата и коригиращата вълна са направени в Excel, както следва. На Фиг.2 се виждат и графичните резултати.

*Формули за изчисление на мотивираща вълна (UPTREND) - бичи пазар*

Wave1StartPoint = LowPrice

Wave1EndPoint = HighPrice

Wave2StartPoint = Wave1EndPoint

$$\begin{aligned} \text{Wave2EndPoint} &= \text{Wave2StartPoint} - ((\text{HighPrice} - \text{LowPrice}) * 0.618) \\ \text{Wave3StartPoint} &= \text{Wave2EndPoint} \\ \text{Wave3EndPoint} &= \text{Wave2StartPoint} + ((\text{HighPrice} - \text{LowPrice}) * 1.618) \\ \text{Wave4StartPoint} &= \text{Wave3EndPoint} \\ \text{Wave4EndPoint} &= \text{Wave2StartPoint} - ((\text{Wave3EndPoint} - \text{Wave3StartPoint}) * 0.382) \\ \text{Wave5StartPoint} &= \text{Wave4EndPoint} \\ \text{Wave5EndPoint} &= \text{Wave2StartPoint} + (\text{HighPrice} - \text{LowPrice}) \\ \text{WaveAStartPoint} &= \text{Wave5EndPoint} \\ \text{WaveAEndPoint} &= \text{WaveAStartPoint} - ((\text{Wave5EndPoint} + \text{Wave5StartPoint}) * 0.382) \\ \text{WaveBStartPoint} &= \text{WaveAEndPoint} \\ \text{WaveBEndPoint} &= \text{WaveAStartPoint} + (\text{HighPrice} - \text{LowPrice}) * 0.618) \\ \text{WaveCStartPoint} &= \text{WaveBEndPoint} \\ \text{WaveCEndPoint} &= \text{WaveCStartPoint} - (\text{HighPrice} - \text{LowPrice}) \end{aligned}$$


Фиг. 2. Изчисления за мотивиращата и коригиращата вълна в Excel

Формули за изчисление на коригираща вълна (DOWNTREND) - мечи пазар

$$\begin{aligned} \text{Wave1StartPoint} &= \text{HighPrice} \\ \text{Wave1EndPoint} &= \text{LowPrice} \\ \text{Wave2StartPoint} &= \text{Wave1EndPoint} \\ \text{Wave2EndPoint} &= \text{Wave2StartPoint} + ((\text{HighPrice} - \text{LowPrice}) * 0.618) \\ \text{Wave3StartPoint} &= \text{Wave2EndPoint} \\ \text{Wave3EndPoint} &= \text{Wave2StartPoint} - ((\text{HighPrice} - \text{LowPrice}) * 1.618) \\ \text{Wave4StartPoint} &= \text{Wave3EndPoint} \\ \text{Wave4EndPoint} &= \text{Wave2StartPoint} + ((\text{Wave3StartPoint} - \text{Wave3EndPoint}) * 0.382) \\ \text{Wave5StartPoint} &= \text{Wave4EndPoint} \\ \text{Wave5EndPoint} &= \text{Wave2StartPoint} - (\text{HighPrice} - \text{LowPrice}) \\ \text{WaveAStartPoint} &= \text{Wave5EndPoint} \\ \text{WaveAEndPoint} &= \text{WaveAStartPoint} + ((\text{Wave5StartPoint} - \text{Wave5EndPoint}) * 0.382) \\ \text{WaveBStartPoint} &= \text{WaveAEndPoint} \end{aligned}$$

WaveBEndPoint = WaveAStartPoint - (HighPrice - LowPrice) \* 0.618)

WaveCStartPoint = WaveBEndPoint

WaveCEndPoint = WaveCStartPoint + (HighPrice - LowPrice)

### Отношение между вълновата теория на Фибоначи и Елиът

Съотношението на Фибоначи е полезно за измерване на целта на движение на вълната в рамките на вълната на Елиът. Различните вълни в структурата на вълната на Елиът са свързани помежду си с коефициент на Фибоначи. Например в импулсна вълна:

- Вълна 2 обикновено е 50%, 61.8%, 76.4% или 85.4% от вълната 1;
- Вълна 3 обикновено е 161.8% от вълната 1;
- Вълна 4 обикновено е 14.6%, 23.6% или 38.2% от вълна 3;
- Вълна 5 обикновено е 61.8%, 100% или 123.6% от вълната 1.

По този начин търговците могат да използват информацията, за да определят точката на влизане и желаната печалбата при сключване на сделка.

### Коригиращи вълни

Класическата дефиниция на коригиращите вълни е вълни, които се движат срещу тенденцията на една по-голяма степен. Коригиращите вълни са много по-разнообразни и по-малко ясно идентифицирани в сравнение с импулсните вълни. Понякога може да е доста трудно да се определят коригиращите модели, докато не бъдат завършени. Въпреки това, както тенденцията, така и контра-тенденцията могат да се развият в корективния модел на днешния пазар, особено на валутния пазар. Коригиращите вълни са по-добре дефинирани като вълни, които се движат в три, но никога в пет. Елиът разглежда голям брой варианти на главната вълна, като отдава важност на 0,618 като основен процент на корекция.

Има пет вида коригиращи модели (Elana Trading Blog, 2013) :

- Зигзаг (5-3-5)(виж Таблица 1)
- Равнинен (3-3-5)( виж Таблица 2)
- Триъгълник (3-3-3-3-3)( виж Таблица 3)
- Двойно три: комбинация от два коригиращи модела (виж Таблица 4)
- Тройка три: Комбинация от три коригиращи модела (виж Таблица 5)

Таблица 1. Зигзаг

| НАСОКИ                                                                                                                                                                                                                                                                                             | СЪОТНОШЕНИЕ НА ФИБОНАЧИ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Зигзагът е коригираща структура от 3 вълни, обозначена като ABC</li> <li>• Разделянето на вълни А и С е 5 вълни, или импулсни, или диагонални</li> <li>• Вълна В може да бъде всяка корективна структура</li> <li>• Зигзагът е структура 5-3-5</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Вълна В = 50%, 61.8%, 76.4% или 85.4% от вълна А</li> <li>• Вълна С = 61.8%, 100% или 123.6% от вълна А</li> <li>• Ако вълна С = 161.8% от вълна А, вълна С може да бъде вълна 3 от 5 вълнови импулса. По този начин, един от начините да се маркира между ABC и импулс е дали третата люлка има разширение или не</li> </ul> |

Таблица 1 .Равнинен модел

| ВИДОВЕ                 | НАСОКИ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | СЪОТНОШЕНИЕ НА ФИБОНАЧИ                                                                                                                |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Равнинна корекция      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Коригиращите 3 вълни се преместват с етикет ABC</li> <li>• Разделянето на вълни А и В е в 3 вълни</li> <li>• Разделението на вълната С е в 5 вълни импулс / диагонал</li> <li>• Разделянето на вълни А и В може да бъде във всяка коригираща 3 вълнова структура, включително зигзагообразно, плоско, двойно три, тройно три</li> <li>• Вълна В завършва близо до началото на вълна А</li> <li>• Вълна С обикновено завършва малко след края на вълната А</li> <li>• Вълната С трябва да има инерционна дивергенция</li> </ul>                                                                                                       | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Вълна В = 90% от вълна А</li> <li>• Вълна С = 61.8%, 100% или 123.6% от вълната АВ</li> </ul> |
| Разширяваща се равнина | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Коригиращите 3 вълни се преместват с етикет ABC</li> <li>• Разделянето на вълни А и В е в 3 вълни</li> <li>• Разделението на вълната С е в 5 вълни импулс / диагонал</li> <li>• Разделянето на вълни А и В може да бъде във всяка коригираща 3 вълнова структура, включително зигзагообразно, плоско, двойно три, тройно три</li> <li>• Вълна В на образец 3-3-5 завършва над началното ниво на вълна А</li> <li>• Вълна С завършва значително отвъд нивото на вълната А</li> <li>• Вълната С трябва да има инерционна дивергенция</li> </ul>                                                                                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Вълна В = 123.6% от вълна А</li> <li>• Вълна С = 123.6% - 161.8% от вълната АВ</li> </ul>     |
| Бягаща равнина         | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Коригиращите 3 вълни се преместват с етикет ABC</li> <li>• Разделянето на вълни А и В е в 3 вълни</li> <li>• Разделението на вълната С е в 5 вълни импулс / диагонал</li> <li>• Разделянето на вълни А и В може да бъде във всяка коригираща 3 вълнова структура, включително зигзагообразно, плоско, двойно три, тройно три</li> <li>• Вълна В на образец 3-3-5 завършва значително извън началното ниво на вълна А, както в разширена плоскост</li> <li>• Вълната С не успява да премине през цялото разстояние, като не достигне нивото, на което приключи В</li> <li>• Вълната С трябва да има инерционна дивергенция</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Вълна В = 123.6% от вълна А</li> <li>• Вълна С = 61.8% - 100% от вълната АВ</li> </ul>        |

Таблица 2. Триъгълник

| ВИДОВЕ                                                                                                                                                                                                      | НАСОКИ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>За мечи и бичи пазар:</p> <p>Възходящ (Ascending)</p> <p>Низходящ (Descending)</p> <p>Симетричен (Contracting /Symmetrical)</p> <p>Разширен (Expanding) или обратен симетричен (Reverse Symmetrical)</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Коригираща структура, обозначена като ABCDE</li> <li>• Обикновено се случва във вълна В или вълна 4</li> <li>• Разделено на три (3-3-3-3)</li> <li>• RSI също трябва да поддържа триъгълника във всеки времеви период</li> <li>• Подразделение на ABCDE може да бъде или abc, wxy, или flat</li> </ul> |

Таблица 3. Двойно три

| НАСОКИ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | СЪОТНОШЕНИЕ НА ФИБОНАЧИ                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Комбинация от две коригиращи структури, обозначени като WXY</li> <li>• Вълна W и подразделение на вълна Y могат да бъдат зигзагообразни, плоски, двойни три по-малки, или тройни по-малки</li> <li>• Wave X може да бъде всяка корективна структура</li> <li>• WXY е структура със 7 люлка</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Вълна X = 50%, 61.8%, 76.4%, или 85.4% от вълната W</li> <li>• Вълна Y = 61.8%, 100% или 123.6% от вълната W</li> <li>• Wave Y не може да премине 161.8% от вълната W</li> </ul> |

Таблица 4. Тройно три

| НАСОКИ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | СЪОТНОШЕНИЕ НА ФИБОНАЧИ                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Комбинация от три коригиращи структури, обозначени като WXYZ</li> <li>• Вълна W, вълна Y и подразделение на вълната Z могат да бъдат зигзагообразни, плоски, двойни три по-малки, или тройни три по-малки.</li> <li>• Wave X може да бъде всяка корективна структура</li> <li>• WXYZ е структура с 11 люлка</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Вълна X = 50%, 61.8%, 76.4%, или 85.4% от вълната W</li> <li>• Wave Z = 61.8%, 100% или 123.6% от вълната W</li> <li>• Wave Y не може да премине 161.8% от вълната W или може да стане импулсивна вълна 3</li> </ul> |

### Недостатъци на вълновата теория на Елиът

Вълновата теория на Елиът търпи известни критики. Един от недостатъците на теорията е, че разпознаването на вълните става със закъснение, като често има несъгласие между анализаторите в коя фаза се намира пазарът (Investor.BG, 2006). Освен това, на едни пазари теорията е по-трудно приложима, отколкото на други. На валутните пазари например може да се случи 5-3 моделът за една валута да представлява 3-5 модел за друга валута, участваща в отношението.

Друг недостатък касае 5-3 модела, за чието съществуване няма задоволително обяснение. Елиът допуска, че това е естествен закон и не отива по-далеч. Също така има случаи, които не могат да се опишат с тази формация.

Сложността при използването на теорията на Елиът идва от факта, че понякога е невъзможно да се прогнозира движението на цените, а могат само да се установят алтернативите и вероятностите (Elliott Wave Forecast Site, 2018).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата работа е направено проучване на вълновата теория на Елиът. Проучването показва, че тази теория дава важна информация на финансовите анализатори за откриване на най-ниско рисковите нива за влизане на пазара, като основните вълни определят дългосрочния тренд на пазара и съответно - малките вълни определят краткосрочните трендове. Показан е начин за изчисление за импулсивната и коригиращата вълна на Елиът в Excel. Обърнато е посвещено специално внимание на коригиращите вълни, като са разгледани пет вида коригиращи модели. Разгледана е връзката между вълновата теория на Фибоначи и Елиът. Посочени са основните недостатъци на вълновата теория на Елиът.

## REFERENCES

- Elana Trading Blog, <<https://blog.elana.net/2013/01/vulnova-teoriq-na-eliut-otkrivane-na-n/>>.
- Elliott Wave Forecast Site, <<https://elliottwave-forecast.com/elliottwave/next-best-trade-may-one-dont-take/>>.
- Investor.BG, <<https://www.investor.bg/strategii/127/a/vylnoviiat-princip-na-eliyt-36292/>>.
- Robert, R., & Prechter, Jr. (1994). *RN Elliott's Masterworks: The Definitive Collection*. New Classics.

FRI -2.203-SSS-FMI-02

---

## COMPARISON OF HEURISTIC ALGORITHMS IN SOLVING A SPECIFIC MODEL OF TRANSPORT PROBLEM USING MIXED INTEGER LINEAR PROGRAMING

---

**Tsvetelina Dimitrova**

Financial Mathematics Student

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: ts.kdimitrova96@gmail.com

**Assist. Ivan Georgiev, PhD**

Department of Applied Mathematics and Statistics

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: irgeorgiev@uni-ruse.bg

**Abstract:** *The Transport Method can easily give an optimal result for minimizing the costs for transport. The Classic method unfortunately, it is not quite practical in real life because there are always side factors. For every kind of institution which needs to transport their products there has to be a unique transport method to solve their problem. This report looks at a specific model of transport task. An often-used option for determining the cost value is analyzed. The optimization model used is related to solving a large-scale NP problem. An application was developed in Matlab to solve the task of the various algorithms under consideration with different amount of data. A comparison of different heuristic algorithms has been made to solve the specific task. For finding a fast and adequate solution to the problem, the heuristic method is proven to be efficient.*

**Key words:** transport problem, heuristic algorithms, MLP optimization, NP problem

### ВЪВЕДЕНИЕ

При ръководството на различни предприятия и фирми възникват проблеми с управлението на машините, суровините, финансите, големи групи от хора и други ресурси свързани с работата. Математическите методи, използвани за решаване на такива проблеми се наричат *количествени методи*. Един от тях е *Транспортната задача (ТЗ)*.

Всеки собственик на транспортен бизнес, е важно да запази разходите ниски. Ако не го направи, възможностите за намаляване на разходите и таксите може да излязат извън контрол и това да се отрази на състоянието на фирмата. Всеки превозвач има уникален набор от услуги и цени, така че е важно да се сравняват цените да се увери, че е взел възможно оптималното решение за своя бизнес. От своя страна всеки клиент свое проучване, за да намери подходящ превозвач, чийто услуги и ценообразуване пасват на нуждите му. Вземане на решение за тарифите за доставка е много важна част от поддържането на балансираны сметки, така че и клиентите да са удовлетворени.

Ако се определи стандартната ставка твърде ниска, съществува риск за непокриване на разходите, което е възможно да доведе до фалит. Ако се зададе фиксирана цена за доставка, която е твърде висока, има риск да се загубят клиенти, които не желаят да плащат за допълнителни такси.

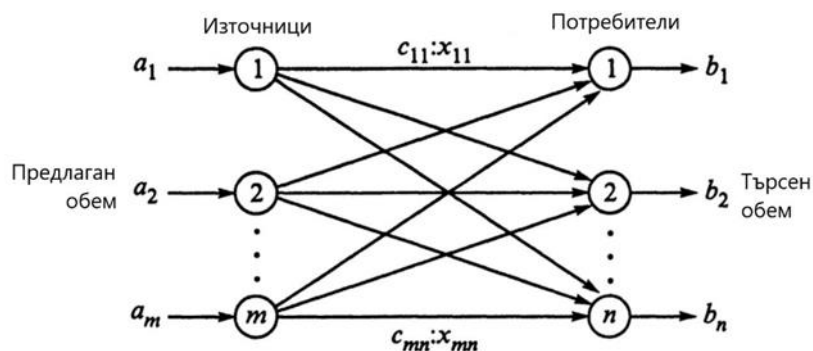
Има много различни начини да се определи каква такса за доставка трябва да се начисли. Разходите за транспорт са до голяма степен въз основа на теглото на една пратка и разстоянието. Един метод за намиране на подходяща цена за доставка, е да се определи средното тегло на пратките въз основа на теглото им.



В град Русе има различни куриерски фирми, всяка с няколко офиса. Анализът на проблема е направен на база няколко от работещите фирми в града. Съществуват много разнородни проблеми, които стоят за решаване от бранша, но основния е въпроса с оптимизацията на превозите (Catalog of transport and logistic companies).

## ИЗЛОЖЕНИЕ

Транспортната задача може да бъде представена чрез схема като във (Фиг. 1).



Фиг. 1

При класическата транспортна задача се минимизира функцията  $Z$  (Taha, Hamdy A., 2001, 2007, Stefan N., S. Oliver, W. Karl-Heinz, 2014, Hillier F. S., G. J. Lieberman, 2015):

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

при следните ограничения:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad \forall i = \overline{1..m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad \forall j = \overline{1..n} \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1..m}, \quad j = \overline{1..n} \end{aligned} \quad (2)$$

където със  $Z$  са означени общите транспортни разходи, с  $m$  е броя на източниците  $A_i$ , които предлагат количества  $a_i$ . Местоназначенията  $B_j$  са  $n$  на брой, които търсят количества  $b_j$ . Транспортните разходи за една разпределителна единица от  $i$ -тия източник до  $j$ -тото местоназначение са  $c_{ij}$ . С  $x_{ij}$  са означени неизвестните количества единици за превоз от  $i$ -тия източник до  $j$ -тото местоназначение.

В практиката класическата транспортна задача е почти неприложима. Реалните проблеми появяващи се при превоза на товари са обвързани с много повече фактори, част от които имат и вероятностен характер. Голяма част от тези вероятностни фактори трудно биха се предвидили. Също така всяка фирма и предприятие има и свои специфични особености и изисквания. Поради тази причина изграждане на общ прецизен математичен модел е невъзможно и всеки конкретен проблем следва да се моделира индивидуално според конкретните особености и специфика. Възниква въпроса, какви са причините за неприложимост на класическата ТЗ. Някои често срещани причини са:

•много от фирмите в сферата на транспорта и логистиката желаят да си осигурят „твърда“ цена на километър, независима от обема на превоза. Късите превози не са толкова доходоносни колкото дългите и за да се компенсират пропуснати ползи спрямо по-дълги курсове, се образува такава цена. Тази „твърда“ цена  $C_{ij}^0$ , за изминаване на единица разстояние от  $i$ -тия източник до  $j$ -тото местоназначение обикновено зависи от разстоянието  $K_{ij}$  между тях. При по-малки разстояния, тя обикновено е по-голяма.

•разходът на едно транспортно средство зависи от натовареността му. Колкото по-натоварено е превозното средство, толкова по-висок разход на гориво има то. Възможно е разходът на едно транспортно средство при максимално натоварване да се увеличи почти двойно. За това освен „твърдата“ цена на единица разстояние  $C_{ij}^0$ , за превозвачите е от интерес да се въведе и цена  $C_{ij}^1$  за всяка единица товар при изминаване на единица разстояние.

•Съществуват и много други фактори, които могат да повлияят на ценообразуването. Пример за такива фактори са:

- Риска за увреждане на товара, според вида му.
- Пътната мрежа – Различните пътни мрежи влияят различно на времето и разхода, като например населени места, магистрали и планински пътища.
- Климатичните условия – при зимно време разхода на превозното средство се увеличава.

Да се вземат под внимание всички фактори и да се конструира общ математичен модел е невъзможно не само поради огромното им количество, ами и поради факта, че част от тези фактори имат случаен и непредвидим характер. Настоящия математичен модел се формира на вече изброените три основни фактора -  $C_{ij}^0$ ,  $C_{ij}^1$ ,  $K_{ij}$ .

## МОДЕЛ ЗА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Въвеждат се следните означения използвани при математическия модел:

$A_i$  – източници,  $i = \overline{1..m}$

$B_j$  – местоназначения,  $j = \overline{1..n}$

$C_{ij}^0$  – "твърда" цена за изминаване на единица разстояние от  $i$ -тия източник до  $j$ -то местоназначение

$C_{ij}^1$  – цена за изминаване на единица разстояние от  $i$ -тия източник до  $j$ -то местоназначение, пропорционална на единица товар

$K_{ij}$  – единици разстояние от  $i$ -тия източник до  $j$ -то местоназначение

$X_{ij}$  – обема (товар, маса) превозен от  $i$ -тия източник до  $j$ -то местоназначение

$a_i$  – количество обем с което разполага  $i$ -ти източник

$b_j$  – количество обем необходимо да се достави в  $j$ -то местоназначение

$Z$  – общи разходи

При така въведените означения математическия модел се свежда до:

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Z_{ij} \quad (3)$$

при стандартните ограничения:

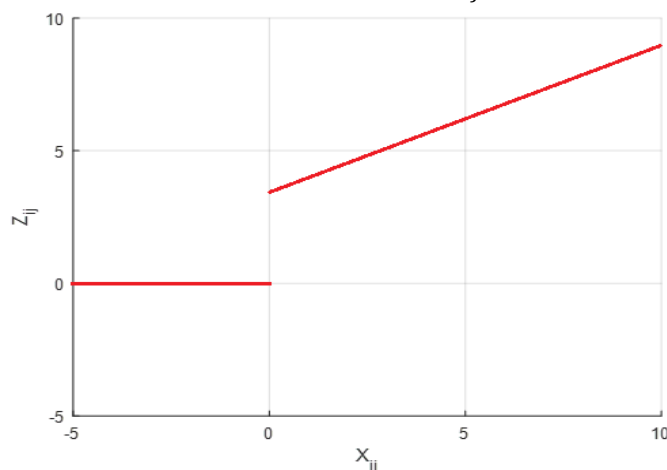
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n X_{ij} &= a_i, \quad \forall i = \overline{1..m} \\ \sum_{i=1}^m X_{ij} &= b_j, \quad \forall j = \overline{1..n} \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1..m}, \quad j = \overline{1..n} \end{aligned} \quad (4)$$

където

$$Z_{ij} = \begin{cases} K_{ij}(C_{ij}^0 + C_{ij}^1 X_{ij}), & X_{ij} > 0 \\ 0, & X_{ij} = 0 \end{cases}$$

т.е. ако се осъществи превоз от  $i$ -тия източник до  $j$ -тото местоназначение, то  $Z_{ij} \neq 0$  и нараства линейно. В противен случай  $Z_{ij} = 0$ .

Особеността тук е в прекъснатостта на компонентите  $Z_{ij}$ , на общия разход  $Z$  (фиг.2).



Фиг2. Графика на компонентата на разход  $Z_{ij}$

Поради прекъснатостта на  $Z_{ij}$ , директното прилагане на апарата на линейното програмиране не е възможен. За да се преодолее тази особеност, за всяка променлива  $X_{ij}$  се въвеждат бинарни променливи  $y_{ij}$  с условия:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако } X_{ij} > 0 \\ 0 & \text{ако } X_{ij} = 0 \end{cases}$$

Задача (3) се преформулира по следния начин:

$$\min Z = \sum_i \sum_j K_{ij} (C_{ij}^0 y_{ij} + C_{ij}^1 X_{ij}) \quad (5)$$

Ограничения (4) се запазват, но освен тях се налагат и допълнителни ограничения върху бинарните променливи:

$$X_{ij} \leq M y_{ij}, \quad i = \overline{1, \dots, m}, \quad j = \overline{1, \dots, n} \quad (6)$$

където  $M$  е много голямо число ( $M \gg 1$ ).

Така поставената задача (4)-(6) има следните особености:

- частично-целочислена задача на линейното оптимизиране
- задачата е възможно да придобие голяма размерност

Известно е, че частично-целочислените задачи в общия случай са NP-пълни задачи и тяхното точно решение е трудоемко и изисква голям изчислителен ресурс и време. Дори и при сравнително малък брой на източниците и местоназначенията, след въвеждане на бинарните променливи размерността на задачата се удвоява, т.е. броя на променливите е  $2mn$ , като половината от променливите са бинарни. Такъв тип задачи са често срещани в логистиката на всички видове транспорт. Те решават множество въпроси свързани с прикачвания, разписания, транспортиране на обеми и много други (Oliskevych M., 2018).

Възможни са следните подходи за решение:

- Класически - Branch and Bound и Метод на Гомори. Те са подходящи за задачи с малка размерност. Предимството им е, че дават точно решение. За големи задачи са неподходящи, защото може да отнеме неприемливо много време за изчисляване и голям ресурс от памет (Taha, Hamdy A., 2001, 2007, Hillier F. S., G. J. Lieberman, 2015).

- Евристични и вероятностни подходи – развитието на тези подходи през последните години даде възможност да се решават реални задачи с големи размерности. Характерно за тези алгоритми е, че са много по-бързи от класическите. Като всеки евристичен или

вероятностен алгоритъм обаче, решението не винаги е оптимално, но в повечето случаи е достатъчно задоволително (Dzhemal Topchu, V. Pencheva, Asen Asenov, Ivan Beloev, 2015).

- Невронни мрежи и изкуствен интелект (Fischetti M., J Jason, 2018) – в последно време тече бурно развитие на невронните мрежи и изкуствения интелект. Все повече проблеми станали достъпни благодарение на това развитие. Математическото оптимизиране в това отношение не прави изключение. Много оптимизационни задачи се решават посредством тях. И тук както и при евристичните алгоритми се цели достатъчно добро решение, а не точното. Това разбира се е за сметка на по-малкия изчислителен ресурс и време.

### ПРОГРАМНА РЕАЛИЗАЦИЯ

При реализирането на програмната имплементация, Matlab дава голяма възможност от избор на евристични подходи за решаване на частично-целочислени задачи. Използвайки тези подходи в Matlab е реализирана файл-функция за решение на задача (6)-(8) в (Приложение 1).

В случай на небалансирана транспортна задача, програмата автоматично я балансира. При решаване на задача с блокирани превози, съответният елемент в матрицата КМ на разстоянията се задава достатъчно голямо число, от порядъка на  $10^9$ .

Последните версии на Matlab (Matlab R2018) разполагат с голям набор от евристични техники за пресмятане на частично целочислени задачи. Към настоящия момент тези техники, с кратко описание са: 'basic' (default), 'intermediate', 'advanced', 'rins', 'rss', 'round', 'diving' (Matlab documentation).

### ЧИСЛЕНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Пример: Дадени са следните данни:

$$a = (2000; 1000) \quad b = (1100, 1500, 900) \\ K_{ij} = \begin{pmatrix} 195 & 285 & 310 \\ 50 & 405 & 480 \end{pmatrix} \quad C_{ij}^0 = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,75 & 0,74 \\ 0,85 & 0,72 & 0,70 \end{pmatrix} \quad C_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0,0702 & 0,0612 & 0,0587 \\ 0,0847 & 0,0492 & 0,0417 \end{pmatrix}$$

Решение в Matlab, с използване на евристичен подход:

(optimoptions('intlinprog', 'Heuristics', 'basic')):

$$Z = 39045.70047 \quad X = \begin{pmatrix} 100 & 1500 & 400 \\ 1000 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ с време за решаване: } 0.0425 \text{ секунди}$$

Вижда се, че солвърът се е справил за по-малко от 0.05 сек. Размерността на задачата, след балансиране бе с 18 променливи, 9 от които са бинарни.

Решение в Matlab, с използване Branch and Bound (Pavlov, V., I. Georgiev, 2012) без използване на евристичен подход:

$$Z = 39689.3 \quad X = \begin{pmatrix} 100 & 1500 & 400 \\ 1000 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ с време за решаване: } 0,7102 \text{ секунди}$$

Вижда се, че без използване на евристична техника времето за решение нарастна около 17 пъти.

В таблица е направено сравнение между времената за пресмятане с класическия Branch and Bound метод и някои евристични методи върху задачи с различна размерност (Таблица 1). От таблицата се вижда, че при използване на класическия Branch and Bound метод, без допълнителни техники, времената стават неприемливо големи дори и при сравнително малка размерност на задачата (70-80 променливи). Различните евристични подходи, при еднаква размерност на задачата, дават приблизително еднакви времена. Тези подходи, дори и при голяма размерност, дават времена много по-приемливи от класическия Branch and Bound метод.

| Размерност на задачата | 32      | 40       | 60        | 200    | 800    | 1800     |
|------------------------|---------|----------|-----------|--------|--------|----------|
| Branch and Bound       | 13.7659 | 145.8208 | 2100.4192 | -      | -      | -        |
| Евристичен: 'basic'    | 0.0760  | 0.0781   | 0.0586    | 0.0605 | 4.4012 | 105.7407 |
| Евристичен: 'advanced' | 0.0370  | 0.0636   | 0.0320    | 0.0593 | 4.3337 | 104.3405 |
| Евристичен: 'rss'      | 0.0235  | 0.0273   | 0.0377    | 0.0569 | 4.3746 | 110.2070 |

Таблица 5

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предимството на транспортните задачи, е че може да се приложи за всяка различна сфера свързани с превоз на стоки и при нужда да се изменя модела, за да се адаптира към всяка една ситуация и всеки различен фактор. Разгледан е математичен модел, който описва общите проблеми. Решаването на задачите произтичащи от модела се свежда до задача на смесеното целочислено линейно оптимизиране, което изисква голям ресурс от изчислителна памет и време. Реализирана е програма в среда Matlab, която дава възможност да се изберат различни евристични подходи за решение. Направено е сравнение между Branch and Bound метод и различни евристични подходи. Установено е, че при размерност над 70-80 променливи, Branch and Bound метода дава неприемливо време за решение (повече от 2 часа). За разлика от това разгледаните евристични методи, дови и при задачи с по-голяма размерност (около 1800 променливи) дава решение под 2 min. Евристичните подходи са много по-ефективни по параметър време, но не винаги дават оптимално решение, но достатъчно задоволително (3-5% разлика от оптималното).<sup>2</sup>

## REFERENCES

- Catalog of transport and logistic companies, <https://transportnaborsa.cargoagent.net>
- Taha, Hamdy A. (2001,2007), „Operations Research, An Introduction“, 2001, 2007
- Stefan N., S. Oliver, W. Karl-Heinz (2014), „Operations Research“, Copyright 2014, Copyright Holder „Springer-Verlag Berlin Heidelberg“, Softcover ISBN 978-3-642-54367-8, Series ISSN 0937-7433
- Hillier F. S., G. J. Lieberman (2015), „Introduction to Operations Research 10th Ed [2015]“, ISBN 978-0-07-352345-3, MHID 0-07-352345-3
- Olishevych M. (2018) „Optimization of periodic unitary online schedule of transport tasks of highway road trains“, Transport problems, 2018, Volume 13, Issue 1, pp. 111-122
- Dzhemal Topchu,V. Pencheva,Asen Asenov,Ivan Beloev (2015), „Mathematical model and methods for routing shipments of loads in small batches“. IN: Scientific forum Challenges in engineering and information science 2015, Sinaia, Romania. 2015. p. 10-15, ISBN 978-954-8483-35-3
- Fischetti M., J Jason (2018), “Deep neural networks and mixed integer linear optimization”, Copyright information: Springer Science + Business Media, LLC, part of Springer Nature 2018, Online ISSN 1572-9354, Print ISSN 1383-7133
- Matlab documentation, <https://www.mathworks.com/>
- Pavlov, V., I. Georgiev (2012), „Branch-and-Bound Technique in Economics“. // Journal of International Scientific Publications: Economy and Business, 2012, No 6, pp. 34-42, ISSN 1313-2555.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Файл-функция за решение на ТЗ

<sup>2</sup> Докладът/ статията отразява резултати от работата по проект No 2019 - ФПНО - 05, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

## BUTTERFLY SPREAD STRATEGY FOR OPTION TRADING<sup>3</sup>

---

**Mariela Kostova**

Financial Mathematics Student

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: marielakostova1996@abv.bg

**Assist. Prof. Iliyana Raeva, PhD**

Department of Applied Mathematics and Statistics

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: iraeva@uni-ruse.bg

**Abstract:** Options can provide traders and investors a tool for expressing different market opinions. Options can be used to make trades based on market direction or to collect premium. They can even be used to hedge risk on a long or short position in the underlying asset. Options trades can be very complicated or very simple. One of the simplest trades to learn is the butterfly spread. In this paper is shown the Butterfly Spread strategy which is a neutral strategy that is a combination of a bull spread and a bear spread. It is a limited profit, limited risk options strategy. There are 3 striking prices involved in a butterfly spread and it can be constructed using calls or puts.

**Key words:** options, butterfly spread, trading strategy

### ВЪВЕДЕНИЕ

Съвременните пазари предлагат много богати възможности за инвестиране. Една от тях са опциите. Те са вид производни ценни книжа, чиято цена зависи от цената на други, базови по отношение на тях инструменти.

Опцията е договор, който дава право на купувача, но не и задължението да купи или продаде даден актив (суровини, ценни метали, акции, валути, индекси и т.н) на дадена цена и с определен падеж. От другата страна, продавачът е длъжен да изпълни задълженията си по опцията, ако купувачът го изисква, за което получава премия. Опциите са контракти със стандартизиран срок на валидност, цена на упражняване и др. Опциите се търгуват на валутните и на извънборсовите пазари. Има два основни вида опции – *Call* и *Put* опции. *Call* опцията дава правото да се купи актив с определени цена и падеж, като цената която се плаща се нарича премия. *Put* опцията дава правото да се продаде актив на определена цена и падеж.

Търговията на финансовите пазари е бизнес, при който процесите се случват много по-бързо. Доходността от тях може да е налице още същия ден, а не след месеци или повече. Тази търговия е по-скоро наука, която се движи по определени закони, с точно определени моменти за сключване на сделка, а правенето на анализ е важна част за успешната търговия. Всеки, който иска да се впусне в трейдинга, трябва да има стратегия, бизнес план и силна психика.

Стратегията е търговска тактика, която трябва да бъде тествана и статистически доказана, че носи доходност. За да се създаде такава, са нужни познания относно терминологията в трейдинга, както и правилата, по които се движат пазарите. Колкото по-проста стратегия се избира, толкова по-добре. Стратегията може да бъде тествана както в реално време, така и назад в миналото.

Бизнес планът е следващата стъпка към успешен трейдинг. Стратегията за него трябва да се подбере или състави. Той трябва да описва търговския подход и метода за управление на парите.

---

<sup>3</sup> Докладът/статията отразява резултати от работата по проект № 2019 – ФПНО – 05, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет.

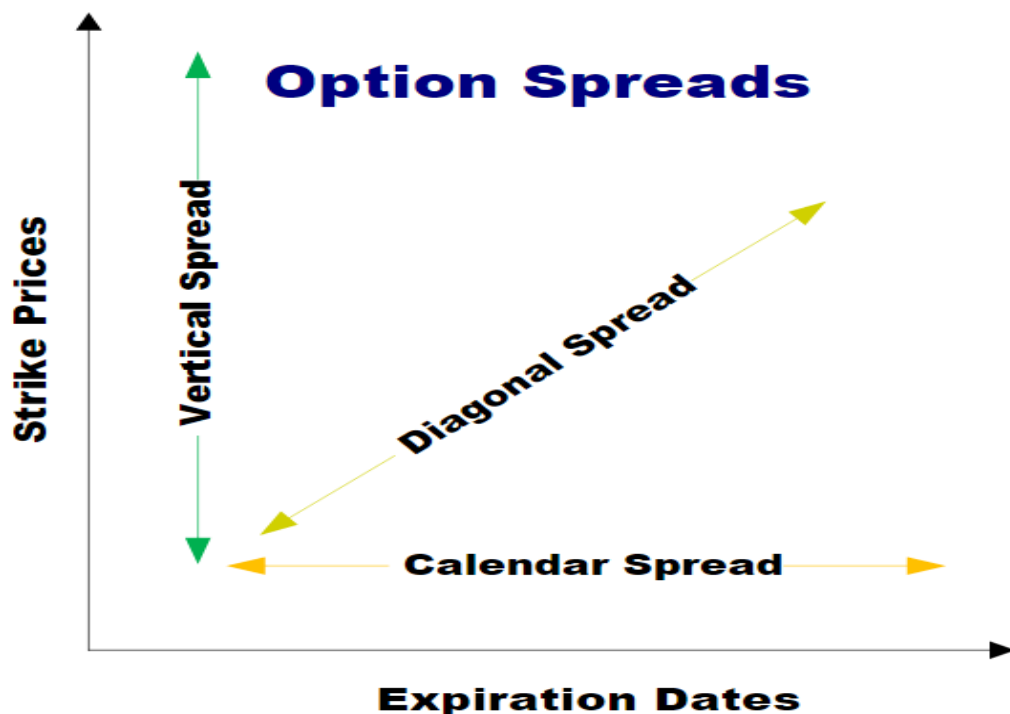
## СТРАТЕГИИ

Тъй като цените на опциите зависят от цените на базисните им ценни книжа, опциите могат да се използват в различни комбинации, за да печелят с намален риск, дори и на безрискови пазари. Всеки инвеститор трябва да има предвид рисковете, които са по-сложни, отколкото при обикновените опции върху акции, данъчните последици, изискванията за маржин и комисионите, които трябва да бъдат платени. Няма стратегия, която да предоставя на инвеститора перфектните условия за максимална печалба. Рискът и възвръщаемостта са правопрпорционални. Ако стратегията предполага по-висок риск, печалбата от нея би следвало да е по-голяма. При ограничен риск, аналогично и печалбата ще бъде лимитирана.

## СПРЕД

Терминът спред има различни значения във финансите. Общото между тях е, че той е разликата между две цени. Може да се отнася до разликата в търгуваната позиция – къса и дълга. Обикновено се използва при търговия на опции и фючърси. Спреда на опции се извършва чрез покупка или продажба на различни комбинации на кол и пут опции с различни страйкови цени и падежи на един и същ базов актив. По този начин се елиминира рискът от загуба, ако пазарът е преценен неправилно. Съществуват много варианти на спред, но могат най-общо да се класифицират по следния начин:

- Вертикален спред (паричен)
- Времеви спред (календарен)
- Диагонален спред



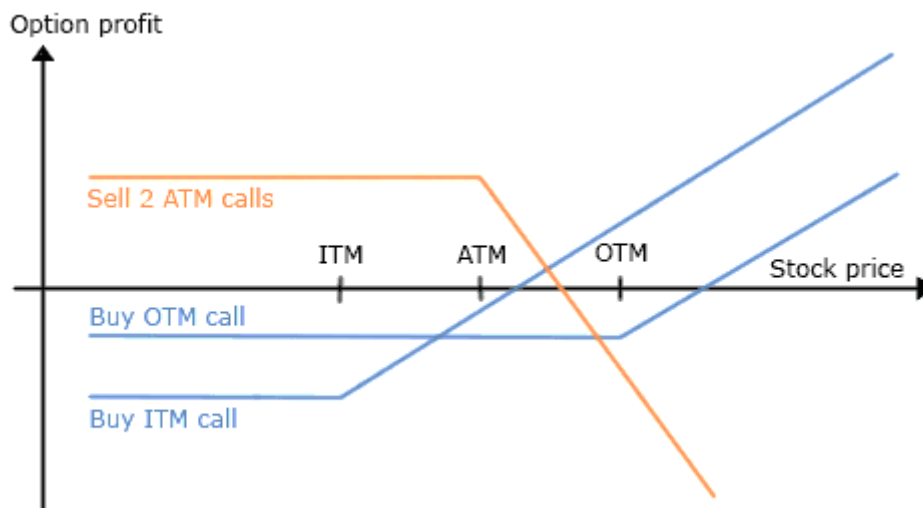
Фиг. 1 Спред

Фиг. 1 описва различните видове спред. Вертикалният спред съдържа покупка и издаване на опции с различни страйкови цени, но с еднакви падежни дати. Времевият спред съдържа покупка и издаване на опции с различни падежи и с еднакви страйкови цени. При диагоналния спред падежите и страйковите цени са различни.

## BUTTERFLY SPREAD

Butterfly опциите се използват заради ограничения риск. Това предполага, че печалбата също ще бъде лимитирана. Тази стратегия е предназначена за пазар с ограничени възможности.

Butterfly спреда се състои от кол опции или от пут опции с 3 последователни страйк цени. Двете междинни опции имат една и съща страйк цена и позиция, къса или дълга, която е противоположна на външните страйкове. Butterfly спреда носи името си от формата на графиката, където двете вътрешни опции се считат за тялото на пеперудата, докато външните опции се считат за крила.



Фиг.2 Butterfly Spread (Online Option Trading Guide)

На Фиг. 2 е показан Butterfly Spread създаден от кол опции. Тези опции са от вида във пари (In-The-Money), на пари (At-The-Money) и извън пари (Out-of-The-Money).

За кол опциите, които са в пари е характерно, че цената на актива в сегашния момент е по-голяма от страйковата цена на опцията. Цената на опцията е по-висока заради по-големия шанс за печалба от нея. За опциите, които са на пари е присъщо цената на актива да е приблизително равна на страйковата цена на опцията. Извън пари е когато цената на актива е по-малка от страйковата цена на опцията.

Използването на кол и пут опции има един и същ профил на печалба / риск. Затова изборът на вида на спреда ще зависи от текущите пазарни цени на опциите. Търговецът трябва да избере опциите така, че цената на опцията в дълга позиция да донесе най-малка загуба. Опцията в къса позиция трябва да бъде на по-висока цена, за да се постигне максимална печалба.

Дали Butterfly е в дълга или къса позиция се отразява в позицията на външните опции: ако търговецът е дълг във външните опции и къс във вътрешните опции, то това е дълг Butterfly; в противен случай той е къс.

Комисионната такса може да окаже значително въздействие върху общата печалба или загуба при Butterfly Spread. Това е таксата, която всеки търговец плаща на брокера си, за да осъществява сделки. При Butterfly Spread се заплащат по-високи комисионни такси, защото се купуват 4 отделни опции.

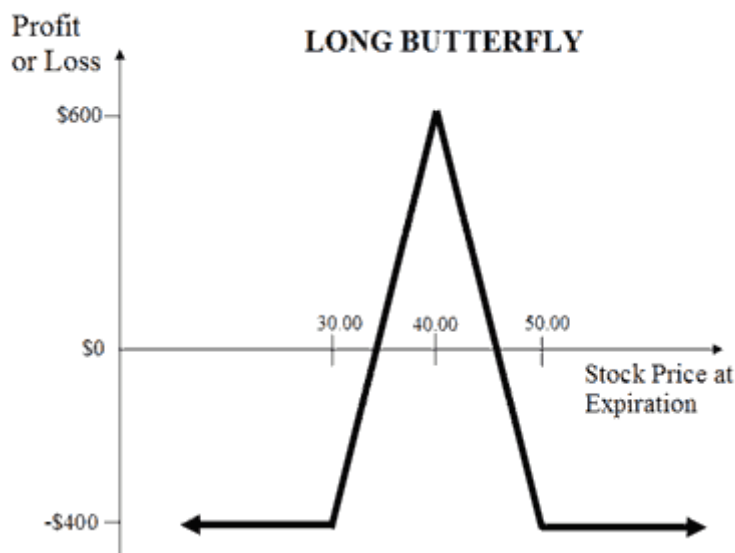
Промени, които търговците могат да използват в някои случаи:

- Ако цената на актива се е увеличила и очакванията са да продължи да расте, могат да се купят отново късите кол позиции, а дългите да се задържат.
- Ако цената на актива е паднала и се очаква да намалява, то тогава се продават дългите кол позиции, а се оставят късите.



### LONG BUTTERFLY SPREAD

При Long Butterfly се закупуват крилата и се продава тялото на пеперудата. При Long Call Butterfly, дългият по-нисък кол обикновено е ITM, който се компенсира от цената на 2 средни кол опции, които се продават. За да се ограничи потенциалният риск от двете къси позиции, друг по-дълъг кол се купува при по-висока страйкова цена. При Long Butterfly най-високият страйк е OTM, докато най-ниският страйк е купен, за да компенсира риска от вътрешните къси позиции.



Фиг. 3 Long Butterfly Spread (Online Option Trading Guide)

Максималната печалба се получава, когато цената на акцията е равна на цената на вътрешния кол при изтичане. Ако цената на акциите е по-ниска от вътрешните кол опции, то дългият по-нисък кол или ще спечели по-малко или нищо; ако цената на акциите е по-висока, тогава късите вътрешни кол опции ще намалят печалбата, спечелена от дългия кол, докато цената е равна на най-високия кол. След това двете кратки кол опции компенсират двата дълги кола.

Максимален риск:

- Ограничен до размера на нетната премия за кол опциите (може да се загубят 100% от инвестираната сума)

Повратни точки:

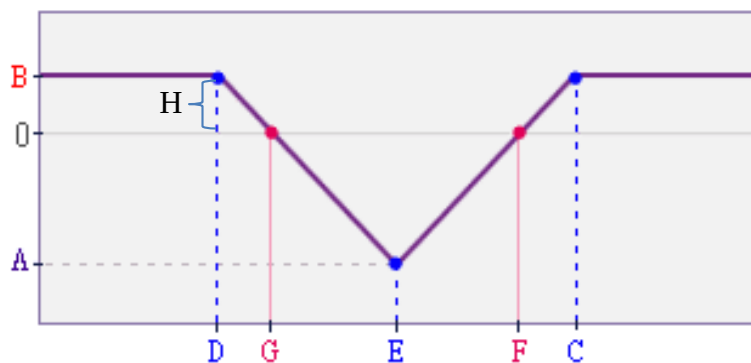
- Горна точка = По-високият страйк, който е по-малък от нетната премия
- Долна точка = По-ниският страйк, който е по-голям от нетната премия

Тази стратегия е предпочитана, когато до падежната дата на опциите остава около месец. Така шансът за грешка е по-малък.

На Фиг.3 е изобразена графиката на дълъг Butterfly Spread от пример с дадени страйкови цени – \$30, \$40, \$50, покупка на опции за \$1100 и \$100, както и продажба на 2 опции с цена \$400<sup>3</sup>.

### SHORT BUTTERFLY

Short Butterfly не е неутрална консервативна стратегия за разлика от Long Butterfly. Инвеститорите, които използват тази стратегия, са рискофоби. Покупката и продажбата на опциите трябва да се случва едновременно. Short Butterfly се установява чрез продажба на двете външни опции (ITM и OTM) и закупуване на двете вътрешни опции, които са ATM (Online Short Call Butterfly Spread Guide).



Фиг. 4 Short Butterfly Spread

Фиг. 4 описва късия Butterfly Spread с:

- A – Максимална загуба
- B – Максимална печалба
- C – Най-висока страйк цена
- D – Най-ниска страйк цена
- E – Цена на продажба
- F – Най-висока точка на прекъсване
- G – Най-ниска breakeven point
- H – Нетна печалба (=B)

Максималната печалба се получава, когато цената на акцията надхвърли най-високата страйкова цена или когато падне под най-ниската на датата на изтичане.

Ако опцията изтече в най-ниската страйкова цена, всички останали изтичат безполезно и инвеститорът запазва първоначалното си вложение, с което е закупил правото си да търгува.

Ако опцията изтича с цена еднаква с най-високата страйкова цена, то тя изтича безполезно, а печалбата от двете дълги кол позиции се компенсира от загубата от късите кол позиции.

$$\text{Максимална печалба} = \text{Нетна премия} - \text{Комисионна такса}$$

Максимална печалба :

- Цената на акцията е по-ниска от най-ниската страйкова цена
- Цената на акцията е по-висока от най-високата страйкова цена

Максимална загуба е налице когато на падежа цената на акцията е останала непроменена. На тази цена единствено опцията с най-ниска страйк цена ще изтече ITM. Търговецът ще се наложи да откупи отново кол опцията на същата цена. Ако на падежа цената на акцията е по-висока от средната страйкова цена, то е налице загуба. Максимална загуба имаме когато цената на акцията е равна на страйка на Long Call опциите.

$$\text{Максимална загуба} = \text{Страйк на Long Call} - \text{Страйк на най-малката къса позиция} - \text{Нетна премия} + \text{Комисионна такса}$$

Повратни точки:

- Горна точка = Страйкова цена на най-високия Short Call – Нетната премия
- Долна точка = Страйкова цена на най-ниския Short Call + Нетната премия

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изборът на стратегия за инвестиране в ценни книжа е важна част от професията на търговците на финансовите пазари. Всеки инвеститор има различно ниво на рискофобия, което го отличава от другите. Butterfly Spread е стратегия за рискоизбягващите инвеститори, защото границите на риск и печалба са ясно означени. Тази стратегия се използва на пазари, където цените на акциите не се променят драстично, а това е допълнително предимство за инвеститорите, които не са склонни да рискуват. Butterfly Spread е стратегия, която позволява на търговеца да се застрахова срещу голяма загуба.

#### REFERENCES

Butterfly Spread by Option Trading Guide

<http://www.option-trading-guide.com/butterfly-trading.html>

Online Option Trading Guide

<http://www.theoptionsguide.com/butterfly-spread.aspx>

Online Short Call Butterfly Spread Guide

<https://www.investopedia.com/terms/b/butterflyspread.asp>

FRI -2.203-SSS-FMI-04

---

## ANALYSIS OF THE MOVEMENT OF INTEREST RATES FOR THE NONFINANCIAL ORGANIZATIONS' CREDITS FOR THE PERIOD 2013 – 2018<sup>4</sup>

---

**Elif Fikret – Student**

Financial Mathematics

University of Ruse “Angel Kanchev”

E-mail: elif96@abv.bg

**Asst. Prof. Dr. Petar Penchev**

Department of Economics

University of Ruse “Angel Kanchev”

E-mail: ppenchev@uni-ruse.bg

**Abstract:** *Analysis of the movement of interest rates for the nonfinancial organizations' credits for the period 2013 - 2018: In this article the interest of nonfinancial companies for using credits is considered. It is made an analysis whether businesses are attracted to getting loans (credits) in order to improve their production and capacity.*

**Key words:** *interest rate, nonfinancial organizations, credits, tendency of credits*

### ВЪВЕДЕНИЕ

С настъпването на 21. век технологиите започват да се развиват с много бърз темп. Това кара всеки собственик на предприятие да инвестира все повече. За да бъде това постижимо, предприятията започват да теглят все повече кредити от финансовите институции в различна валута. Като част от Европейския съюз България трябва да поддържа икономически растеж, което означава, че трябва да се придържа към стратегия на активен инвестиционен оборот, което спомага за доближаването ѝ към съвременните европейски производствени стандарти (Bulgarian Academy of Sciences). За определянето на интересът към тегленото на кредитите много голямо значение имат банковото и финансовото състояние на фирмата, както техният опит, така и нагласите на собствениците на предприятията спрямо банковата и финансовата система.

Този анализ показва поведението и нагласите на кредитополучателите, а именно нефинансовите предприятия за периода 2013 – 2018 г. в кредитния пазар. Проведен е на база данни, предоставени от Българска народна банка (БНБ) и се взима под внимание лихвеният процент на банковите кредити спрямо валутата, в която те се теглят.

### ИЗЛОЖЕНИЕ

Целта на настоящият анализ е да се изследва движението на размера на отпуснатите кредити от финансови институции към нефинансови предприятия за периода 2013 – 2018 г. Наличната информация е взета от сайта на Българска Народна Банка (БНБ). За тази цел ще използваме Microsoft Excel, с който данните ще бъдат обработени. Те ще бъдат разгледани по количествени категории в лева (BGN), в евро (EUR) и в чужда валута (USD), взети от сайта на Българска Народна Банка (БНБ) (Bulgarian National Bank).

В следващата таблица 1. Данните за кредитите по количествени категории от БНБ са представени за периода 2013 – 2018г.

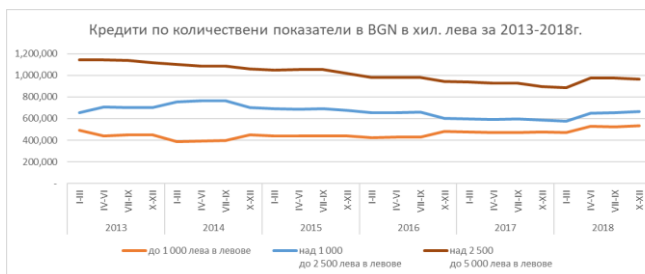
---

<sup>4</sup> Докладът/статията отразява резултати от работата по проект № 2019 – ФПНО – 05, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет.

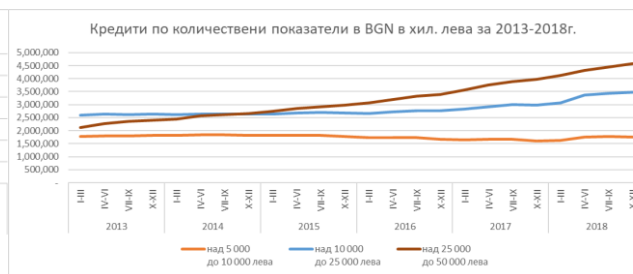
Ще групираме данните според валутата, в която са кредитите. Първо ще разгледаме движението на обема на кредитите от финансови към нефинансови институции в български лева (BGN) за периода 2013-2018 г. (Таблица 2.), разпределени по тримесечия.

Таблица 7. Размер на изтеглените кредити в български лева

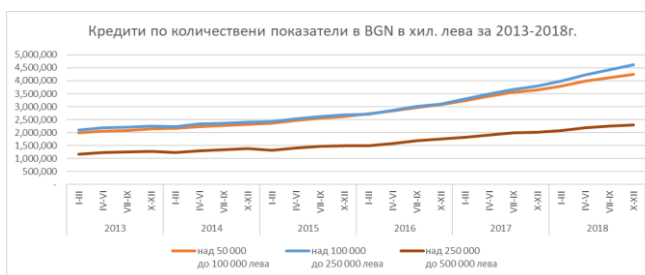
На следващите графики ще покажем движението на обема на изтеглените кредити от нефинансови предприятия за разглеждания период.



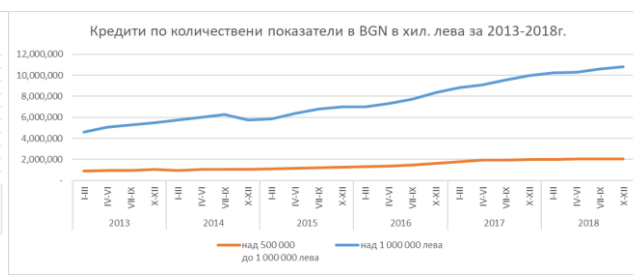
Фигура 2. Кредити в размер 1 000 – 5 000 лв.



Фигура 3. Кредити в размер 5 000 – 50 000 лв.



Фигура 4. Кредити в размер 50 000 – 500 000 лв.



Фигура 5. Кредити в размер над 500 000 лв.

За периода 2013 – 2018 г. на фигура 1. се наблюдава леко увеличение на кредитите в размер до 1 000 лв., докато при тези в размер от 1 000 до 2 500 лева и от 2 500 до 5 000 лева се наблюдава спад в нуждата на нефинансовите предприятия.

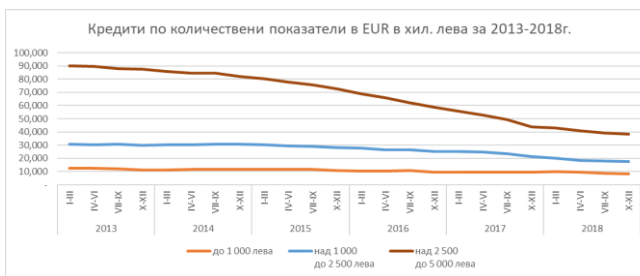
На следващата фигура 2. се наблюдава повишаване на интереса на предприятията към кредити по-големи по обем. Докато при кредитите в размер 5 000 – 10 000 лева е постоянен.

Колкото по-голямо е едно производство, толкова по-голям интерес предизвикват кредитите над 50 000 лева, както е показано на фигури 3. и 4.

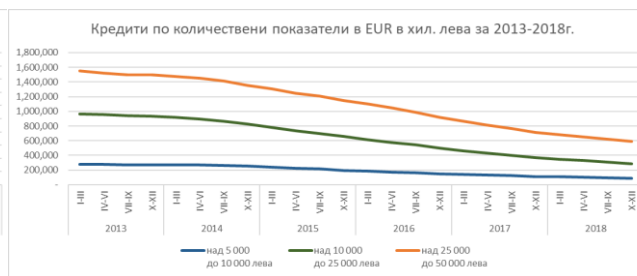
Таблица 8. Размер на изтеглените кредити в евро (EUR)

| Кредити на нефинансови предприятия по количествени категории и икономически дейности за периода 2013 - |            |               |          |           |           |           |            |            |            |             |             |             |                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|--------------------|
| Година                                                                                                 | Тримесечие | Мерна единица | до 1 000 | над 1 000 | над 2 500 | над 5 000 | над 10 000 | над 25 000 | над 50 000 | над 100 000 | над 250 000 | над 500 000 | над 1 000 000 лева |
|                                                                                                        |            |               | в евро   | в евро    | в евро    | в евро    | в евро     | в евро     | в евро     | в евро      | в евро      | в евро      | в евро             |
| 2013                                                                                                   | I-III      | хил. лв.      | 12,296   | 30,746    | 90,118    | 278,720   | 962,843    | 1,552,889  | 2,405,462  | 2,732,799   | 1,691,428   | 1,833,009   | 21,174,457         |
|                                                                                                        | IV-VI      | хил. лв.      | 12,292   | 30,466    | 89,419    | 276,732   | 952,712    | 1,520,606  | 2,398,298  | 2,689,017   | 1,701,176   | 1,809,352   | 20,553,892         |
|                                                                                                        | VII-IX     | хил. лв.      | 12,031   | 30,532    | 87,864    | 273,338   | 943,064    | 1,500,885  | 2,359,779  | 2,630,593   | 1,666,276   | 1,761,479   | 20,517,838         |
|                                                                                                        | X-XII      | хил. лв.      | 11,181   | 29,940    | 87,553    | 273,222   | 933,023    | 1,495,070  | 2,349,784  | 2,597,464   | 1,653,102   | 1,712,707   | 20,385,896         |
| 2014                                                                                                   | I-III      | хил. лв.      | 11,390   | 30,143    | 85,799    | 270,078   | 918,078    | 1,476,450  | 2,316,548  | 2,526,915   | 1,576,757   | 1,717,880   | 20,650,322         |
|                                                                                                        | IV-VI      | хил. лв.      | 11,462   | 30,183    | 84,517    | 265,960   | 893,310    | 1,450,835  | 2,270,325  | 2,470,137   | 1,550,382   | 1,695,082   | 20,683,803         |
|                                                                                                        | VII-IX     | хил. лв.      | 11,786   | 30,903    | 84,461    | 261,204   | 866,732    | 1,414,654  | 2,190,716  | 2,375,744   | 1,514,955   | 1,653,115   | 20,545,120         |
|                                                                                                        | X-XII      | хил. лв.      | 11,653   | 30,547    | 82,146    | 251,759   | 824,770    | 1,354,500  | 2,100,875  | 2,293,191   | 1,418,002   | 1,557,139   | 16,487,883         |
| 2015                                                                                                   | I-III      | хил. лв.      | 11,672   | 30,088    | 80,120    | 238,398   | 783,196    | 1,303,314  | 2,021,241  | 2,197,355   | 1,369,040   | 1,531,122   | 16,265,272         |
|                                                                                                        | IV-VI      | хил. лв.      | 11,604   | 29,504    | 77,914    | 223,464   | 736,845    | 1,248,146  | 1,949,988  | 2,124,790   | 1,323,228   | 1,517,820   | 15,660,624         |
|                                                                                                        | VII-IX     | хил. лв.      | 11,447   | 29,110    | 75,713    | 212,455   | 699,380    | 1,207,680  | 1,881,610  | 2,060,731   | 1,284,847   | 1,449,819   | 15,320,452         |
|                                                                                                        | X-XII      | хил. лв.      | 10,759   | 28,260    | 72,546    | 196,670   | 655,113    | 1,149,282  | 1,797,009  | 1,974,104   | 1,227,932   | 1,409,292   | 14,780,373         |
| 2016                                                                                                   | I-III      | хил. лв.      | 10,480   | 27,780    | 68,739    | 186,128   | 613,937    | 1,099,254  | 1,740,603  | 1,890,757   | 1,207,444   | 1,368,307   | 14,385,636         |
|                                                                                                        | IV-VI      | хил. лв.      | 10,238   | 26,480    | 66,063    | 174,172   | 575,639    | 1,044,392  | 1,658,786  | 1,810,884   | 1,170,730   | 1,293,850   | 14,363,888         |
|                                                                                                        | VII-IX     | хил. лв.      | 10,714   | 26,442    | 62,172    | 164,743   | 541,213    | 987,300    | 1,565,351  | 1,725,827   | 1,117,297   | 1,283,363   | 14,053,463         |
|                                                                                                        | X-XII      | хил. лв.      | 9,600    | 25,262    | 58,711    | 151,160   | 500,507    | 917,816    | 1,460,895  | 1,600,594   | 1,031,693   | 1,220,961   | 13,684,065         |
| 2017                                                                                                   | I-III      | хил. лв.      | 9,547    | 25,309    | 55,554    | 140,129   | 463,034    | 864,512    | 1,369,197  | 1,515,740   | 999,289     | 1,221,042   | 13,279,922         |
|                                                                                                        | IV-VI      | хил. лв.      | 9,328    | 24,590    | 52,543    | 129,273   | 428,964    | 814,293    | 1,287,592  | 1,439,363   | 973,998     | 1,157,935   | 13,205,896         |
|                                                                                                        | VII-IX     | хил. лв.      | 9,405    | 23,647    | 49,271    | 121,233   | 399,854    | 765,253    | 1,208,568  | 1,375,123   | 930,311     | 1,142,775   | 13,211,797         |
|                                                                                                        | X-XII      | хил. лв.      | 9,564    | 21,450    | 43,832    | 112,770   | 368,359    | 713,779    | 1,115,486  | 1,268,513   | 873,670     | 1,088,717   | 12,708,415         |
| 2018                                                                                                   | I-III      | хил. лв.      | 10,057   | 20,282    | 42,939    | 105,750   | 348,235    | 681,363    | 1,070,892  | 1,228,504   | 884,255     | 1,092,523   | 12,706,402         |
|                                                                                                        | IV-VI      | хил. лв.      | 9,426    | 18,564    | 40,719    | 99,588    | 326,821    | 650,400    | 1,014,808  | 1,178,713   | 869,092     | 1,069,007   | 13,043,450         |
|                                                                                                        | VII-IX     | хил. лв.      | 8,827    | 17,958    | 39,189    | 93,855    | 307,441    | 621,148    | 960,924    | 1,128,910   | 845,246     | 1,052,302   | 13,211,872         |
|                                                                                                        | X-XII      | хил. лв.      | 8,296    | 17,558    | 38,266    | 88,640    | 286,046    | 588,799    | 901,068    | 1,068,041   | 820,642     | 982,636     | 13,330,998         |

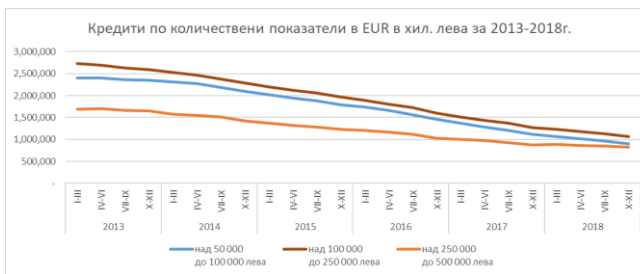
Нека разгледаме кредитите, изтеглени от нефинансови предприятия за периода, в евро (EUR), представени в таблица 3. разпределени отново по тримесечия.



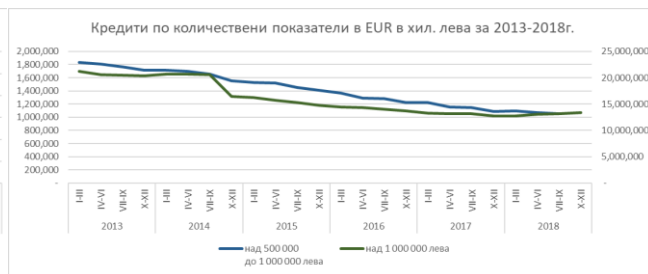
Фигура 6. Кредити в размер до 5 000 евро



Фигура 7. Кредити в размер до 50 000 евро



Фигура 8. Кредити в размер до 500 000 евро



Фигура 9. Кредити в размер над 500 000 евро

За разлика от изтеглените кредити в български лева, при тези в евро (таблицы 5. – 8.) се наблюдава спад при всеки тип кредити без значение какъв е размерът му.

Сега ще разгледаме обема на изтеглените кредити от нефинансови предприятия в щатски долари (USD) за периода 2013 – 2018 г.

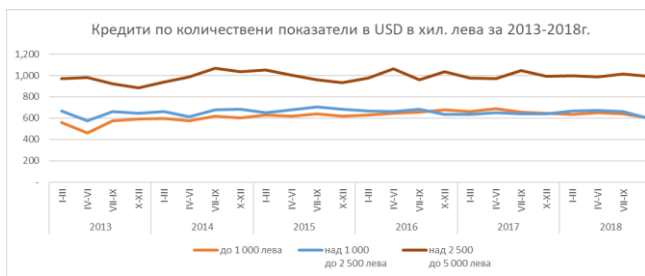
Таблица 9. Размер на изтеглените кредити в щатски долари (USD)

| Кредити на нефинансови предприятия по количествени категории и икономически дейности за периода 2013-2018г. |            |               |               |          |                    |          |                    |          |                     |          |                      |          |                      |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------|---------------|----------|--------------------|----------|--------------------|----------|---------------------|----------|----------------------|----------|----------------------|----------|-----------------------|----------|------------------------|----------|------------------------|----------|--------------------------|----------|--------------------|----------|
| Година                                                                                                      | Тримесечие | Мерна единица | до 1 000 лева |          | над 1 000 до 2 500 |          | над 2 500 до 5 000 |          | над 5 000 до 10 000 |          | над 10 000 до 25 000 |          | над 25 000 до 50 000 |          | над 50 000 до 100 000 |          | над 100 000 до 250 000 |          | над 250 000 до 500 000 |          | над 500 000 до 1 000 000 |          | над 1 000 000 лева |          |
|                                                                                                             |            |               | в долари      | в долари | в долари           | в долари | в долари           | в долари | в долари            | в долари | в долари             | в долари | в долари             | в долари | в долари              | в долари | в долари               | в долари | в долари               | в долари | в долари                 | в долари | в долари           | в долари |
| 2013                                                                                                        | I-III      | хил. лв.      | 557           | 669      | 971                | 1,527    | 6,219              | 18,052   | 43,542              | 75,496   | 43,133               | 49,066   | 869,277              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | IV-VI      | хил. лв.      | 461           | 572      | 983                | 1,500    | 5,778              | 17,865   | 42,461              | 73,991   | 40,108               | 41,221   | 861,724              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | VII-IX     | хил. лв.      | 574           | 663      | 919                | 1,423    | 5,442              | 17,424   | 41,606              | 73,495   | 40,310               | 41,139   | 845,155              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | X-XII      | хил. лв.      | 593           | 647      | 886                | 1,421    | 5,342              | 16,998   | 40,890              | 71,826   | 37,200               | 36,941   | 754,204              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | I-III      | хил. лв.      | 599           | 660      | 939                | 1,459    | 5,266              | 16,870   | 41,760              | 73,160   | 37,773               | 41,426   | 823,282              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
| 2014                                                                                                        | IV-VI      | хил. лв.      | 572           | 615      | 989                | 1,474    | 5,124              | 16,362   | 40,961              | 70,331   | 38,893               | 49,242   | 843,464              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | VII-IX     | хил. лв.      | 616           | 675      | 1,066              | 1,466    | 5,168              | 15,768   | 38,639              | 65,422   | 42,322               | 51,766   | 914,671              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | X-XII      | хил. лв.      | 603           | 685      | 1,036              | 1,378    | 5,153              | 15,090   | 36,904              | 67,109   | 41,228               | 43,648   | 587,593              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | I-III      | хил. лв.      | 627           | 649      | 1,049              | 1,571    | 4,100              | 13,448   | 33,394              | 78,975   | 52,849               | 52,686   | 672,242              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | IV-VI      | хил. лв.      | 619           | 679      | 1,005              | 1,449    | 4,530              | 12,917   | 30,002              | 79,879   | 40,533               | 54,307   | 637,025              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
| 2015                                                                                                        | VII-IX     | хил. лв.      | 642           | 702      | 957                | 1,402    | 4,618              | 12,266   | 28,795              | 74,782   | 40,544               | 44,151   | 625,459              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | X-XII      | хил. лв.      | 617           | 685      | 932                | 1,396    | 4,442              | 11,394   | 29,898              | 75,158   | 44,836               | 42,670   | 599,864              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | I-III      | хил. лв.      | 629           | 666      | 974                | 1,216    | 4,248              | 10,675   | 27,927              | 75,843   | 50,060               | 39,180   | 591,895              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | IV-VI      | хил. лв.      | 646           | 659      | 1,062              | 1,149    | 3,963              | 9,685    | 26,988              | 73,484   | 47,317               | 38,417   | 572,528              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | VII-IX     | хил. лв.      | 656           | 683      | 960                | 1,251    | 3,928              | 9,364    | 26,068              | 72,065   | 49,231               | 35,161   | 566,034              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
| 2016                                                                                                        | X-XII      | хил. лв.      | 680           | 635      | 1,036              | 1,176    | 3,522              | 8,797    | 25,006              | 74,330   | 48,829               | 39,967   | 539,686              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | I-III      | хил. лв.      | 663           | 632      | 974                | 1,271    | 3,610              | 8,464    | 24,203              | 74,787   | 49,062               | 43,939   | 526,342              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | IV-VI      | хил. лв.      | 686           | 652      | 968                | 1,067    | 3,615              | 8,489    | 22,864              | 72,336   | 44,466               | 40,614   | 443,105              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | VII-IX     | хил. лв.      | 656           | 641      | 1,048              | 1,182    | 3,776              | 8,581    | 23,011              | 70,027   | 44,129               | 32,630   | 381,992              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | X-XII      | хил. лв.      | 643           | 641      | 994                | 1,157    | 3,949              | 8,316    | 23,031              | 68,407   | 36,330               | 36,724   | 387,542              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
| 2017                                                                                                        | I-III      | хил. лв.      | 636           | 668      | 995                | 1,160    | 3,795              | 8,921    | 26,403              | 67,000   | 37,173               | 33,388   | 443,793              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | IV-VI      | хил. лв.      | 650           | 671      | 989                | 1,155    | 3,663              | 8,309    | 22,893              | 63,595   | 36,857               | 34,469   | 503,000              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | VII-IX     | хил. лв.      | 639           | 662      | 1,015              | 1,175    | 3,482              | 7,645    | 20,261              | 60,818   | 36,006               | 30,807   | 489,946              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | X-XII      | хил. лв.      | 600           | 595      | 994                | 1,066    | 3,200              | 6,825    | 18,595              | 54,837   | 31,276               | 36,188   | 482,771              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | I-III      | хил. лв.      | 636           | 668      | 995                | 1,160    | 3,795              | 8,921    | 26,403              | 67,000   | 37,173               | 33,388   | 443,793              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
| 2018                                                                                                        | IV-VI      | хил. лв.      | 650           | 671      | 989                | 1,155    | 3,663              | 8,309    | 22,893              | 63,595   | 36,857               | 34,469   | 503,000              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | VII-IX     | хил. лв.      | 639           | 662      | 1,015              | 1,175    | 3,482              | 7,645    | 20,261              | 60,818   | 36,006               | 30,807   | 489,946              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | X-XII      | хил. лв.      | 600           | 595      | 994                | 1,066    | 3,200              | 6,825    | 18,595              | 54,837   | 31,276               | 36,188   | 482,771              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | I-III      | хил. лв.      | 636           | 668      | 995                | 1,160    | 3,795              | 8,921    | 26,403              | 67,000   | 37,173               | 33,388   | 443,793              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |
|                                                                                                             | IV-VI      | хил. лв.      | 650           | 671      | 989                | 1,155    | 3,663              | 8,309    | 22,893              | 63,595   | 36,857               | 34,469   | 503,000              |          |                       |          |                        |          |                        |          |                          |          |                    |          |

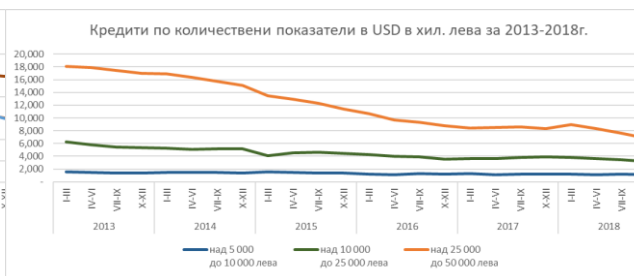
Като третата най-употребявана парична единица във финансовите сделки по света ще разгледаме американския щатски долар (USD).

На фигура 9. се вижда, че движението на обема на изтеглените кредити от предприятията е сравнително стабилен във времето, въпреки спадовете и покачванията. При кредитите в размер до 1 000 лв. и тези от 2 500 до 5 000 лв. едва забележимо покачване, докато при кредитите в размер от 1 000 до 2 500 лв. тенденцията е отрицателна, много близка до нулата (-0,089432).

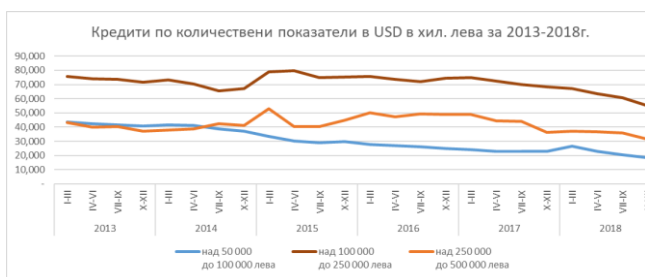
Трайно е намаляването на теглене на кредити и в размер от 5 000 до 500 000 лв., както се вижда на фигури 10. и 11. На фигура 12. се наблюдават сериозни колебания в движението на обема изтеглени кредити през периода 2013 – 2018 г., но въпреки е налице спад в търсенето и изтеглянето на кредитите от нефинансови предприятия.



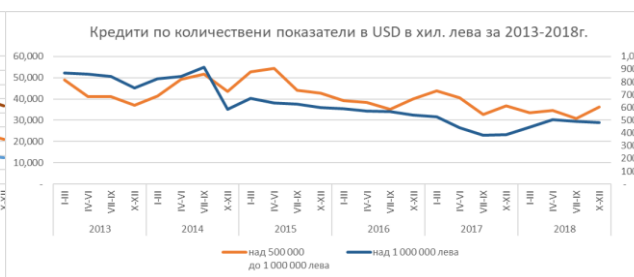
Фигура 10. Кредити в размер до 5 000 долара



Фигура 11. Кредити в размер до 50 000 долара



Фигура 12. Кредити в размер до 500 000 долара



Фигура 13. Кредити в размер над 500 000 долара

## ИЗВОДИ

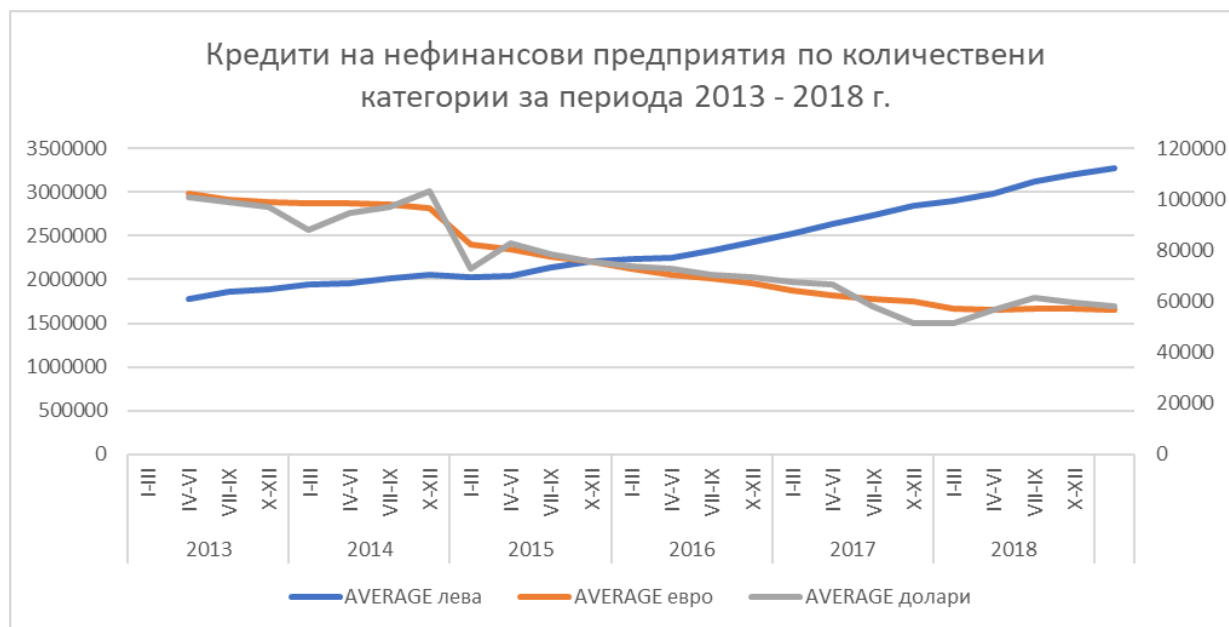
Нека направим сравнение на изтеглените кредити в различните валути за разглеждания период, тъй като те са представени в левовата им равностойност. За тази цел ще се намери средната стойност на обемите на кредитите за всяко тримесечие и по този начин ще получим средната база за сравнение през годините на трите валути (таблица 5.).



Таблица 10. Сравнение на обема на кредитите спрямо валутата, в която са изтеглени (BGN, EUR, USD)

| Кредити на нефинансови предприятия по количествени категории и икономически дейности за периода 2013 -2018г. |            |               |                 |                 |                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| Година                                                                                                       | Тримесечие | Мерна единица | AVERAGE<br>лева | AVERAGE<br>евро | AVERAGE<br>долари |
| 2013                                                                                                         | I-III      | хил. лв.      | 1,775,725       | 2,978,615       | 100,774           |
|                                                                                                              | IV-VI      | хил. лв.      | 1,857,010       | 2,912,178       | 98,788            |
|                                                                                                              | VII-IX     | хил. лв.      | 1,893,339       | 2,889,425       | 97,105            |
|                                                                                                              | X-XII      | хил. лв.      | 1,938,768       | 2,866,267       | 87,904            |
| 2014                                                                                                         | I-III      | хил. лв.      | 1,951,290       | 2,870,942       | 94,836            |
|                                                                                                              | IV-VI      | хил. лв.      | 2,019,022       | 2,855,091       | 97,093            |
|                                                                                                              | VII-IX     | хил. лв.      | 2,060,088       | 2,813,581       | 103,416           |
|                                                                                                              | X-XII      | хил. лв.      | 2,024,874       | 2,401,133       | 72,766            |
| 2015                                                                                                         | I-III      | хил. лв.      | 2,039,716       | 2,348,256       | 82,872            |
|                                                                                                              | IV-VI      | хил. лв.      | 2,134,418       | 2,263,993       | 78,450            |
|                                                                                                              | VII-IX     | хил. лв.      | 2,208,479       | 2,203,022       | 75,847            |
|                                                                                                              | X-XII      | хил. лв.      | 2,240,291       | 2,118,304       | 73,808            |
| 2016                                                                                                         | I-III      | хил. лв.      | 2,248,190       | 2,054,460       | 73,028            |
|                                                                                                              | IV-VI      | хил. лв.      | 2,336,935       | 2,017,738       | 70,536            |
|                                                                                                              | VII-IX     | хил. лв.      | 2,432,315       | 1,957,990       | 69,582            |
|                                                                                                              | X-XII      | хил. лв.      | 2,524,684       | 1,878,297       | 67,606            |
| 2017                                                                                                         | I-III      | хил. лв.      | 2,634,706       | 1,813,025       | 66,722            |
|                                                                                                              | IV-VI      | хил. лв.      | 2,739,924       | 1,774,889       | 58,079            |
|                                                                                                              | VII-IX     | хил. лв.      | 2,838,478       | 1,748,840       | 51,607            |
|                                                                                                              | X-XII      | хил. лв.      | 2,903,298       | 1,665,869       | 51,612            |
| 2018                                                                                                         | I-III      | хил. лв.      | 2,984,543       | 1,653,746       | 56,721            |
|                                                                                                              | IV-VI      | хил. лв.      | 3,118,636       | 1,665,508       | 61,477            |
|                                                                                                              | VII-IX     | хил. лв.      | 3,205,204       | 1,662,516       | 59,314            |
|                                                                                                              | X-XII      | хил. лв.      | 3,270,128       | 1,648,272       | 57,904            |

Тези резултати ще изобразим на фигура 13. И ще проследим движението на размера на изтеглениите кредити.



Фигура 14. Усреднени стойности на изтеглените кредити за периода 2013 - 2018 г.

За улеснение на анализа и за по-добра яснота, усреденото движение на размера на кредитите в долари USD (сивата линия) е представено с допълнителна (вторична) скала от дясната страна на графиката. Търсенето на кредити от нефинансовите предприятия в български лева (BGN) се е увеличило с течение на времето. За разлика от кредитите в български лева, търсенето на кредитите в евро EUR и щатски долари USD е спаднало. Това може да се дължи на разликата в лихвените проценти при различните типове кредити и предприятията да са взели решение на база тях.

## REFERENCES

Bulgarian National Bank

<http://www.bnb.bg/Statistics/StMonetaryInterestRate/StDepositsAndCredits/StDCQuarterlyData/index.htm?forYear=2018>

Bulgarian Academy of Sciences (2017). Institute of economic researches. 'Shape, Dynamics and Perspectives of the Credit Activity in Bulgaria', Sofia

WED-2.203-SSS-FM-05

---

## BLACK-SCHOLES METHOD FOR PRICING A EUROPEAN PUT OPTION<sup>5</sup>

---

**Nikoleta Kirilova**

Financial Mathematics - Student

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: nikoletakirilova1996@abv.bg

**Assoc. Prof. Iliyana Raeva, PhD**

Department of Applied Mathematics and Statistics

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: iraeva@uni-ruse.bg

**Abstract:** *This article presents an idea for a specific application of the Black-Scholes model for pricing an insurance policy by considering it as a European put option (as a document entitling the client to sell to the insurer the financial asset held by the client when the insurance event occurred). The idea of such an application is based on the fact that considering the policy as a put option is possible whenever the subject of the insurance is stock (share) subject to demand and supply on the financial market. Then the policy may also be the subject of demand and supply together with the insured asset. Such opportunities in industrial insurance are innumerable, making the idea necessary and expedient. The paper concludes with a numerical example and a discussion on the possible applications of the formulated problem.*

**Keywords:** *Black-Scholes model, European put option*

### ВЪВЕДЕНИЕ

На финансовия пазар един от най-важните проблеми е определянето на премиума на дадената опция. Първият прецизиран модел за определяне на равновесната стойност на опциите е моделът на Блек-Шолс за оценяване на опции, който през последните тридесет години се използва като база за създаването на компютърни програми за оценяване на опции и деривативи. Уравнението на Блек-Шолс прави същите предположения като биномния модел: предполага се, че цената на актива има нормално логаритмично разпределение и дисперсията е пропорционална на времето.

### ПРЕДСТАВЯНЕ НА МОДЕЛА

#### Основни предположения [1,6];

- Съществува поне един рисков актив, наричан базов, и безрисков актив, най-често облигация с нулев купон;
- Нормата на възвращаемост на безрисковия актив е константа;
- Цената на базовия актив следва геометрично Брауново движение;
- Базовият актив не изплаща дивидент (въпреки, че в случай на непрекъснат дивидент промяната в параметрите е тривиална), както и допусканията върху пазара;
- Не съществува арбитражна възможност, т.е. сигурен безрисков доход не е възможен – това води до по-нататъшни предположения, че всички участници на пазара имат равен и неограничен достъп до цялата информация по всяко време;
- Пазарът е без триене - т.е. не съществуват транзакционни такси;

---

<sup>5</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 17.05.2019 в секция FM1 с оригинално заглавие на български език: БЛЕК-ШОЛС МОДЕЛ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЕВРОПЕЙСКА ПУТ ОПЦИЯ.

- Може да се заемат или отдават под наем пари във всяко количество на една и съща лихва – безрисковата норма;
- Базовият актив може да се купува или продава във всяко количество;
- Също така, индивидуалното търгуване не влияе на движенията на пазара.

### Същност на модела [5,6]

При постоянни коефициенти  $r$  и  $\sigma$ , моделът на Блек-Шолс изглежда така:

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dW_t$$

където:

$S$ -Цената на разглеждания актив;

$r$  – безрисков лихвен процент,  $r > 0$ ;

$\sigma$ - волаталитет (параметър описващ несигурността),  $\sigma > 0$ ;

$dW_t$ - нарастванията на Гаус-Винеров процес (процес с независими нараствания)

При рисково-неутрална формулировка, отново при постоянни коефициенти  $r$  и  $\sigma$ , ценовият процес  $S_t$  на разглеждания актив е дефиниран по следния начин, :

$$S_t = S_0 * e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t},$$

където:

$W_t$  - Брауново лутане с очакване 0 и дисперсия  $\sigma^2 t$

$S_0$  – начална цена на дадения актив (предварително определена)

Използваме това, че дисперсията на Винеровия процес е линейно адитивна (в математиката адитивна функция е тази, която съдържа в себе си суми. Нарича се още линейна) и получаваме следната формула, :

$$S_{t+\delta t} = S_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\delta t}\right),$$

където:

$\varepsilon \sim N(0,1)$  т.е.  $\varepsilon$  е случайно число генерирано от нормално разпределение,

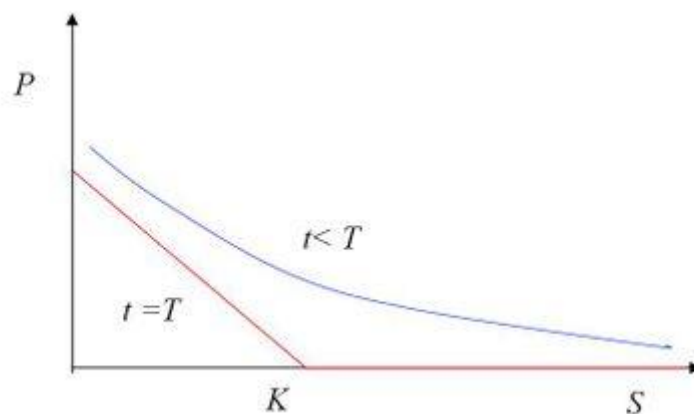
$\delta t$  е малък интервал от време.

### ПРИЛОЖЕНИЕ НА МОДЕЛА НА БЛЕК-ШОЛС ЗА ЦЕНООБРАЗУВАНЕ НА ЗАСТАХОВАТЕЛНА ПОЛИЦА, РАЗГЛЕЖДАНА КАТО ПУТ-ОПЦИЯ [4]

Нагледно е представена застрахователна полица, разглеждана като пут-опция. Ценообразуването на тази полица е представено на фиг. 1. По ординатната ос е нанесена цената  $P$  на пут-опцията (правото на продажба), а по абсцисата – пазарната цена на финансовия актив  $S$ . Разплащателната (payoff) графика на пут-опцията е представена с червена линия. На тази графика съответства разплащателната (payoff) функция от формулата:

$$P_{payoff} = \max(K - S, 0)$$

Със синя линия е представено пазарното ценообразуване на полицата (в зависимост от текущата пазарна цена на финансовия актив) в даден момент  $t$  преди застрахователното събитие в деня (падажа).



Фигура 1. Ценообразуване на застрахователна полица

От написаното по-горе следва, че смисълът на застраховането при изпълнение на модела е следния: Ако в датата на застрахователното събитие (падежът на полицата), пазарната цена на застрахования актив е по-ниска от цената на упражняване  $K$ , клиентът има интерес да упражни своето право да продаде своя актив на застрахователя. От своя страна застрахователят е длъжен да купи актива на споменатата цена. Така клиентът получава от застрахователя сумата  $P_{\text{payoff}}$ , като формално описаната покупко-продажба остава скрита в термина застрахователна полица. Последната очевидно олицетворява правото на клиента да продаде скъпо и купи евтино своя финансов актив, а застрахователят се задължава да изпълни това на датата  $T$ . Поради тази причина е предвидена премия (в термините на пут-опция) на полицата, която се изплаща предварително от клиента на застрахователя, а разплащателната цена се дава от застрахователя на клиента в деня на застрахователното събитие. Така при изтичане срока на полицата клиентът (застрахователят) реализира печалба (загуба) равна на  $\max(K-S, 0)$ . Относителният размер на опционната премия най-често представлява от 3 до 5% от стойността на потенциалната сделка.

### Зависимост между премията (пут-кол паритет)

За определяне на зависимостта между пут и кол опциите, ще използваме класическите означения [3]:

$S$ -цената на актива;

$t$ -начален момент;

$K$ -страйкова цена, цена на упражняване;

$r$ -лихвен процент;

$\sigma$  ( $\sigma$ ) - волатилност;

$\tau = T - t$  – времето от началния момент  $t$  до падежа  $T$  (оставащият живот на опцията/матуритет);

$N(x)$ - функцията на разпределение (cumulative distribution function) на стандартното нормално разпределение

$e = 2,71828...$  (неперово число).

Нека към въведените по-горе означения прибавим още символи, които ще използваме при формулиране на определени зависимости:

$C$ – стойността на европейска Call опция за покупка на акции;

$c$  – стойността (цената) на американска Call опция за покупка на акции;

$P$ – стойността на европейска Put опция за продажба на акции;

$p$  – стойността на американска Put опция за продажба на акции.

Следните формули за оценка на Европейска кол и пут опция в момент  $t$  и цена  $S$  на разглеждания актив, изведени от Блек и Шолс, са [5]:

$$C = S * N(d_1) - K * e^{-r*(T-t)} * N(d_2) \quad (1)$$

където:

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

$$P = K * e^{-r*(T-t)} * N(-d_2) - S * N(-d_1), \quad (2)$$

където

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3)$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

(4)

Ако отбележим с  $C(S,t)$  и  $P(S,t)$ , съответно премиума на кол и пут опция, пресметнати съответно по формулите (1) и (2), можем да забележим зависимост между премиумите  $C(S,t)$  и  $P(S,t)$ , която е известна в икономиката като **пут-кол паритет** (put-call parity) [5]:

$$C(S,t) = S - K * e^{-r*(T-t)} + P(S,t)$$

Функцията на печалба в случай на обикновена Европейска ванилова кол опция има следни вид:

$$C = \max(S - K, 0)$$

В случай на Европейска ванилова пут-опция, формулата изглежда така:

$$P = \max(K - S, 0). \quad (5)$$

Ще пресметнем премиума на Европейска пут опция по модела на Блек-Шолс при следните конкретни данни:

Страйкова цена 40€;

Настоящата цена на дадения актив е 42€;

Падежът на опцията е пет месеца;

Лихвеният процент е 10%;

Волатилността е 20%.

Изчисляването се осъществява чрез програмата MATLAB, като функцията  $bsfp(S,t,K,r,sigma,T)$  приема параметрите  $S$ ,  $t$ ,  $K$ ,  $r$ ,  $sigma$  и  $T$  и връща цената на Европейската пут опция. Вградената функция  $erf(x)$  пресмята функцията на разпределение  $N(x)$  на стандартното нормално разпределение  $N(0,1)$ . Функцията  $erf(x)$  е известна като функция на грешката.

Например:

$$P = bsfp(42,0,40,0.1,0.2,0.5) = 0.8086$$

```

function P = bsfp(S,t,K,r,sigma,T)
% Формула на Блек-Шолс за премиума на пут опция
% Black-Scholes formula for a European put option
tau=T-t; % живот на опцията от началния момент t
% до падежа T (датата на изпълнение).
if tau > 0
% Пресмятане на параметъра d1 от формула(2):

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

d1 = (log(S/K) + (r+0.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau));
%Пресмятане на параметъра d2 от формула(3):

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

d2 = d1 - sigma*sqrt(tau);
%Пресмятане на N(d1) и N(d2) във формула:

$$V(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

N1 = normcdf(-d1); %N1 = 0.5*(1+erf(-d1/sqrt(2)));
N2 = normcdf(-d2); %N2 = 0.5*(1+erf(-d2/sqrt(2)));
% Команда disp("") извежда текста от скобите й.
disp('Премиумът на Европейската пут опция е:')
V(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)
% Пресмятане на формула на Блек-Шолс
P= K*exp(-r*tau)*N2-S*N1
% премиум на пут опция
else
P= max(K-S,0);
% функция на печалба на пут опция
end

```

Опциите от Американски вид могат да се упражняват във всеки момент преди датата на изпълнение (падежа) на опцията.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценяването на опциите цели да бъде определена тяхната теоретична, справедлива стойност във всеки един момент от живота на опцията. Това е сред най-важните въпроси за инвеститорите на борсовите пазари. Установяването на „честна“ пазарна цена на опциите е задължителна предпоставка за успешното прилагане на търговски и портфейлни стратегии с опции.

Тази безспорна значимост на проблема за оценката на опциите е предизвикала сериозен научен интерес към неговото решаване. В резултат от това са разработени няколко модела за оценка на опции – те се позовават в различна степен на математически, статистически, вероятностен и графичен инструментариум. Но тези модели, независимо от различията

пόμεжду си, вземат под внимание в една или друга степен изброените по-горе фактори, оказващи влияние върху опционната цена /премия/ [3].

***This paper contains results of the work on project No 2019 - FNSE – 05, financed by „Scientific Research” Fund of Ruse University.***

#### REFERENCES

[1] СБОРНИК ДОКЛАДИ на СТУДЕНТСКА НАУЧНА СЕСИЯ – СНС'17, Русенски Университет, Печатна База, Русе, 2017

[2] URL: [https://fin.unibit.bg/images/pdf/magistri/R\\_Denchev\\_007\\_fiz.pdf](https://fin.unibit.bg/images/pdf/magistri/R_Denchev_007_fiz.pdf)

[3] URL: <http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp/6.1/6.1-21.pdf>

[4]URL:

[http://basaga.org/wiki/index.php?title=%D0%9C%D0%B5%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%BD\\_%D0%A8%D0%BE%D0%BB%D1%81](http://basaga.org/wiki/index.php?title=%D0%9C%D0%B5%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%BD_%D0%A8%D0%BE%D0%BB%D1%81)

[5] URL: <http://eudaimonia-production.com/wp-content/uploads/2016/04/Last19SepMilevRak.pdf>

[6] Black F., M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, J. Polit. Econ., 81(3), 1973, pp. 637-654



WED-2.203-SSS-FM-06

---

## AN ANALYSIS ON PRICES OF ASSETS OF FOUR AMERICAN BANKS FROM 'THE BIG FOUR' ACCORDING TO THEIR INDEX STANDARD & POOR'S 500<sup>6</sup>

---

**Virginia Centeno – Student**

Financial Mathematics

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: v.centeno1516@gmail.com

**Assist. Dr. Elitsa Raeva**

Department of Applied Mathematics and Statistics

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

**Abstract:** *An Analysis on Prices of Assets of Four American Banks from 'The Big Four' according to their Index Standard & Poor's 500:* In this paper an algorithm Capital Asset Pricing Model (CAPM) is considered and it is examined whether there is a relation between the historic events and the moving of the prices of S&P 500. It is based on the Harry Markowitz idea of investment diversification. Firstly, some notes on CAPM and its elements are made. The concept of covariation and correlation between the financial tools is introduced. The proposed algorithm is illustrated with an experiment, which data come from the historic data of the assets' prices of four banks in United States of America. Finally, some important notes are briefly mentioned as well as the comments on the derived results.

**Key words:** Capital Assets Pricing Model, Markowitz model, covariation, correlation, systematic risk, The Big Four in US, Great Depression in 2008.

### ВЪВЕДЕНИЕ

Светът става все по-модерен и хората започват да се интересуват все повече от инвестиционните възможности, т.е. парите стават все по-важно пособие за един инвеститор. Чрез използването на математически модел за оценка на капиталовите активи (CAPM) ще се извърши предварителна преценка за възвращаемостта на активите на четири банки. Обект на изследване са цените на активите на четирите американски банки, наречени 'The Big Four'. Тази четворка държи 39% от американските потребителски депозити за 2015 година и се състои от: JPMorgan Chase & Co., Bank of America, Citigroup Inc. и Wells Fargo.

Най-голямата банка от 'The Big Four' е J.P. Morgan Chase & Co. Тя е мултинационална инвестиционна банка и финансова компания, както и най-ценната в света по пазарен капитал. Като банка, която е част от 'Bulge Bracket', тя е основен източник на инвестиционно банкиране и финансови услуги. Създадена е през 1799г. от Арън Бър и е 31-вата най-стара банка в Съединените щати и най-голямата банка в Америка и в света.

Втората най-голяма банка в Америка 'Bank of America' е създадена през 1944г. от Амадео Джанини в Сан Франциско, носеща името 'Bank of Italy'. В началото, основната цел на банката е била да служи на хората от работническата класа и особено на италианците и имигрантите. През 1994г. банката придобива Continental Illinois National Bank of Chicago и три години по-късно се слива с Bank of Nations и става една от най-големите банки в Америка.

Част от 'Bulge Bracket' е и Citigroup Inc. Създадена е през 1998г. като е сформирана от сливането на банковия гигант Citicorp и финансовия конгломерат Travellers Group след около 180-годишна история с капитал в размер на \$ 2 млн., наречена Citi Bank of New York. Това е третата по големина банка в Съединените американски щати.

---

<sup>6</sup> Докладът/статията отразява резултати от работата по проект № 2019 – ФПНО – 05, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет.

Мултинационалната финансова компания Wells Fargo е четвъртата по големина банка по пазарен капитал в света и четвърта по обем на активи в САЩ. Wells Fargo е основана през 1852г. от Хенри Уелс и Уилям Фарго.

Като част от The Big Four финансови институции, а именно банки, за Съединените щати, трябва да се обърне внимание и на техният размер. Те държат 39% от размера на американските депозити. В таблица 1. са представени низходящ ред четирите банки по размер на активите. Настоящите данни са към декември 2018г.

**Таблица 11.** Big Four, подредени по възходящ ред според размера на активите им

|                 | Общи приходи            | Годишен нетен приход   | Общ капитал           | Активи                |
|-----------------|-------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| JP Morgan       | <b>\$ 109,029 млрд.</b> | <b>\$ 32,474 млрд.</b> | \$ 256,52 млрд.       | <b>\$ 2,623 трлн.</b> |
| Bank of America | \$ 91,94 млрд.          | \$ 28,14 млрд.         | <b>\$264,74 млрд.</b> | \$ 2,325 трлн.        |
| Citigroup       | \$ 72,854 млрд.         | \$18,080 млрд.         | \$ 197 млрд.          | \$ 1,917 трлн.        |
| Wells Fargo     | \$ 86,40 млрд.          | \$ 22,39 млрд.         | \$ 197,06 млрд.       | \$ 1,895 трлн.        |

Разглеждайки движението на цените на активите на тези четири банки и базовия им индекс Standard & Poor's 500 за периода 01.01.2000 – 31.12.2018г., ще проследим как те се изменят през времето според случилите се събития, отразяващи се на финансите и икономиката на Съединените американски щати.

## ИЗЛОЖЕНИЕ

Целта на настоящата работа е да се провери какво е влиянието на движението на цените на активите на четирите банки върху индекса Standard and Poor's 500 (S&P 500) и дали имат връзка помежду си. Данните за всяка банка са взети от информационната платформа Worldwide Financial Market Trading Platform за периода 01.01.2000 - 31.12.2018 г. на дневна база за всяка една година по отделно. За тази цел се използва моделът за оценка на капиталовите активи (МОКА) и данните се обработват с Microsoft Excel.

## МОДЕЛ ЗА ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИТЕ АКТИВИ (Capital Asset Pricing Model)

Разглеждайки идеята за Линията на капиталовите пазари, може да се направи заключение, че капиталовите пазари показват линейна зависимост между риска и доходността. МОКА е моделът, показващ зависимостта между систематичния риск  $\beta$  на един актив и очакваната от него възвращаемост, и по-точно от акциите. Той може би е най-разпространеният метод във финансовите сфери за определяне цената на рискови ценни книжа и за определяне на очакваната възвращаемост на активите като се взима под внимание рискът, който носят тези активи и размера на капитала. CAPM се основава на модела на Марковиц като прави някои нови допускания: съществуват безрискови активи; вземане на заеми при безрискова ставка; къси продажби на рискови активи. Основните принципи на модела са: капиталовите пазари са в равновесие; всички инвеститори анализират наличната информация еднакво; информацията е напълно свободна и всички имат един и същ достъп до нея (Angelova, V. & Agre, G., 2000). В същността на модела стои идеята за риска (волатилността при възвращаемостта) и печалбата (очакваната норма на възвращаемост). Инвеститорите винаги се целят да постигат възможно най-висока възвращаемост при възможно най-ниска волатилност (Bodie, Zvi, Marcus, A. J. & Kane, A., 2000). Методът се представя чрез уравнението на линията на капиталовия пазар (1):

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_i, \quad (1)$$

където

- $E(r_i)$  - очакваната норма на възвращаемост на i-тия актив;
- $r_f$  - нормата на възвращаемост на безрисковия актив;
- $E(r_m)$  - очакваната норма на възвращаемост на пазара;
- $\beta_i$  - показател за системния риск;
- $(E(r_m) - r_f)$  - пазарна рискова премия.

Във формулата нормата на възвращаемост на безрисковия актив  $r_f$  отчита времевата стойност на парите, докато другите елементи отчитат допълнителния риск, поет от инвеститорите. За един инвеститор тази стойност представлява лихвата (размера на възвращаемостта, печалбата), която той очаква от една напълно безрискова инвестиция (Online Platform of the Institute of Corporate Finances). Безрисковата ставка е всъщност минималната ставка, която инвеститорът очаква за всяка инвестиция, защото той не би приел допълнителен риск, освен ако очакваната доходност е по-голяма от нормата на безрисковия актив (Online Academy in Finance and Investing Education).

Пазарната рискова премия е разликата между очакваната норма на възвращаемост на пазара и нормата на възвращаемост на безрисковите активи. Тя е равна на наклона на уравнението на линията на капиталовия пазар, което графично представя модела за оценка на капиталовите активи. Пазарната премия взима в предвид необходимата(изискваната), историческата и очакваната възвращаемости.

Историческата пазарна рискова премия е еднаква за всеки инвеститор, поради случилото се преди, което определя стойността ѝ. Докато изискваната и очакваната пазарни рискови премии са различни за всеки един инвеститор. Причината за това са различните стратегии за инвестиране на всеки един от тях и готовността им да поемат даден риск.

### БЕТА КОЕФИЦИЕНТ КАТО ИЗМЕРИТЕЛ НА ВОЛАТИЛНОСТТА

Бета коефициентът е измерител за волатилността, или систематичния (пазарния) риск. Той показва каква степен на риск ще принесе дадена инвестиция към портфейла, както и с колко цената на определена акция ще се покачи/намали в сравнение с това колко ще се покачат/намалят цените на пазара (Georgiev, Sl., Centeno, V. & Prof. Pavlov, V., 2017).

За да се пресметне бета коефициентът, се използва формулата:

$$\beta = \frac{cov(r_i, r_m)}{var(r_m)} \quad (2)$$

- Ако  $\beta$  коефициентът е по-голям от 1, това означава, че даденият актив е изключително рисков, поради наличието на висока волатилност. Той внася по-голям риск, отколкото общият риск на пазарния портфейл. Възвращаемостта на актива се движи в същата посока с тази на пазарния портфейл, но с по-голяма сила. Такъв пример може да бъдат акциите, нар. 'blue-chip stocks' или при акциите на големи компании.
- Когато  $\beta = 1$ , възвращаемостта на актива и пазарния портфейл се движат в една и съща посока с еднаква сила, а ако  $0 < \beta < 1$ , тогава те отново се движат в една посока, но възвращаемостта на актива се джижи с по-малка сила.
- При  $\beta = 0$  не се наблюдава зависимост между възвращаемостите, което означава, че даденият актив е безрисков.
- В същото време, ако  $\beta < 0$ , тогава се предполага, че това ще намали степеня на риск на портфейла. Това би означавало, че даден актив и пазарът са обратно корелирани и посоката на възвращаемостите ще е противоположна.

Ковариацията се пресмята по формулата

$$cov(r_i, r_m) = E[(r_i - E(r_i))(r_m - E(r_m))].$$

Тогава коефициентът на корелация ще е равен на

$$\rho_{r_i r_m} = \frac{cov(r_i, r_m)}{\sigma_i \sigma_m} \quad (3)$$

Коефициентът на корелация е показател за връзката между един взаимен фонд и неговият борсов индекс или с друг фонд или активи. Може да варира между -1 и 1 като, ако  $\rho_{xy} = -1$ , то съществува перфектна отрицателна корелация между двата актива, което означава, че е налице обратно-пропорционална зависимост между цените на активите. При  $\rho_{xy} = 1$ , то тогава е налице перфектна положителна корелация и двата актива ще се движат в

една посока. Когато  $\rho_{xy} = 0$ , тогава няма никаква или има много малка корелация между двата актива. Затова инвеститорите-експерти не взимат под внимание двойките активи с коефициент на корелация  $-0,8 < \rho < 0,8$ . За тях коефициент, равен или по-голям от 0,9 представя много силна връзка между активите (NJ Gogtay & UM Thatte, 2017).

### ЦЕНИ НА АКЦИИТЕ НА ЧЕТИРИТЕ БАНКИ

Фигура 1. представя цените на активите на всяка банка, сравнени с цената на индекса Standard and Poor's 500, взети от американска финансова платформа (Worldwide Financial Market Trading Platform).



Фигура 15. Цена на активите на четирите банки и базовия индекс S&P

След като разполагаме с данни за промяната на цените на базовия индекс Standard & Poor's 500 и активите на банките, може да се изчисли процента на възвращаемост за текущия ден спрямо предходния по формулата:  $r_i = (P_1 - P_0) / P_0$ .

Таблица 2. Годишна възвращаемост на активите за S&P 500, JPMorgan Chase, Bank of America, Citigroup и Wells Fargo

| Year            | Daily Annual Return |         |         |        |        |        |        |         |          |         |
|-----------------|---------------------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|---------|----------|---------|
|                 | 2000                | 2001    | 2002    | 2003   | 2004   | 2005   | 2006   | 2007    | 2008     | 2009    |
| SP 500          | -15.92%             | -16.30% | -28.74% | 35.44% | 12.14% | 7.40%  | 19.05% | 4.77%   | -53.15%  | 38.07%  |
| JP Morgan       | -3.61%              | -13.10% | -18.85% | 75.94% | 16.31% | 11.17% | 35.51% | -8.87%  | 10.02%   | 92.98%  |
| Bank of America | 17.85%              | 66.39%  | 34.39%  | 32.67% | 30.69% | 7.48%  | 28.27% | -29.20% | -68.67%  | 124.22% |
| Citigroup       | 39.94%              | 9.50%   | -19.70% | 52.43% | 1.53%  | 4.92%  | 20.88% | -88.10% | -108.94% | 17.12%  |
| Wells Fargo     | 60.17%              | -25.06% | 27.19%  | 42.08% | 17.64% | 14.45% | 27.96% | -18.86% | 53.03%   | 70.39%  |
| Year            | Daily Annual Return |         |         |        |        |        |        |         |          |         |
|                 | 2010                | 2011    | 2012    | 2013   | 2014   | 2015   | 2016   | 2017    | 2018     |         |
| SP 500          | 21.33%              | 6.14%   | 23.16%  | 37.03% | 16.45% | -1.53% | 15.60% | 27.24%  | -7.05%   |         |
| JP Morgan       | 14.03%              | 10.68%  | 54.16%  | 48.06% | 16.61% | 10.83% | 48.75% | 38.44%  | -3.89%   |         |
| Bank of America | 1.89%               | -94.83% | 124.09% | 51.68% | 24.54% | -5.75% | 51.83% | 49.42%  | -17.25%  |         |
| Citigroup       | 67.11%              | -52.94% | 75.23%  | 44.12% | 8.96%  | -3.50% | 31.41% | 36.79%  | -40.29%  |         |
| Wells Fargo     | 31.89%              | 0.89%   | 42.31%  | 45.73% | 32.28% | 1.64%  | 12.91% | 21.24%  | -28.96%  |         |

На таблица 2. са представени получените резултати за процента на възвращаемост за всяка година, след като са взети под внимание процентните  $r_i$  за всеки работен ден от съответната година. След това на фигура 2. са представени резултатите като движение на възвращаемостта през разглеждания период. Наблюдава се лек спад в тенденцията за възвращаемостта от активите и индекса Standard & Poor's 500.



**Фигура 16.** Годишна възвращаемост базовия индекс и активите на четирите банки

Нека обобщим тези резултати като използваме линията на тенденция за възвращаемостите на базовия индекс S&P 500 и на активите на J.P. Morgan Chase, Bank of America, Citigroup и Wells Fargo. Наблюдава се тенденция на нарастване за индекса Standard & Poor's 500 и за банките J.P. Morgan Chase и Citigroup, докато при годишната възвращаемост на Bank of America и Wells Fargo се наблюдава спад.

За да се определи дали изменението във възвращаемостта на активите на четирите американски банки влияе по някакъв начин на Standard & Poor's 500, трябва да се пресметне систематичният риск ( $\beta$  коефициент). Той определя до каква степен всеки един влияе на базисния си индекс и съответно на портфейла, в който е включен. За тази цел ще използваме (2) и за J.P. Morgan Chase през 2000г. ще се получи следното:

$$\beta = \frac{cov(r_i, r_m)}{var(r_m)} = \frac{0,000249446}{0,000198229} = 1,258371185.$$

От полученият резултат, следва че за 2000г. акциите на J.P. Morgan Chase са били по-волатилни от индекса S&P 500, което означава, че това е внесло по-голям риск към индекса. Аналогично, се получават останалите резултати. В таблица 3. са представени резултатите за  $\beta$  коефициента през целия период.

**Таблица 3.** Бета коефициент на активите на 'The Big Four' спрямо базисния индекс S&P500

|                 | Beta Coefficient |         |         |         |         |         |         |         |          |         |
|-----------------|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|---------|
| Year            | 2000             | 2001    | 2002    | 2003    | 2004    | 2005    | 2006    | 2007    | 2008     | 2009    |
| SP 500          | -                | -       | -       | -       | -       | -       | -       | -       | -        | -       |
| JP Morgan       | 1.25837          | 1.49377 | 1.71741 | 1.51240 | 1.07847 | 0.91904 | 1.27421 | 1.36591 | 1.49578  | 2.37540 |
| Bank of America | 1.05687          | 0.99061 | 0.94088 | 0.77721 | 0.82506 | 0.84447 | 0.83520 | 1.10394 | 1.85647  | 3.13198 |
| Citigroup       | 1.17401          | 1.35250 | 1.56067 | 1.19130 | 1.09374 | 0.71860 | 0.92187 | 1.36773 | 1.94014  | 2.88434 |
| Wells Fargo     | 0.76916          | 0.65311 | 0.73306 | 0.81448 | 0.72983 | 0.84141 | 0.72149 | 1.27515 | 1.44665  | 2.87986 |
|                 | Beta Coefficient |         |         |         |         |         |         |         |          |         |
| Year            | 2010             | 2011    | 2012    | 2013    | 2014    | 2015    | 2016    | 2017    | 2018     |         |
| SP 500          | -                | -       | -       | -       | -       | -       | -       | -       | -        |         |
| JP Morgan       | 1.33709          | 1.49250 | 1.46220 | 1.21918 | 1.13432 | 1.22150 | 1.43415 | 1.47277 | 0.992866 |         |
| Bank of America | 1.58816          | 1.91881 | 2.04985 | 1.34273 | 1.15048 | 1.25264 | 1.73713 | 1.95965 | 1.091817 |         |
| Citigroup       | 1.44442          | 1.93925 | 2.04225 | 1.54097 | 1.24139 | 1.26744 | 1.90194 | 1.52557 | 1.033291 |         |
| Wells Fargo     | 1.46288          | 1.42238 | 1.30162 | 1.03218 | 0.96023 | 1.10328 | 1.23219 | 1.46572 | 0.901292 |         |

След направените изчисления, може да се обобщи, че в началото на периода през 2000г. всички активи са с приблизително еднаква волатилност с тази на базовия им индекс Standard & Poor's 500. През 2001г. J.P. Morgan Chase и Citigroup са с отрицателен  $\beta$  коефициент, докато останалите имат такъв, приблизително равен на 0, което означава, че няма зависимост между тях и S&P 500. За разлика от 2001г., през 2002г.  $\beta$  коефициента за първата двойка банки нараства и получава стойности над 1, което означава, че те са били по-волатилни от самия индекс, докато тези на Bank of America и Wells Fargo са вече между 0 и 1 и са по-малко волатилни от S&P. В периода от следващите 3 години се наблюдава спад в стойностите на коефициента, докато Wells Fargo успява да се задържи колебливо на едно ниво по ниско от 1,

но в горните граници на тази група. От 2006г. до 2009г. систематичният риск и за четири банки нараства и когато достига до 2009г. вече всички са с коефициент по-голям от 1. След финансовата криза в Щатите от 2008г., най-голямата и сериозна, позната на американците след Голямата депресия от 30-те години на XXвек, през 2009г. систематичният риск достига най-високите си стойности за посочения период като всички са по-големи от 2,5. След това се връщат отново към нормални стойности за  $\beta$ , които били  $\approx 1,5$  и продължили тенденцията да бъдат по-волатилни от базовия си индекс. От тогава до 2017г. се наблюдава колебливо нарастване на стойностите на активите като през 2015г се наблюдава един лек спад за J.P. Morgan Chase, Bank of America и Citigroup, докато Wells Fargo запазва посоката си на движение на стойностите на актива, а през 2014г. бележи лек спад с  $0 < \beta < 1$ . В този период всички активи и на четирите банки са сравнително по-волатилни и носят по-висок риск от индекса Standard & Poor's 500. През изминалата година  $\beta$  коефициента започва да намалява и става приблизително равен на 1, докато този на Wells Fargo дори достига стойност на  $\beta$  по-малка от 1. Спрямо дневните цени на активите,  $\beta$  коефициента за всяка банка е следния:  $\beta_{JPM} = 1.410089$ ,  $\beta_{BAC} = 1.598134$ ,  $\beta_C = 1.712478$  и  $\beta_{WF} = 1.307146$ .

Поставяйки въпроса за това дали движението на активите на една банка влияят по някакъв начин и до каква степен върху базисния ѝ индекс, в случая S&P 500, ще се пресметне коефициентът на корелация за всяка банка и индекса S&P 500. След като се пресметне чрез (3), коефициентът на корелация за JP Morgan Chase & Co. е приблизително равен на 0,75, което означава, че е налице положителна корелация и, че активът и индексът имат добра връзка помежду си и се движат почти в синхрон. Коефициентът на корелация на Wells Fargo с S&P 500 е близко до 0, което е знак, че няма почти никаква връзка между тях. За останалите две банки коефициентите се доближават до 0,5 – за Bank of America (0.506488) и за Citigroup (0.656358) – което означава, че те не са от голямо значение за индекса.

След като вече са известни  $\beta$  коефициентите, може да се пресметне очакваната възвращаемост на всеки един актив. За целта се определя  $r_f$  като за това се взема под внимание тази норма на възвращаемост на безрисковия актив в САЩ, тъй като се прави сравнение на американски банки. От (American Treasury Government Website) задаваме стойност на  $r_f = 2,78\%$ . На база процента на възвращаемост на безрисковите активи за период от 20 години, се пресмята очакваната възвращаемост. Таблица 4. представя получените резултати за разглеждания период 01.01.2000 – 31.12.2018г. Чрез заместване във формулата, се получава възвращаемостта на JP Morgan Chase за 2000г.

$$E(r_i) = 0,0278 + (-0,0361 - 0,0278) \cdot 1,258371 = -0,0526099$$

**Таблица 4. Очаквана възвращаемост на активите на 'The Big Four'**

| Expected rate or return $E(r_i)$ |        |          |         |         |        |        |        |          |          |         |
|----------------------------------|--------|----------|---------|---------|--------|--------|--------|----------|----------|---------|
| Year                             | 2000   | 2001     | 2002    | 2003    | 2004   | 2005   | 2006   | 2007     | 2008     | 2009    |
| SP 500                           | -      | -        | -       | -       | -      | -      | -      | -        | -        | -       |
| JP Morgan                        | -5.26% | -20.94%  | -34.37% | 113.43% | 17.38% | 10.49% | 44.48% | -13.13%  | 13.61%   | 217.03% |
| Bank of America                  | 18.71% | 65.80%   | 32.52%  | 26.01%  | 25.81% | 6.75%  | 24.07% | -32.52%  | -129.86% | 383.12% |
| Citigroup                        | 46.41% | 11.87%   | -32.30% | 61.92%  | 1.41%  | 4.32%  | 19.47% | -121.52% | -213.98% | 44.14%  |
| Wells Fargo                      | 46.92% | -15.40%  | 20.67%  | 34.79%  | 13.63% | 12.60% | 20.95% | -24.81%  | 75.48%   | 197.48% |
| Expected rate or return $E(r_i)$ |        |          |         |         |        |        |        |          |          |         |
| Year                             | 2010   | 2011     | 2012    | 2013    | 2014   | 2015   | 2016   | 2017     | 2018     |         |
| SP 500                           | -      | -        | -       | -       | -      | -      | -      | -        | -        | -       |
| JP Morgan                        | 17.82% | 14.56%   | 77.91%  | 57.99%  | 18.47% | 12.61% | 48.75% | 55.30%   | -3.85%   |         |
| Bank of America                  | 1.37%  | -184.52% | 251.45% | 68.44%  | 27.82% | -7.91% | 51.83% | 94.17%   | -19.09%  |         |
| Citigroup                        | 95.70% | -105.28% | 150.73% | 66.48%  | 10.45% | -5.18% | 31.41% | 54.66%   | -41.73%  |         |
| Wells Fargo                      | 45.36% | 0.09%    | 54.23%  | 47.12%  | 31.10% | 1.52%  | 12.91% | 29.84%   | -25.82%  |         |

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Фигура 3. представя промяната в очакваната възвращаемост за четирите банки за разглеждания период. Като при Wells Fargo се наблюдава много лек спад във възвращаемостта, докато при останалите три банки има покачване на нивото на възвращаемост. С настъпването на голямата депресия през 2008 в САЩ, се появява и бърз и

голям скок във възвращаемостта на активите, произтичащо от срива на пазара за недвижими имоти в САЩ и кризата при ипотечните кредити. Счита се, че депресията (рецесията) е започнала през декември 2007 и е продължила до юни 2009г. (International Monetary Fund, 2009).

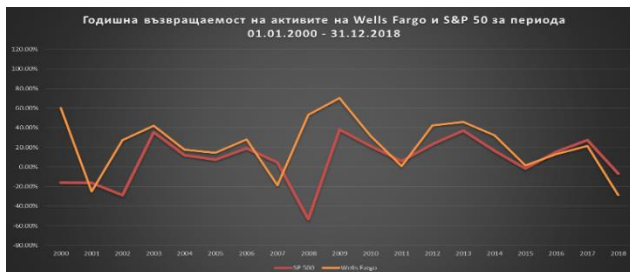


**Фигура 17.** Очаквана възвращаемост на четирите банки за периода 01.01.2000 - 31.12.2018г.

Това показват и данните, които са използвани в изследването. Голямата депресия довежда Америка до недостиг на ценни активи в пазарната икономика и до срив на финансовия сектор, и по-точно на банките, в световната икономика. Някои банки са били пред затваряне, но са били спасени от федералното правителство на САЩ. След това увеличаване, възвращаемостта на активите започва да се стабилизира, спадайки дръзко, както се е покачила. От 2011г. може да се каже, че възвращаемостта на активите на четирите банки се стабилизира и запазва приблизително еднакво ниво на възвращаемост.



**Фигура 4.**  $E(r)$  на активите на JP Morgan Chase и S&P 500



**Фигура 5.**  $E(r)$  на активите на Wells Fargo и S&P 500

На фигури 4. и 5. са представени годишните възвращаемости на активите на банките JP Morgan Chase и Wells Fargo спрямо базисния им индекс Standard and Poor's 500 за периода 2000 – 2018г. Може да се види, че темпа на годишна възвращаемост за JP Morgan Chase и S&P 500 се движат в синхрон. Когато възвращаемостта на активите на JP Morgan Chase се покачи, тогава и тази на индекса се покачва, и обратно. В същото време, този добър синхрон липсва при Wells Fargo и S&P 500. В началото на разглеждания период 2000 – 2002г., докато при индекса се наблюдава траен спад, при активите на банката възвращаемостта се повишава и намалява много повече. От 2001г. до 2006г. може да се каже, че има по-добра корелация и те са в синхрон. С наближаването и настъпването на Голямата депресия този синхрон отново силно се разклаща и чак през 2011г. те започват да се движат в синхрон, макар и непълен. От 2014-2015г. се наблюдава отново много добър синхрон между възвращаемостта на активите на банката и индекса S&P 500. Това е и причината, поради която коефициентът на корелация между Wells Fargo и индекса Standard and Poor's 500 е толкова нисък.

## REFERENCES

- [1] American Treasury Government Website: <https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/pages/textview.aspx?data=yield>
- [2] Anglelova, V. & Agre, G. (2000). 'Six Topics About Risk Management', Institute of Informatics and Computer Technologies to The Bulgarian Academy of Sciences, Sofia
- [3] Bodie, Zvi, Marcus, A. J. (Boston University) & Kane, A. (University of California) (2000). 'Investments', NATURELLA, Sofia

- [4] Georgiev, Sl., Centeno, V. & Prof. Pavlov, V. (2017). 'Applications of Graphs in the Investments and Portfolio Management', University of Ruse 'Angel Kanchev', SSS
- [5] International Monetary Fund (2009). '*World economic outlook. Crisis and Recovery.*', Washington D.C.
- [6] NJ Gogtay & UM Thatte (2017). '*Principles of Correlation Analysis. Statistics for researchers* ', Journal of the Association of Physicians of India
- [7] Online Academy in Finance and Investing Education:  
<https://www.investopedia.com/terms/r/risk-free-rate.asp>
- [8] Online Platform of the Institute of Corporate Finances:  
<https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/finance/risk-free-rate/>
- [9] Worldwide Financial Market Trading Platform: <https://finance.yahoo.com>



FRI-2.203-SSS-FMI-07

---

## APPLICATION OF NEURAL NETWORK FOR CREDIT CARD FRAUD DETECTION<sup>7</sup>

---

**Sevdalina Georgieva**

Financial Mathematics Student

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: sevdalina095@abv.bg

**Assist. Prof. Maya Markova, PhD**

Department of Applied Mathematics and Statistics

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: mmarkova@uni-ruse.bg

**Abstract:** Credit card fraud can be committed through a stolen card or can take place through online purchases, banking rewards programmes, phishing or e-mail communications. For a credit card institution to protect their clients against that is not an easy task. However, using neural network can limit the risk of credit fraud. The ability of a neural network to serve as a pattern classifier can be used to recognize when a credit card operation is not performed by its owner. This paper describes how this can be applied in credit card fraud detection, what problems can occur during that and considers using genetic algorithms to solve these problems.

**Key words:** neural network, credit card fraud, genetic algorithm

### ВЪВЕДЕНИЕ

В днешно време все повече хора предпочитат да използват кредитни карти при заплащане на стоки и услуги. Кредитните карти имат огромно приложение при онлайн пазаруването, както и други онлайн разплащателни услуги като плащане на сметки и данъци. Освен че това е изключително удобно, спестява и много време на клиентите. Също така много хора намират плащането с кредитна карта на каса много по-практично в сравнение с плащането в кеш. Но с нарастването на броя на хората, които използват кредитни карти нараства и броят на измамите с кредитни карти. За засичане на тези измами може да се използват невронни мрежи, като тяхно голямо предимство е, че позволяват засичането на измама да стане в момента на извършване.

### ИЗМАМИ С КРЕДИТНИ КАРТИ

Измама с кредитна карта може да се дефинира като неразрешено разпореждане с чужда банкова сметка чрез кредитна карта от лице, което не е оторизирано да се разпорежда с дадената сметка. С други думи, такава измама се осъществява, когато едно лице ползва кредитната карта на друго лице за лични цели без знанието и разрешението на собственика на картата и не възнамерява да заплати за това.

Най-лесният начин за извършване на физическа измама без използването на технология е кражбата на кредитна карта. Друг вид измама може да се осъществи чрез фалшиви кредитни карти.

Съществуват измами, които се извършват чрез уеб сайт, който предлага стоки на изключително намалени цени. За да могат клиентите да си поръчат тези стоки, те трябва да предоставят данни за кредитна карта. След това измамниците използват тези данни, за да закупят дадения продукт заедно с още стоки от други сайтове на редовна цена, които след това ще предложат в уеб сайта си. Клиентите ще получат стоката, която са поръчали и е възможно

---

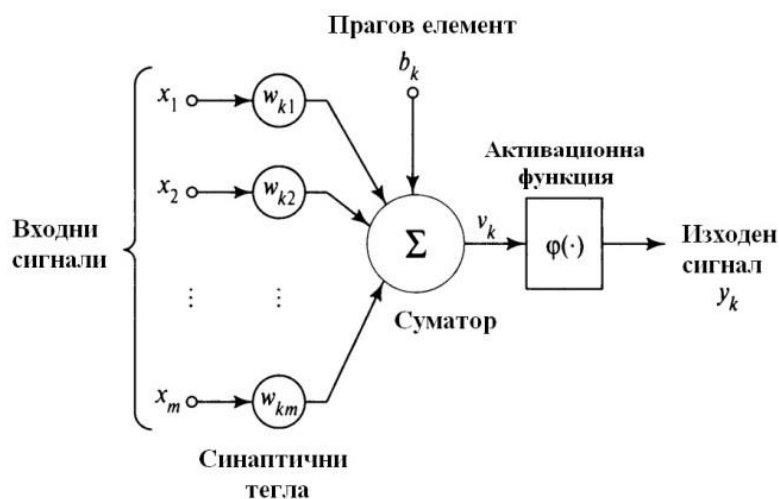
<sup>7</sup> Докладът/ статията отразява резултати от работата по проект No 2019 - ФПНО - 05, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

да не разберат веднага, че кредитната им карта е била използвана без тяхно знание. Този вид измама се нарича триангулационна измама.

Известен метод за измама е така нареченият фишинг. Този метод е създаден за придобиване на чувствителна информация като потребителско име, парола и детайли на кредитна карта. Това обикновено става чрез спам имейли, които изглеждат все едно са изпратени от уебсайт или компания, на която потребителят има доверие.

## ИЗКУСТВЕНИ НЕВРОННИ МРЕЖИ

Хората имат тенденция да изучават нови концепции или идеи с помощта на примери. Вместо да разбира алгоритъма стъпка по стъпка, човешкият мозък има склонност да възприема нови неща чрез анализиране и изучаване на примери. След изобретяването на компютрите и огромния напредък в дигиталния свят се правят опити да се симулира този човешки подход на учене. Много усилия се влагат в създаването на изкуствени неврони, които работят подобно на биологичните неврони. Мрежа от такива изкуствени неврони се нарича изкуствена невронна мрежа (Haykin, S., 2005).



Фиг.1 Нелинеен модел на неврона

Невронът представлява единица за обработка на информацията в невронните мрежи. В модела на неврон, лежащ в основата на изкуствените невронни мрежи (фиг.1), можем да отличим три основни елемента (Mladenov, V., & Jordanova, S., 2006):

1) Набор от синапси (synapse) или връзки (connecting link), всеки от които се характеризира със своето тегло (weight) или сила (strength). В частност сигнала  $x_j$  на входа на синапса  $j$ , свързан с неврона  $k$  се умножава по теглото  $w_{kj}$ . Важно е да се обърне внимание на това в какъв ред са указани индексите на синаптичното тегло  $w_{kj}$ . Първият индекс се отнася към разглеждания неврон, а втория към входният край на синапса, с който е свързано даденото тегло. За разлика от синапсите на мозъка синаптичното тегло на изкуственият неврон може да има както положителна, така и отрицателна стойност.

2) Суматор (adder) – натрупва входните сигнали, претегляни относно съответният синапсов неврон. Тази операция може да се опише като линейна комбинация.

3) Активационна функция (Activation function) – ограничава амплитудата на изходния сигнал на неврона. Обикновено нормирания диапазон на амплитудата на изхода на неврона се намира в интервала  $[0,1]$  или  $[-1,1]$ .

В модела на неврона (фиг.1) е включен и прагов елемент (bias), който се означава със символа  $b_k$ . Тази величина отразява увеличението или намалението на входния сигнал, подаван на активиращата функция. В математически вид функционирането на неврона  $k$  може да се опише със следните две уравнения:

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} \cdot x_j \quad (1)$$

$$y_k = \phi(u_k + b_k), \quad (2)$$

където  $x_1, x_2, \dots, x_m$  – входни сигнали;  $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{km}$  – синаптични тегла на неврона  $k$ ;  $u_k$  – линейна комбинация от входните въздействия;  $b_k$  – праг;  $\phi(\cdot)$  – активационна функция;  $y_k$  – изходен сигнал на неврона.

В модела (фиг.1) постсинаптичният потенциал се изчислява по следния начин:

$$v_k = u_k + b_k \quad (3)$$

Прагът  $b_k$  се явява външен параметър за изкуствения неврон  $k$ . Неговото присъствие се вижда в израза (2). Вземайки предвид (3), формули (1) и (2) могат да се преобразуват в следния вид:

$$v_k = \sum_{j=0}^m w_{kj} \cdot x_j, \quad (4)$$

$$y_k = \phi(v_k)$$

В (4) се добавя нов синапс. Неговия входен сигнал е равен на:

$$x_0 = +1,$$

а неговото тегло:

$$w_{k0} = b_k$$

Активационната функция  $\phi(v)$  определя входния сигнал на неврона в зависимост от индуцираното локално поле  $v$ .

Едно от най-важните свойства на невронните мрежи е тяхната способност да се обучават на основата на данни от околната среда. Обучението на невронните мрежи става чрез интерактивен процес на коригиране на синаптичните тегла и прагове.

Процесът на обучение на невронната мрежа предполага следната последователност от събития:

1. В невронната мрежа постъпват сигнали от външната среда.
2. В резултат на това се изменят свободните параметри на невронната мрежа.
3. След изменения на вътрешната структура невронната мрежа отговаря по различен начин.

Тези събития се наричат алгоритъм на обучение. Алгоритмите на обучение се различават един от друг по начина на настройване на синаптичните тегла на невроните.

## НЕВРОННИ МРЕЖИ И ИЗМАМИ С КРЕДИТНИ КАРТИ

Въпреки че има няколко технологии за засичане на измама с кредитна карта, базирани на технологии като Data mining, Knowledge Discovery, Expert System и други (Haykin, S., 2005), те не могат да засекат самата измама по време на извършването ѝ. Такъв вид измами имат две отличителни характеристики (Raghavendra, P., & Sharma, L., 2011):

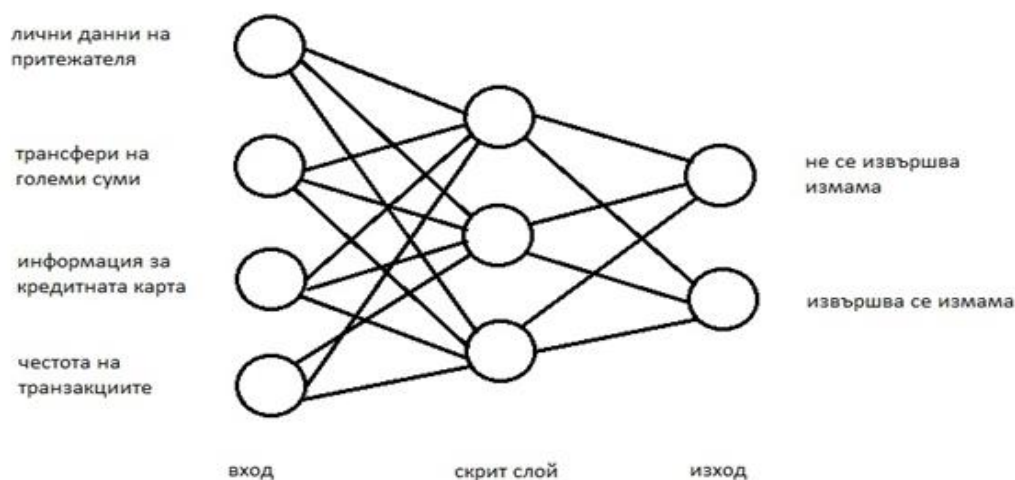
- времето, за което трябва да се прецени дали се извършва измама, е изключително кратко
- броят на операции с кредитни карти, които се извършат за единица време, е огромен.

Засичането на измами с кредитни карти чрез невронни мрежи е базирано на принципа, на който работи човешкият мозък. Невронните мрежи дават възможността на компютрите да „разсъждават“. За приложението им в засичането на измами с кредитни карти се използва свойството им да решават проблеми, свързани с класификация на зададени данни (McNelis, P. D., 2005). Човешкият мозък се учи чрез минали преживявания. По същия начин работи и тази технология за засичане на измами. Когато даден клиент използва кредитната си карта, той извършва определени действия при боравенето с нея, които се запаметяват и се използват като шаблон за класификация на по-нататъшни ползвания.

Запаметявайки данните от последните няколко години, невронната мрежа се обучава да разпознава начина на използване на кредитна карта от даден клиент. При това обучение се запазват данни като професия на клиента, доходи, номер на банкова сметка, данни за трансфери на по-големи суми, честота на преводи и места, на които се извършват преводи, информация за какво е използвана кредитната карта преди (например в бижутерски магазин, определни ресторанти, хотели и т.н), кога е издадена картата и кога е преиздавана (Ghosh, S., & Reilly, D. L., 1994). Освен за това, невронните мрежи се обучават и за запаметяването на информация за историята на кредитни измами за дадена банка. На базата на тези данни, невронните мрежи „преценяват“ дали дадена транзакция е направена от притежателя на картата или не.

Когато кредитна карта се използва, системата изпраща данни за транзакцията, която се извършва и ги сравнява с информацията, запаметена от предишни ползвания на притежателя. Ако данните съвпадат, то транзакцията е най-вероятно да се извършва от лицето, притежател на картата. Ако системата не намери съвпадение между текущата транзакция и предишните, то това не значи автоматично, че има измама, а само че вероятността да се извършва измама нараства значително.

Невронната мрежа дава изходен резултат реално число, между 0 и 1. Ако резултатът е над 0,6 или 0,7, то вероятността транзакцията да е незаконна се увеличава (Raghavendra, P., & Sharma, L., 2011).



Фиг.2 Схема на невронна мрежа, която засича измами с кредитни карти

Разбира се, има случаи, когато превод, направен от притежателя на картата, до голяма степен се различава от предишни преводи и съответно случаи, когато има прилика между транзакциите, но преводът е направен от лице, което не е притежател на картата. Първият случай не е често срещан и макар че лицето няма да може да извърши транзакцията, няма да има други големи последици. Вторият случай също няма голяма вероятност да се случи, тъй като ако дадено лице открадне кредитна карта, много по-вероятно е то да направи една голяма транзакция, отколкото няколко по-малки.

Невронната мрежа, използвана за засичане на измама с кредитна карта (фиг.2) е двуслойна с еднопосочно предаване на сигнала и обратно разпространение на грешката, която използва два етапа на обучение - на задаване на прототипни клетки и на локално изчисляване на вероятности, които се свързват с всяка от прототипните клетки. При този вид обучение се използва градиентен подход за минимизиране на грешката. Такъв вид невронни мрежи се използват за решаването на редица проблеми, свързани с разпознаването на зададени шаблони във финансовата сфера и извън нея. Целта е да се създаде обучена система, която да извежда коефициент, по който да се прецени дали дадена транзакция е парична измама или извършителят е лицето, разполагащо със сметката. Ако коефициентът е между зададен праг и максималната стойност, то има голяма вероятност да се извършва незаконна транзакция, ако

е под зададения праг, то транзакцията се извършва от лицето, което притежава сметката. Избирането на праг е трудно, тъй като разграничаването между легални и нелегални преводи става трудно.

Невронната мрежа е с еднопосочно предаване на сигнала и с обратно разпространение на грешката, което означава, че няма рекурентни връзки в мрежата. Това е голямо опростение на модела на човешкия мозък, тъй като в него сигналите минават по циклични пътища. Елементите от входния и изходния слой са напълно свързани с тези от скрития слой. Обратното разпространение на грешката е стандартна техника при обучителния процес. Ефективността може да се подобри, като се въведе параметър на скоростта, който да води до по-бърза сходимост.

Най-големият проблем при този вид мрежи е, че редица параметри трябва да бъдат зададени преди да започне обучението. Но няма измислени правила, по които да се въведат тези параметри, а именно те са решаващи за успеха на обучението. За решаването на този проблем се въвежда използването на генетичен алгоритъм (Raghavendra, P., & Sharma, L., 2011).

### ГЕНЕТИЧЕН АЛГОРИТЪМ

Биологическата страна на генетичния алгоритъм се изразява в еволюционната теория на Дарвин, при която оцеляват най-приспособимите видове.

Генетичните алгоритми са алгоритми за оптимизация и обучение на машини, които се базират бегло на някои характеристики на биологичната еволюция (Whitley, D., 2003). За използването им е необходимо да са изпълнени пет критерия (Montana, D. J., 2003):

1) Да е възможно да се кодират решения на задачата чрез хромозоми (съставните елементи на ДНК)

2) Функция, която да дава оценка за всеки хромозом, който ѝ се подаде

3) Начин да се инициализира набор от хромозоми

4) Оператори, които да се прилагат върху „родителите“, когато те се размножават, за да се измени генетичният материал. Стандартни оператори са мутацията и кръстосването.

5) При зададените компоненти генетичният алгоритъм работи по следните стъпки:

- Инициализира се популацията и се оценява всеки елемент на популацията

- Извършва се размножаване, докато се достигне зададен критерий за спиране.

Размножаването протича по следния начин:

- Избира се един или повече родители. Изборът може да стане по случаен начин, но обикновено се избират индивидите с най-високи оценки

- Избира се генетичен оператор и се прилага върху родителите

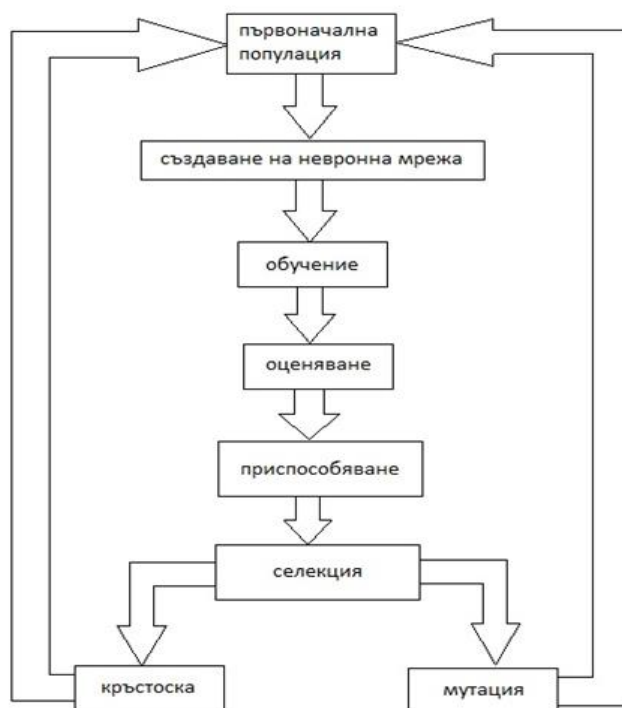
- Прави се оценка на децата и се прибавят към поколението, като се заменят индивидите с най-лоши оценки.

Основните генетични оператори са кръстоска, селекция и мутация. При селекцията оцелява индивида с най-добра оценка, при мутацията на случаен принцип се опитват различни комбинации, като някои от тях са успешни, други – не. При кръстоската се комбинират само добри резултати.

Индивидите се оценяват и класират. Тъй като броят на индивидите във всяка популация е един и същ, то за всеки нов индивид този от старите с най-лоша оценка трябва да бъде отстранен.

Чрез генетичния алгоритъм се решава проблемът за избиране на начални параметри на невронните мрежи. Остава да се реши как точно да се комбинират генетичният алгоритъм и невронните мрежи.

Един от начините (фиг.3) е в началото да се генерират определен брой индивиди. Те се оценяват чрез генетичния алгоритъм и след това се създава невронната мрежа, като се



Фиг.3 Използване на генетичен алгоритъм с невронни мрежи

съобразва получената информация. След това се извършва обучението на мрежата. Накрая се извършва кръстоска и мутация, като се създават нови индивиди, които заменят най-лошите от старите. Въпреки това отново възниква проблемът за инициализацията. Този път проблем е как да се избере първоначалната популация.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предимството на използването на невронни мрежи при засичането на измами с кредитни карти пред другите такива технологии е това, че засичането става в момента на измамата. Също както човешкият мозък разпознава извършителя на дадено действие по движенията и мимиките, извършвани преди това от това лице, така и невронните мрежи разпознават дали дадена кредитна карта се използва от притежателя ѝ по историята ѝ на ползване. Макар и този метод да дава по-скоро вероятен резултат, а не сигурен, той е изключително ефективен. Най-големият проблем при използването му е въвеждането на начални данни, на базата на които да се извърши сравнение. Този проблем частично се решава чрез използването на генетичен алгоритъм, но и тук възниква проблемът с избора на първоначална популация.

## REFERENCES

- Bothelius, E. (2005). *Fraud Detection in the Internet Account System for Payment Service Providers*.
- Ghosh, S., & Reilly, D.L. (1994). *Credit Card Fraud Detection with a Neural-Network*, Nestor, Inc. IEEE.
- Haykin, S. (2005). *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Pearson Education.
- McNelis, P. D. (2005). *Neural Networks in Finance: Gaining Predictive Edge in the Market*. Elsevier Academic Press.
- Mladenov, V., & Jordanova, S. (2006). Fuzzy control system and neural networks. Technical University, Sofia (**Оригинално заглавие: Младенов В., Йорданова, С., 2006. Размито управление и невронни мрежи. Технически университет - София**).
- Montana, D. J. (2003). *Neural Network Weight Selection Using Genetic Algorithms*. Bolt Beranek and Newman Inc.
- Raghavendra, P., & Sharma, L. (2011). *Credit Card Fraud Detection Using Neural Network*. International Journal of Soft Computing and Engineering.
- Whitely, D. (2003). *Genetic Algorithm And Neural Network*.

FRI-2.203-SSS-FMI-08

## OPTION PRICING USING MERTON'S JUMP-DIFFUSION MODEL<sup>8</sup>

**Borislav Chakarov**

Financial Mathematics Student  
University of Ruse "Angel Kanchev"  
E-mail: borko5283@abv.bg

**Assoc. Prof. Iliyana Raeva, PhD**

Department of Applied Mathematics and Statistics  
University of Ruse "Angel Kanchev"  
E-mail: iraeva@uni-ruse.bg

**Abstract:** *This paper considers Robert Merton's model for stock price behavior that incorporates small continuous "diffusive" movements together with larger, randomly occurring "jumps". It is based on the Black-Scholes model for determining the value of options which is considered a milestone of modern finance. Firstly, some notes on both Black-Scholes and Merton's model are made. Next, Merton's differential equation and its solutions are presented. Also, the concept of option pricing is introduced through a simple example using Merton's formula. Finally, a Monte Carlo algorithm for option pricing in Merton's model is presented and analyzed.*

**Keywords:** Option pricing, Black-Scholes-Merton model, Monte Carlo Methods

### ВЪВЕДЕНИЕ

При закупуването на опция, купувачът трябва да заплати премия. Тъй като той има правото да избере дали да упражни опцията или да я остави да изтече, то максималната загуба е ограничена до предварително заплатената сума (премията). Затова една от основните задачи, пред които трейдърите на стоки са изправени, е намирането на т. нар. „справедлива“ цена на опцията.

Тъй като основният механизъм, определящ цената, е пазарът, то за да се намери някаква разумна цена на опцията, е необходим математически модел, който описва движението на цените на активите на финансовите пазари. Математическият модел на Блек-Шолс е считан за най-известният модел в икономиката, описващ случайното движение на цените на финансовите активи. Този модел е разширен и допълнен от Мертън.

В статията е направен сравнителен анализ на оценката на премията на европейска кол опция, изчислена чрез модела на Мертън – чрез аналитични формули и по метод Монте Карло – чрез симулации. Методът Монте Карло е числен метод за решаване на математически задачи с помощта на моделиране на случайни величини и/или случайни функции и статистическа оценка на техните характеристики. Методът Монте Карло се използва, когато цената на актива не може да се опише с непрекъснат процес и зависи от трудно предвидими параметри.

Целта на направения по-долу анализ на симулациите, получени по метод Монте Карло, и оценка на стандартната грешка при този метод, е да се покажат добрите и лоши страни на прилагането на метода Монте Карло в областта на финансовите пазари, от времева и структурна гледна точка.

### МОДЕЛ НА BLACK-SCHOLES

В модела на Black-Scholes се предполага съществуването на поне един рисков актив, наричан базов, и безрисков актив, най-често облигация с нулев купон. Моделът е построен върху следните допускания (Black, F., Scholes, M., 1973) относно активите:

- нормата на възвращаемост на безрисковия актив е константа;

<sup>8</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 17. 05. 2019 в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ОЦЕНЯВАНЕ НА ОПЦИИ В МОДЕЛА НА МЕРТЪН.

- цената на базовия актив следва геометричното Брауново движение;
- базовият актив не изплаща дивидент;
- опцията е от Европейски вид;
- пазарът е без триене – т. е. не съществуват транзакционни такси;
- може да се заемат или отдават под наем пари във всякакво количество на една и съща лихва – безрисковата норма;
- базовият актив може да се купува или продава във всякакво количество;
- индивидуалното търгуване не влияе на движенията на пазара.

Вземайки предвид допусканията, диференциално уравнение на Блек и Шолс има вида:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (1)$$

със следното аналитично решение за европейска кол и пут опция:

$$V_{call}^{BS} = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad V_{put}^{BS} = -SN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2),$$

където

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

е функцията на разпределение на стандартното нормално разпределение и

$$d_1^{BS} = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2^{BS} = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1^{BS} - \sigma\sqrt{T-t}.$$

## МОДЕЛ НА MERTON

През 1973 година Мертън изследва модела на Блек-Шолс и доказва, че е валиден, дори когато:

безрисковата норма на възвръщаемост е стохастичен процес;

базовият актив изплаща дивиденти;

опцията е от Американски вид;

съществуват ограничения върху вземането и отдаването на пари под наем.

Единственият случай, в който моделът е невалиден, е когато промяната в цената на актива не следва непрекъснато Брауново движение – т. е. цената не се променя плавно, а със скокове (Merton, R. C., 1973).

Обикновено промяната в цената на активите е плавна и се дължи на промяна на търсенето и предлагането, но има случаи, в които съобщаването на важна информация относно активите, определена фирма или даден пазар, води до внезапни промени в цените. Подобна информация „пристига“ в дискретни моменти, но точният момент на това събитие има случаен характер.

За да моделира рязката промяна в цените на активите на финансовите пазари, Мертън разширява модела на Блек-Шолс (Merton, R. C., 1976) като добавя компоненти на скокове:

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu dt + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right), \quad (2)$$

където  $(N_t)$  е Поасонов процес с параметър на интензивност  $\lambda$  и независими скокове  $Y_i$ , имащи нормално разпределение с очакване  $\gamma' = \gamma - 0.5\delta^2$  и дисперсия  $\delta^2$ , като се приема, че Поасоновият процес и скоковете са независими от Винеровия процес  $W_t$ . Динамиката на ценовия процес  $S_t$  може да бъде описана от два отделни вида случайни процеса – процес със скокове и дифузионен процес (Milev, M., 2012).

Процесът  $S_t$  от (2) може да се интерпретира в икономиката като случайно движение на цените с възвръщаемост  $\mu$ :



$$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda \left( \exp \left( \gamma' + \frac{1}{2}\delta^2 \right) - 1 \right). \quad (3)$$

Процесът  $S_t$  е мартингал, където  $r > 0$  безрисков лихвен процент. Това е необходимо, за да бъде изпълнена хипотезата за ефективния пазар, която гласи, че цената на търгуваните активи към определен момент отразява цялата налична информация, до която инвеститорите имат достъп (Fama, E., 1970).

Аналогично на частното диференциално уравнение (1) в модела на Блек-Шолс, моделът на Мертън води (Milev, M., 2012) до следното уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - d - \lambda \hat{k})S \frac{\partial V}{\partial S} - rV + \\ + \lambda E_k [V(S(1+k), t) - V(S, t)] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

със следното аналитично решение за европейска кол опция:

$$C(S, T) = e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} (\lambda(T-t))^n}{n!} (Se^{(T-t)b^*(n)} N(d_{1n}) - KN(d_{2n})), \quad (5)$$

където  $b^*(n) = r - d - \lambda \hat{k} + \frac{n\Gamma}{T}$  и

$$d_{1n} = \frac{\ln \frac{S}{K} + (T-t)b^*(n) + \frac{1}{2}(\sigma^2(T-t) + n\delta^2)}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + n\delta^2}}, \quad d_{2n} = d_{1n} - \sqrt{\sigma^2(T-t) + n\delta^2}.$$

Решението за европейска пут опция може да бъде изведено по аналогичен начин. В случая е по-лесно да се използва връзката между кол и пут опция, която е известна като пут-кол паритет:

$$P(S, T) = C(S, T) - S + Ke^{-r(T-t)}.$$

### СИМУЛАЦИИ НА ЦЕНОВИ ПЪТЕКИ ЧРЕЗ МЕТОД МОНТЕ КАРЛО

Монте Карло методът предлага простота на конструкцията и често се използва за симулация на процеси, чието поведение може да се интерпретира само в статистически смисъл. Заслугата за откриването на концепцията, която е в същността на Монте Карло методът, се приписва на математика Станислав Улам, макар че подобни идеи са били наблюдавани и много по-рано, например при класическото решение на задачата за иглата на Буфон (Todorov, V., 2017).

Методът Монте Карло е считан за универсален в икономиката, защото при него симулацията на цената  $S$  на разглеждания актив не зависи от вида на интервала, в който  $S$  е дефинирана. За разлика от често срещания в икономиката метод на крайните разлики, дали този интервал е краен или безкраен, отворен или затворен, не оказва влияние върху точността и времето на метода Монте Карло. Обяснението на този феномен се крие в структурата на метода Монте Карло, която зависи предимно от началната стойност  $S_0$  на цената на разглеждания актив.

Основната идея е да се симулират голям брой ценови пътеки чрез формули (2) и (3), които описват случайното движение на дадения ценови процес  $S_t$  в интервала  $[0, T]$  (Milev, M., 2012). Използваме следния алгоритъм:

1. Времето  $0 \leq t \leq T$  до падежа  $T$  на дадена опция се дискретизира чрез избиране на подходяща времева стъпка  $\Delta t$ ;
2. Генериране на нормално разпределени случайни числа за симулиране на Винеровия процес;
3. Генериране на Поасоново разпределени случайни числа за симулиране на Поасоновия процес;
4. Генериране на ценови пътеки чрез формули (2) и (3);

5. Пресмятане на функцията на печалба и съответното математическо очакване за всяка от ценовите пътеки;
6. Окончателно, премиумът на дадената опция се пресмята чрез дисконтиране и намирането на доверителен интервал за средната стойност от всички симуирани ценови пътеки.

### СРАВНЯВАНЕ НА ПРЕМИУМИТЕ

Следва да направим оценка на европейска кол опция в модела на Мертън чрез аналитични формули и чрез метод Монте Карло, използвайки представения по-горе алгоритъм.

#### Основна задача:

Да се намери премиума на европейска кол опция със следните параметри:

начална цена  $S_0 = \$40$ ,

страйк  $K = \$40$ ,

падеж  $T = 1$  година,

лихвен процент  $r = 8\%$ ,

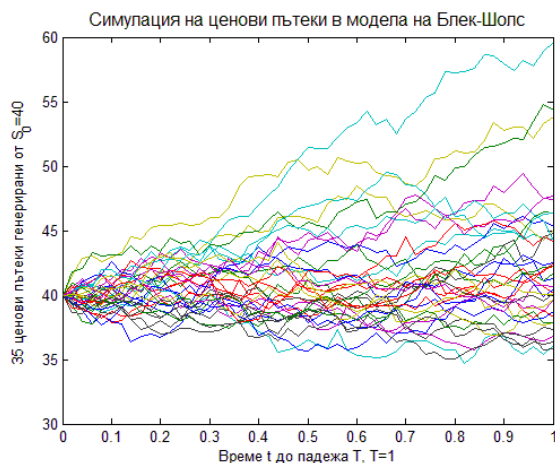
волатилност  $\sigma = 10\%$ ,

не изплаща дивиденди,

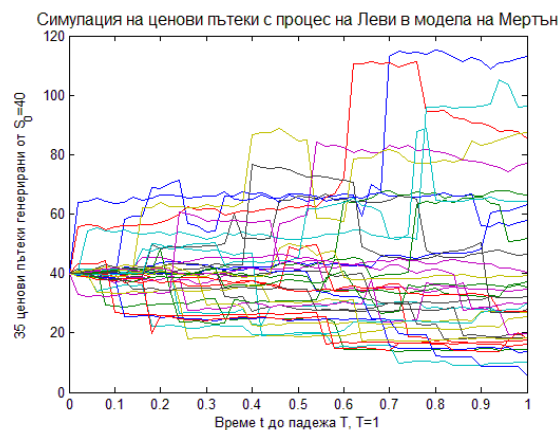
параметри, описващи Поасоновия процес  $\lambda = 5$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 0.3$ .

#### Решение:

1. Използвайки диференциалното уравнение (4) и неговото аналитичното решение (5), за цената на дадената европейска кол опция, в модела на Мертън, получаваме \$11.5331.
2. Нека разгледаме симулации на 35 ценови пътеки получени чрез използването на двата модела.



Фигура 1. Симулации в модела на Блек-Шолс



Фигура 2. Симулации в модела на Мертън

На фигура 1 са направени симулации на ценови пътеки в модела на Блек-Шолс. Има малки изменения в цената на разглеждания актив за кратък период от време, т.е. цената не може да се променя рязко. Вероятността да се случат големи промени в цената е малка, което изключва появата на скокове.

На фигура 2 са направени симулации на ценови пътеки в модела на Мертън. За разлика от модела на Блек-Шолс, на графиката ясно се вижда скокообразната промяна в цената на актива.

Следва да приложим метод Монте Карло с 10 времеви стъпки и голям брой ценови пътеки, с цел постигане на висока точност. За целта се използва следния код на MATLAB:

```
function [Euro_Call_Value, CI, Parity] = merton_assetpaths(S0, K, T, div, r,
sigma, lambda, Gamma, Delta, NSteps, NPaths)
GammaPrime = Gamma - 0.5*Delta^2;
kappa = exp(Gamma) - 1;
```

```

dt = T/NSteps;
t=linspace(0,1,NSteps+1)*T;
suml=0;
S=zeros(NSteps+1,NPaths);
S(1,:)=S0;
Dpayoff=zeros(1,NPaths);
Wt = normrnd(0,1,NPaths,NSteps+1);
Nt = poissrnd(lambda*dt,NPaths,NSteps+1);
Yi=normrnd(GammaPrime,Delta,NPaths,(NSteps+1)*2);
for i = 1:NPaths
    k=1;
    for j = 2:NSteps+1
        TJS=sum(Yi(i,k:(Nt(i,j-1)+k-1)));
        k=k+Nt(i,j-1);
        % Генериране на ценовите пътеки S(j,i)
        S(j,i)=S(j-1,i)*exp((r-div-lambda*kappa-
0.5*sigma^2)*dt+sigma*sqrt(dt)*Wt(i,j-1)+TJS);
    end
    % Функция на печалба за кол и пут опция съответно
    payoff = max(S(NSteps+1,i) - K, 0); % кол
    payoff1 = max(K - S(NSteps+1,i), 0); % пут
    Dpayoff(i) = payoff;
    suml = suml + payoff1;
end
% Пресмятане на премиумите на кол и пут опции
Euro_Call_Value = exp(-r*T)*(sum(Dpayoff)/NPaths);
Euro_Put_Value = exp(-r*T)*(suml/NPaths);
Parity=Euro_Call_Value-Euro_Put_Value - S0+ K*exp(-r*T);
% CI е 95% доверителен интервал за премиума на кол опция
[~,~,CI]=normfit(exp(-r*T)*Dpayoff);
end

```

Таблица 12. Оценка на опции чрез метод Монте Карло

| N      | Call      | Parity | Std Error | Time       |
|--------|-----------|--------|-----------|------------|
| $10^5$ | 11.595294 | 0.0795 | 0.1646    | 1.978 s    |
| $10^6$ | 11.536682 | 0.0198 | 0.0518    | 19.777 s   |
| $10^7$ | 11.534882 | 0.0082 | 0.0164    | 199.932 s  |
| $10^8$ | 11.533463 | 0.0034 | 0.0052    | 1822.838 s |

В Таблица 1 са представени резултатите, като с N е означен броят на симулираните ценови пътеки, с Call е означена цената на кол опцията, с Parity е означен пут-кол паритета, с Std Error е означена стандартната грешка на метода и с Time е означено времето, необходимо за изпълнение на кода на MATLAB.

Стандартната грешка на метода е равна на половината от дължината на доверителния интервал.

Очевидно, колкото повече ценови пътеки се използват за симулация, толкова по-точно се пресмята премиума на кол опцията, а абсолютната стойност на паритета намалява. Тъй като стандартната грешка при метода Монте Карло е от порядъка  $O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$ , то за да се увеличи точността с една десета е достатъчно да се увеличи стократно броят на генерираните ценови пътеки.

Необходимото ниво на точност при метода на Монте Карло се определя от финансови условия като например броя на опциите, които се търгуват. При големи количества опции, се налага достигане на висока точност. Недостатъкът на метода е неговата бавна сходимост, като например достигане на точност до четвъртия знак след десетичната запетая отнема повече от половин час, а използването на аналитичните формули едва 7 ms.

## ИЗВОДИ

Представените в доклада модели се прилагат в широк спектър от направления, а използването им не изисква задълбочени математически познания, което ги прави универсални.

Независимо от универсалността на Монте Карло методите, техен сериозен недостатък е слабата им сходимост, основана върху грешка с порядък  $O(N^{-1/2})$ . Според данни от Европейската грид инициатива ([www.egi.eu](http://www.egi.eu)), около 80% от общото процесорно време се използва от грид приложенията с Монте Карло пресмятания. Според данни от Департамента по енергетика на САЩ около 70% от компютърното време на изчислителните машини в департамента се използва за Монте Карло пресмятания (Todorov, V., 2017).

Голяма част от усилията в разработването на Монте Карло методите, са насочени към конструиране на методи с намалена дисперсия, които водят до ускоряване на сходимостта чрез намаляване на константата пред  $O(N^{-1/2})$  в оценката за грешката. Един друг подход за подобряване на сходимостта на Монте Карло методите е да се модифицира използваната случайна редица, т.е., да се замени чрез алтернативна редица, която подобрява степенния показател  $-1/2$ .

Важно е да отбележим, че ако съществува аналитичен начин за оценка на премиума на опцията, използването на методи Монте Карло не се препоръчва, заради бавната им сходимост. Въпреки това, те намират широко приложение във финансите. Това е така, защото на финансовите пазари най-често се търгуват по-сложни деривати, при които извеждането на аналитично решение е или невъзможно, или прекалено сложно. Такива са доста от екзотичните опции. Намирането на аналитично решение на диференциалното уравнение при такъв вид опции е сложна математическа задача. Това прави аналитичния подход непрактичен. Затова редица борсови дилъри, финансиста и финансови институции предпочитат да използват метода Монте Карло.

Докладът / статията отразява резултати от работата по проект No 2019 – ФПНО – 05, финансиран от фонд „Научни изследвания” на Русенски университет.

## REFERENCES

- Black, F., Scholes, M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy 81, 637 – 654
- Fama, E. (1970). *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*. Journal of Finance 25, 383-417
- Merton, R. C. (1973). *Theory of rational option pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science, 141 – 183
- Merton, R. C. (1976). *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*. Journal of Financial Economics 3, 125 – 144
- Milev, M. (2012). *Application of Matlab for Modeling and Evaluation of Financial Derivatives*. Econometrics, July 2012, Sofia
- Todorov, V. (2017). *Monte Carlo methods for multidimensional integrals and integral equations and applications*. Thesis, Sofia (**Оригинално заглавие:** Тодоров, В., 2017. Методи Монте Карло за многомерни интегрални и интегрални уравнения и приложения. Дисертация, София)

FRI-2.203-SSS-FMI-09

---

## TRAVELLING WAVES FOR THE FISHER–KOLMOGOROV– PETROVSKII–PISKUNOV EQUATION WITH EXAMPLES<sup>9</sup>

---

**Slavi Georgiev – Student**

Mathematical Modelling in Engineering,  
Department of Mathematics,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
E-mail: aslv@abv.bg

**Assoc. Prof. Julia Chaparova, PhD**

Department of Mathematics,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Phone: +359 82 888 226  
E-mail: jchaparova@uni-ruse.bg

**Abstract:** In this paper we consider the famous Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov partial differential equation, closely following (Kolmogorov, A. et. al., 1937). The subject is introduced as a biological problem of diffusing an advantageous gene. After the equation is formulated, the travelling-wave type solution is extensively studied. The first result discussed here concerns the existence of heteroclinic solutions for the corresponding ODE system depending on the travelling-wave rate which is not known in advance. The phase plane analysis is employed. The second result cited in this paper is about the intermediate asymptotic invariance of the solutions (as the time tends to infinity) for the initial value problem with respect to the initial data satisfying some boundary conditions. Finally, numerical experiments are presented and the paper concludes with some notes about the scientific vitality of the considered problem.

**Keywords:** Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation, advantageous gene, travelling wave, heteroclinic solution, intermediate asymptotic state.

### INTRODUCTION

The Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov (FKPP) equation plays a fundamental role in science since it was developed in 1937. It has not gained much popularity in biology, but has been applied in many areas of mathematical physics and been used as a ground for more sophisticated models. Firstly, R. Fisher published an article (Fisher, R., 1937) about the gene-advance-waves problem in biology. In the same year, A. Kolmogorov and his collaborators, based on the article and the Fisher’s book about the genetical theory, published earlier, developed a solid mathematical theory for the first time about a method for solution to the problem of the so called “intermediate asymptotics” in a non-linear problem in (Kolmogorov, A. et. al., 1937). They applied the concept to this particular problem. We will follow the latter, and illustrate the theorems with a couple of examples.

Let us consider a population, uniformly distributed in a linear habitat (e. g. a shore line). At some locus a mutation might occur, which leads to origination of a new gene. We will study the case the gene is advantageous to survival. This means we can expect the individuals with this mutant gene, in the struggle to existence, to increase their density at the expense of the individuals not having the gene, occupying the same place. Of course, this process firstly exhibits in the neighbourhood of the occurrence of the mutation, and later, the advantageous gene is diffused into the surrounding environment. If the considered domain is relatively long compared with the distance the offsprings travel from their parents, a wave of increase in the gene density occurs (Fisher, R., 1937).

---

<sup>9</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 17. 05. 2019 г. в секция „Финансова математика и информатика“ с оригинално заглавие на български език: ПЪТУВАЩИ ВЪЛНИ ЗА УРАВНЕНИЕТО НА ФИШЕР–КОЛМОГОРОВ–ПЕТРОВСКИЙ–ПISKUNOV С ПРИМЕРИ.

More rigorously, let at some time  $t$  the dominant gene  $A$  is distributed over the area with density  $v(x, t)$ . Furthermore, the species with the gene  $A$  (belonging to the genotypes  $AA$  and  $Aa$ ) have an advantage in survival over the species not possessing this gene (belonging to the genotype  $aa$ ). To put it in a more precise way, the ratio of the probability that an individual with the gene  $A$  survives to the corresponding probability for an individual without the gene is

$$1 + \alpha : 1,$$

where  $0 < \alpha \ll 1$ .

Let us now consider the case when some area has already been populated by species with the gene  $A$  with concentration  $v$  close to 1. If  $v$  changes smoothly (in the sense  $v$  is a smooth function w. r. t.  $x$  and  $t$ ), it is natural to assume that there exists an intermediate concentration region along the boundary of the area, where the concentration is between 0 and 1. In view of positive selection, the area occupied by the gene  $A$  expands, i. e. its boundary moves towards places that have not been yet occupied by the gene  $A$ , and the intermediate concentration region always remains. Our first problem is to find the *rate of advance of the gene A*, in other words, the rate of which the boundary of the area occupied by  $A$  moves along the normal to this boundary. This rate is denoted by  $\lambda$ . The next problem is to find a functional dependence of the gene propagation and its density for every spatial point  $x$  and every time  $t$ .

### FORMULATION OF THE PROBLEM

Let  $v$  be the density of the mutant gene  $A$ , and  $w = 1 - v$  that of its only alternative allelomorph. Let  $\alpha$  be the intensity of selection in favour of the mutant gene, supposed independent of  $v$ . If we suppose that the rate of diffusion per generation across any boundary may be expressed as

$$-k \frac{\partial v}{\partial x}$$

at that boundary, then  $v$  satisfies the partial differential equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha v(1 - v), \quad (1)$$

where  $t$  stands for time in generations (Fisher, R., 1937).

The coefficient  $k > 0$  is the coefficient of diffusion analogous to that used in physics. The use of this analogy is justified when the distances of dispersion in a single generation are small compared with the length of the wave. We will consider the simple case when  $k$  is constant.

The equation (1) can be interpreted in the following way. If we neglect the diffusion term, this means there are no movement of the offspring from their parents, we arrive at a logistic equation or Verhulst model:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha v(1 - v).$$

The above equation models the change of a population having a growth rate  $\alpha$ , which is also called the Malthusian parameter. When a diffusion term is added, it means that a bump somewhere in the quantity  $v$  will propagate in space  $x$ .

Let us now consider the more general case of the diffusion equation, where the diffusion term is accompanied by increase in the amount of substance at a rate which depends on the density at given point and time. We then obtain the equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F(v). \quad (2)$$

We are only interested in the values of  $F(v)$  for  $v \geq 0$ . Assume that  $F(v)$  is a continuous and differentiable function, satisfying

$$\begin{aligned} F(0) &= F(1) = 0, \\ F(v) &> 0 \text{ for } 0 < v < 1, \\ F'(0) &= \alpha > 0, F'(v) < \alpha \text{ for } 0 < v \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

We thus assume for very small  $v$  the rate  $F(v)$  of increase in  $v$  is proportional to  $v$  (linear with proportionality factor  $\alpha$ ), and as  $v$  approaches 1, it is reached a state of saturation when  $v$  no longer increases. Accordingly we will consider only solutions to (2) satisfying the condition

$$0 \leq v \leq 1.$$

Let us recall that  $v$  is the density of the gene  $A$  in point  $x$  and time  $t$ . As we already mentioned, it is natural to seek the solution to (2) in the form of a *travelling wave*:

$$v(x, t) = v(x + \lambda t),$$

where  $\lambda$  is the speed of the wave (fig. 1).

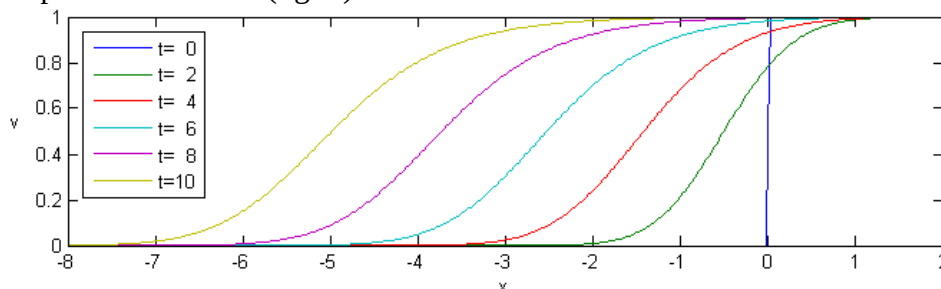


Fig. 1. Example of a travelling wave

Then equation (2) becomes a second order ordinary differential equation

$$\lambda \frac{dv}{dx} = k \frac{d^2v}{dx^2} + F(v). \quad (4)$$

We are going to establish a relation between  $\lambda$ ,  $k$  and  $\alpha = F'(0)$  for which (4) has a solution  $v(x)$  such that

$$0 \leq v(x) \leq 1, \quad v(-\infty) = 0, \quad v(+\infty) = 1.$$

Such solution  $v(x)$  to (4) is called a *heteroclinic solution*.

## EXPOSITION AND SOLUTION

The following theorem could be proven.

**Theorem 1.** Equation (4) has a unique (to within a translation  $x' = x + c$ ) heteroclinic solution  $v(x)$ , s. t.  $0 \leq v(x) \leq 1$ ,  $v(-\infty) = 0$ ,  $v(+\infty) = 1$ ,  $v'(\pm\infty) = 0$  for  $\forall \lambda \geq \lambda_0$ , where  $\lambda_0 = 2\sqrt{k\alpha}$ .

**Proof.** Let  $\frac{dv}{dx} =: p$ . Then substituting in (4) yields

$$\frac{dp}{dv} = \frac{\lambda p - F(v)}{kp}. \quad (5)$$

We are interested in those integral curves of (5) that pass between the straight vertical lines  $v = 0$  and  $v = 1$  in the phase plane  $Ovp$ . Generally, these curves can be of the following types:

1. Integral curves that are separated from the lines  $v = 0$  and  $v = 1$  by at least a distance  $\epsilon > 0$ ;
2. Integral curves that go infinitely far away from the axis  $v$  and asymptotically approach one of the lines  $v = 0$  or  $v = 1$ ;
3. Integral curves that intersect one of the lines  $v = 0$  or  $v = 1$  at a finite point lying below or above the  $v$ -axis;
4. Integral curves that approach the points  $v = 0, p = 0$  and  $v = 1, p = 0$  and do not belong to any of the former types.

It can be seen, however, that integral curves of the first type cannot satisfy the boundary conditions  $v(-\infty) = 0$ ,  $v(+\infty) = 1$ .

Integral curves of second type are not solutions to (4) since for large  $|p|$  the derivative  $\left|\frac{dp}{dv}\right|$  should also be arbitrary large. However, from (5) we have that  $\frac{dp}{dv} = \frac{\lambda p - F(v)}{kp} \approx \frac{\lambda}{k}$  for large  $|p|$  in view of the boundedness of  $F(v)$  in  $(0, 1)$ .

Integral curves from the third type do not necessarily remain between 0 and 1. Then it remains to consider integral curves of the fourth type. Each of the points  $v = 0, p = 0$  and  $v = 1, p = 0$  is a singular point of the differential equation (5). An integral curve of the fourth type should approach each of these points without intersecting the lines  $v = 0$  and  $v = 1$  and therefore it does not twist. Thus, in order such curves to exist, the characteristic equation for each of these points should have real roots. We write (5) in the equivalent autonomous form

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \lambda p - F(v) \\ \frac{dv}{dt} = kp \end{cases}.$$

The linearized system around  $v = 0, p = 0$  is

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \lambda p - \alpha v \\ \frac{dv}{dt} = kp \end{cases}$$

with characteristic equation

$$\begin{vmatrix} \lambda - \rho & -\alpha \\ k & -\rho \end{vmatrix} = 0$$

or  $\rho^2 - \lambda\rho + k\alpha = 0$ . The equation has real roots when

$$\lambda^2 \geq 4k\alpha$$

and they are  $\rho_{1,2} = \frac{(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4k\alpha})}{2}$ , respectively. Obviously  $\rho_{1,2} > 0$  and the singular point  $v = 0, p = 0$  is unstable node for the linearized system and for (5).

Considering  $v = 1, p = 0$ , we make a change of variables, putting  $v = 1 - u$ . This yields

$$\frac{dp}{du} = \frac{-\lambda p + F(1 - u)}{kp}.$$

The corresponding autonomous system is

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\lambda p + F(1 - u) \\ \frac{du}{dt} = kp \end{cases}$$

and the linearized counterpart is

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\lambda p - F'(1 - u)|_{u=0}u \\ \frac{du}{dt} = kp \end{cases}.$$

The characteristic equation is

$$\begin{vmatrix} -\lambda - \rho & -F'(1) \\ k & -\rho \end{vmatrix} = 0$$

or  $\rho^2 + \lambda\rho - Ak = 0$ , where  $A = -F'(1) > 0$ . This equation always has real roots since  $\lambda^2 > -4Ak$

and they are  $\rho_{1,2} = \frac{(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4Ak})}{2}$ . Clearly,  $\text{sgn} \rho_1 \neq \text{sgn} \rho_2$  so the point  $v = 1, p = 0$  is a saddle. Since the saddle is a hyperbolic stationary point, from the Stable Manifold Theorem (Perko, L., 1991, p. 104) follows that there exist only two integral curves I and II through  $v = 1, p = 0$  (fig. 2) s. t. one of them is stable manifold of the nonlinear system, which is tangent to the stable subspace of the linearized system, and the other is unstable manifold, which is tangent to the unstable subspace in the point  $v = 1, p = 0$ .



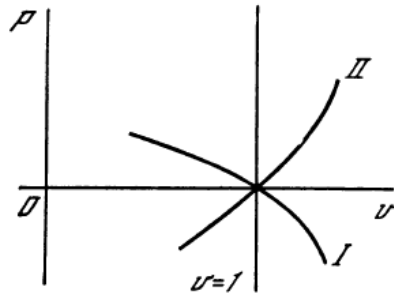


Fig. 2. Approximate configuration of curves I and II

The curve II intersects  $p$ -axis below the origin since (5) implies

$$\frac{dp}{dv} = \frac{\lambda p - F(v)}{kp} = \frac{\lambda}{k} - \frac{F(v)}{kp} > 0$$

in the part of the strip between  $v = 0$  and  $v = 1$  that lies below the  $v$ -axis. Therefore the curve II can be excluded from further considerations and it remains to study curve I.

We will first prove that curve I does not intersect  $Op$  below the origin. For that purpose we consider the isoclines of (5). The isoclines are curves, on which the different solutions to (5) attain the same slope, i. e.

$$\frac{dp}{dv} = \frac{\lambda p - F(v)}{kp} \equiv \text{const} = C.$$

Thus all isoclines of (5) are given by

$$p = \frac{F(v)}{\lambda - Ck}. \quad (6)$$

This means that all the isoclines coincide with the graph of  $F(v)$ , multiplied by the respective constant (fig. 3).

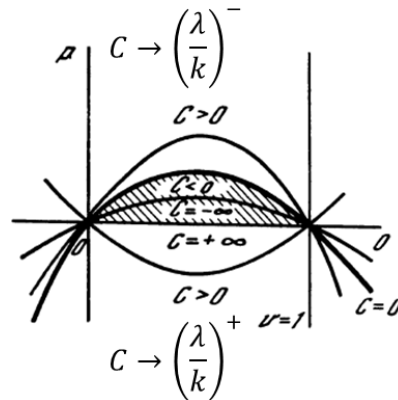


Fig. 3. Isoclines of (5)

Now it is easily seen that the integral curve I cannot intersect the axis  $Op$  below the origin. Indeed, in this case the curve I should grow from the point below the origin until it crosses the axis  $Op$  between 0 and 1 with vertical tangent ( $\frac{\partial p}{\partial v} \rightarrow +\infty$  below  $Op$ ) and after that it should go back ( $\frac{\partial p}{\partial v} \rightarrow +\infty$  above  $Op$ ), never reaching the point  $(v = 1, p = 0)$ .

We will now prove that the integral curve I cannot intersect the  $p$ -axis above the origin. To this end it suffices to prove that there exists a ray passing through the origin and lying in the first quadrant that does not intersect any integral curve intersecting the positive semi-axis  $p$ . From (6) we have

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_{v=0} = \frac{\alpha}{\lambda - Ck}.$$

We now find  $C$  for which  $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{v=0} = C$ . This  $C$  defines an isocline which slope at the origin is  $C$  and the slope of all integral curves of (5) on it is also  $C$ . Equating yields  $kC^2 - C\lambda + \alpha = 0$  and eventually

$$C_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha k}}{2k}.$$

Having assumed that  $\lambda^2 \geq 4\alpha k$ , both  $C_{1,2}$  are real and positive. Let one of them is denoted by  $C_0$ . Consider the line  $p = C_0 v$ . For all the points from the strip between  $v = 0$  and  $v = 1$  that lie above the line, and even on the line itself (except for the origin), we have  $\frac{dp}{dv} > C_0$ . Therefore none of the integral curves passing through a point on the  $p$ -axis above the origin can cross part of the line located above the  $v$ -axis. Thus each integral curve of type I passes through the origin.

Now we will prove that there exists only one integral curve of type I. (This is valid for  $A > 0$ ; if  $A = -F'(1) = 0$ , uniqueness cannot be stated.) Indeed, we have proven that all curves of type I pass through the origin. On the other hand, it follows from (5) that for  $p > 0$  and fixed  $v$  the derivative  $\frac{dp}{dv}$  increases with  $p$ . It follows that two integral curves issuing from the origin cannot pass through the point  $v = 1, p = 0$ .

Finally it can be shown that the curve I corresponds to the solution to (4) and satisfies the conditions (3).

Next, we will state the following theorem, omitting the proof.

**Theorem 2.** For every initial function  $v(x, 0) = v_0(x)$  such that  $v(x, 0) \equiv 0$  for  $x \leq a$  and  $v(x, 0) \equiv 1$  for  $x \geq b$  ( $a < b$ ) and  $v(x, 0)$  taking arbitrary values between 0 and 1 for  $a < x < b$  the initial value problem for the equation (2) with  $F$  satisfying conditions (3) possesses unique solution  $v(x, t)$ . As  $t \rightarrow \infty$  the solution  $v(x, t)$  tends to a solution  $v(x + \lambda_0 t + c)$  for the equation (4) with  $\lambda_0 = 2\sqrt{k\alpha}$  and unique value of  $c$ .

An example illustrating this phenomenon is included in the following section.

### NUMERICAL EXAMPLE

Let us consider (1) again. In (Polyanin, A. & Zaitsev, V., 2004) the authors have found analytical travelling wave solution to (1) as

$$v(x, t) = \frac{1}{\left(-1 + C \exp\left(\frac{-5\alpha}{6}t - \sqrt{\frac{\alpha}{6k}}x\right)\right)^2} = v\left(x + 5\frac{\sqrt{\alpha k}}{\sqrt{6}}t\right).$$

Note that the travelling wave solution  $v(z)$  satisfies the boundary conditions  $v(-\infty) = 0, v(+\infty) = 1$ . Note also that the speed of the wave is  $\lambda = \frac{5}{\sqrt{6}}\sqrt{\alpha k} > 2\sqrt{\alpha k}$ .

Now we are going to illustrate numerically Theorem 2. We consider the initial value problem for the equation (1) subjected to two different initial data. As expected, the limiting curves of the solutions as  $t \rightarrow \infty$  coincide (to within the translation  $x' = x + c$ ).

For the numerical solutions we have to truncate the spatial domain from  $(-\infty, +\infty)$  to  $[-L, L]$ , where  $L > 0$  is a large number. What is more, we impose the boundary conditions of Dirichlet type, considering the asymptotical behaviour at infinity:

$$v(-L, t) = 0, \quad v(L, t) = 1.$$

For the numerical experiments we take the following parameters:  $L = 10, k = 0.1, \alpha = 1, T = 10$ , there  $T$  is the final time. The first example (fig. 4) is conducted with the “classical” initial condition

$$v(x, 0) = v_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-10, 0], \\ 1, & x \in (0, 10]. \end{cases}$$

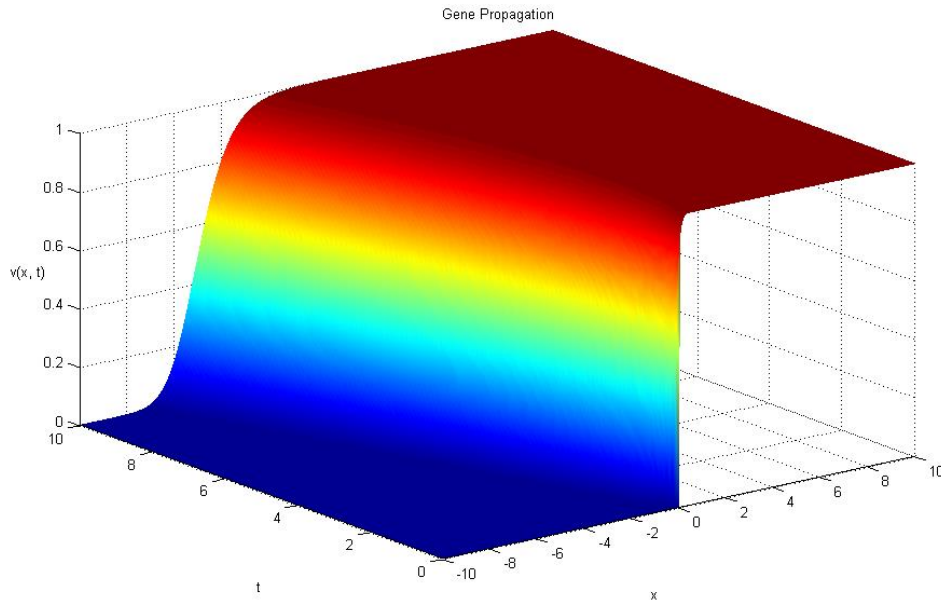


Fig. 4. Solution to (1)

As expected, the discontinuity in the initial data is smoothed, an intermediate region with  $v \in (0,1)$  is formed and the wave is travelling in the negative direction.

Of course, the initial condition  $v_0(x)$  could be every function satisfying  $0 \leq v \leq 1$ . The next example (fig. 5) has the initial condition

$$v(x, 0) = v_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-10, -2], \\ \frac{1}{4}, & x \in (-2, 0], \\ 0, & x \in (0, 6], \\ 1, & x \in (6, 10]. \end{cases}$$

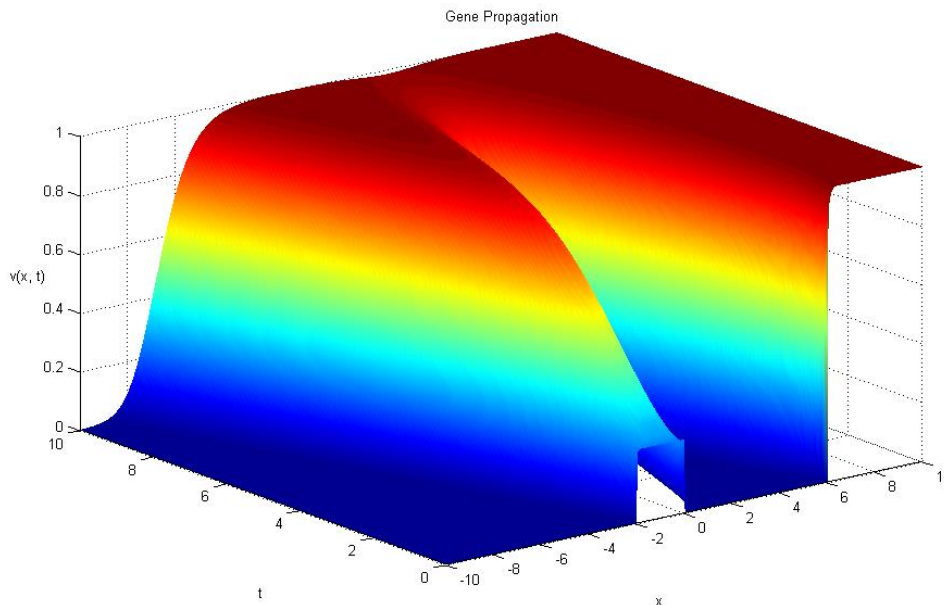


Fig. 5. Solution to (1)

Analogously to the previous case, the area with low density of the dominant gene is wiped out and absorbed by the waves, which can travel in both negative and positive directions.

What is more, the limiting curves of the travelling waves from the different initial conditions  $v_0(x)$  practically coincide within the translation  $x' = x + 1.7$ : the maximum norm  $\|v_4(\cdot, T) - v_5(\cdot, T)\|_\infty < 10^{-3}$  due to numerical roundoff (fig. 6).

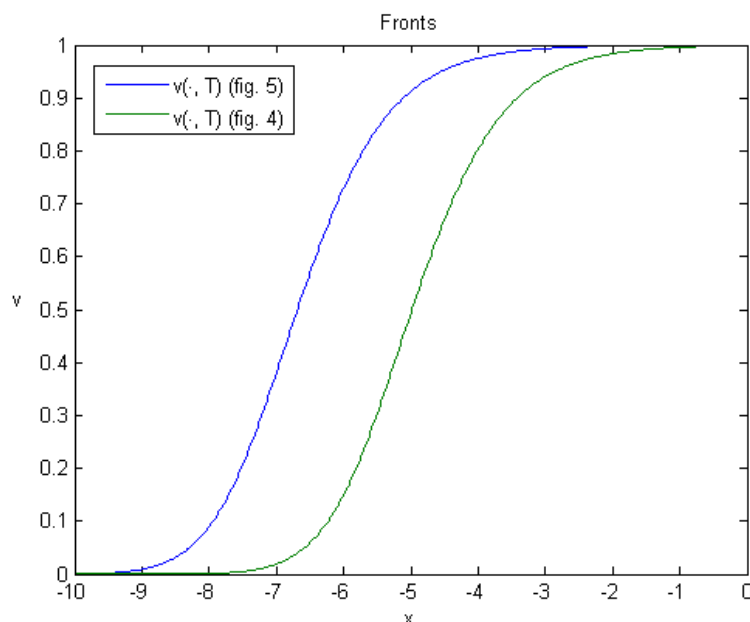


Fig. 6. Travelling wave fronts with both the initial conditions  $v_0(x)$ .

## CONCLUSION

In this paper the Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation is studied, which is essentially a diffusion equation with a special nonlinear right-hand side. It is shown that the equation has invariant solutions of travelling-wave type. The described process is notable in the sense that as it continues at an “intermediate asymptotic” state, it becomes independent from the initial condition, but the system is far from its equilibrium state.

Although it has not attracted much attention in biology, it turned out to be very useful in the theory of burning and flame propagation. What is more, it has influenced the theory development for a lot of problems, including the well-known problem for the electrochemical model of exciting pulse propagation along a nerve, plasma front propagation through different types of fields and problems in other areas of physics and science.

This paper contains results of the work on project № 2019 – FNSE – 05, financed by “Scientific Research” Fund of Ruse University.

## REFERENCES

- Fisher, R. (1937). *The wave of advance of advantageous genes*. Annals of Eugenics, 7(4), 355-369.
- Kolmogorov, A. N., Petrovskii, I. G., & Piskunov, N. S. (1937). In Selected works of A. N. Kolmogorov, ed. by Tikhomirov, V. M. (1991). *A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem*, Kluwer Academics, 242-270.
- Perko, L. (1991). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag.
- Polyanin, A. D., & Zaitsev, V. F. (2004). *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton: CRC Press.

**UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV“**

**UNION OF SCIENTISTS - RUSE**



**59-TH ANNUAL SCIENTIFIC CONFERENCE  
OF UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV“  
AND UNION OF SCIENTISTS – RUSE**

**23-24 OCTOBER 2020**

**I N V I T A T I O N**

**Ruse, 8 Studentska str.  
University of Ruse  
Bulgaria**

PROCEEDINGS  
Volume 58, Series 6.5.

**Financial Mathematics  
&  
Informatics**

Under the general editing of:  
**Assoc. Prof. Juri Kandilarov, PhD,**  
**Slavi Georgiev**

**Editor of Volume 58:**  
**Prof. Diana Antonova, PhD**

**Bulgarian Nationality**  
**First Edition**

**Printing format: A5**  
**Number of copies: on-line**

**ISSN 1311-3321 (print)**  
**ISSN 2535-1028 (CD-ROM)**  
**ISSN 2603-4123 (on-line)**

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.  
The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access



**PUBLISHING HOUSE**  
**University of Ruse "Angel Kanchev"**