

ISSN 1311-3321 (print)  
ISSN 2535-1028 (CD-ROM)  
ISSN 2603-4123 (on-line)

**UNIVERSITY OF RUSE “Angel Kanchev”**  
**РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ “АНГЕЛ КЪНЧЕВ”**

**BSc, MSc and PhD Students & Young Scientists**  
**Студенти, докторанти и млади учени**

**PROCEEDINGS**

**Volume 62, book 6.5.**  
**Financial Mathematics**  
**&**  
**Informatics**

**НАУЧНИ ТРУДОВЕ**

**Том 62, серия 6.5.**  
**Финансова математика**  
**&**  
**Информатика**

**Ruse**  
**Русе**  
**2023**

Volume 62 of PROCEEDINGS includes the papers presented at the scientific conference RU&SU'23, organized and conducted by University of Ruse "Angel Kanchev" and the Union of Scientists - Ruse. Series 6.5 contains papers reported in the Financial Mathematics and Informatics sections.

<b>Book</b>	<b>Code</b>	<b>Faculty and Section</b>
<b>Agrarian and Industrial Faculty</b>		
<b>1.1.</b>	FRI-ONLINE-1-AMT&ASVM	Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Science and Veterinary Medicine
	FRI-ONLINE-1-MR	Maintenance and Reliability
	FRI-ONLINE-1-THPE	Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment
	FRI-ONLINE-1-EC	Ecology and Conservation
	FRI-ONLINE-1-ID	Industrial Design
<b>1.2.</b>	WED-ONLINE-SSS-AMT&ASVM	Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Science and Veterinary Medicine
	WED-ONLINE-SSS- MR	Maintenance and Reliability
	WED-ONLINE-SSS-THPE	Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment
	WED-ONLINE-SSS-EC	Ecology and Conservation
	WED-ONLINE-SSS-ID	Industrial Design
<b>Faculty of Mechanical and Manufacturing Engineering</b>		
<b>2.1.</b>	FRI-ONLINE-1-MEMBT	Mechanical Engineering and Machine-Building Technologies
<b>2.2.</b>	WED-ONLINE-SSS-MEMBT	Mechanical Engineering and Machine-Building Technologies
<b>Faculty of Electrical Engineering Electronics and Automation</b>		
<b>3.1.</b>	FRI-ONLINE-1-EEEE	Electrical Engineering, Electronics and Automation
<b>3.2.</b>	FRI-ONLINE-1-CCT	Communication and Computer Technologies
<b>3.3.</b>	THU-ONLINE-SSS-EEEE	Electrical Engineering, Electronics and Automation
	THU-ONLINE-SSS-CCT	Communication and Computer Technologies
<b>Faculty of Transport</b>		
<b>4.1.</b>	FRI-2.209-1-TMS	Transport and Machine Science
<b>4.2.</b>	FRI-2.204-SITSTL	Sustainable and Intelligent Transport Systems, Technologies and Logistics
<b>4.3.</b>	WED-ONLINE-SSS-TMS	Transport and Machine Science
<b>Faculty of Business and Management</b>		
<b>5.1.</b>	FRI-ONLINE-1-EM	Economics and Management
<b>5.2.</b>	FRI-ONLINE-1-LIPC	Linguoculturology, Intercultural and Political Communication
<b>5.3.</b>	THU-ONLINE-SSS-EM	Economics and Management
<b>5.4.</b>	FRI-ONLINE-1-ESIS	European Studies and International Security
<b>8.2.</b>	FRI-ONLINE-1-SW	Social Work
<b>Faculty of Natural Sciences and Education</b>		
<b>6.1.</b>	FRI-ONLINE-1-MIP	Mathematics, Informatics and Physics
<b>6.2.</b>	FRI-ONLINE-1-PP	Pedagogy and Psychology
<b>6.3.</b>	FRI-ONLINE-1-LL	Linguistics and Literature
	FRI-ONLINE-1-AS	Art Studies
<b>6.4.</b>	FRI-ONLINE-1-ERI	Education - Research and Innovations

6.5.	THU-ONLINE-SSS-FM	Financial Mathematics
	THU-ONLINE-SSS-PP	Pedagogy and Psychology
<b>Faculty of Law</b>		
7.1.	FRI-ONLINE-1-LS	Law Studies
7.2.	FRI-ONLINE-1-NS	National Security
7.3.	MON-ONLINE-SSS-L	Law Studies
<b>Faculty of Public Health and Health Care</b>		
8.1.	FRI-ONLINE-1-HP	Health Promotion
8.3.	FRI-ONLINE-1-HC	Health Care
8.4.	FRI-ONLINE-1-MCDA	Medical and Clinical Diagnostic Activities
8.5.	THU-ONLINE-SSS-HP	Health Promotion
	FRI-ONLINE-SSS-HC	Health Care
	THU-ONLINE-SSS-MCDA	Medical and Clinical Diagnostic Activities
<b>Quality of Education Directorate</b>		
9.1.	FRI-ONLINE-QHE	Quality of Higher Education
<b>Razgrad Branch of the University of Ruse</b>		
10.1.	FRI-LCR-1-CT(R)	Chemical Technologies
10.2.	FRI-LCR-1-BFT(R)	Biotechnologies and Food Technologies
10.3.	TUE-ONLINE-SSS-BFT(R)	Biotechnologies and Food Technologies
	TUE-ONLINE-SSS-CT(R)	Chemical Technologies
<b>Silistra Branch of the University of Ruse</b>		
11.1.	FRI-ONLINE-DPM(S)	Didactics, Pedagogy and Methodology of training in...
	FRI-ONLINE-LTLHF(S)	Linguistics; Theory of Literature and History; Philosophy
	FRI-ONLINE-ELENSTS(S)	E-Learning; Electrical; Technical Sciences
11.2.	FRI-ONLINE-SSH(S)	Humanities
	FRI-ONLINE-SSS-PPTM(S)	Pedagogy, Psychology, and Teaching Methodology
	FRI-ONLINE-SSS-TS(S)	Technical Sciences

The papers have been reviewed.

**ISSN 1311-3321 (print)**

**ISSN 2535-1028 (CD-ROM)**

**ISSN 2603-4123 (on-line)** Copyright © authors

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.

The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access



## PROGRAMME COMMITTEE

- **Prof. Amar Ramdane-Cherif**  
University of Versailles, France
- **Assoc. Prof. Manolo Dulva HINA**  
ECE Paris School of Engineering, France
- **Prof. Leon Rothkrantz**  
Delft University of Technology, Netherlands
- **Assoc. Prof. Antonio Jose Mendes**  
University of Coimbra, Portugal
- **Prof. Ville Leppanen**  
University of Turku, Finland
- **Assoc. Prof. Marco Porta**  
University of Pavia, Italy
- **Prof. Douglas Harms**  
DePauw University, USA
- **Prof. Zhanat Nurbekova**  
L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur Sultan, Kazakhstan
- **Prof. Mirlan Chynybaev**  
Kyrgyz State Technical University, Bishkek, Kyrgyzstan
- **Prof. Ismo Hakala, PhD**  
University of Jyväskylä, Finland
- **Prof. Artur Jutman, PhD**  
Tallinn University of Technology, Estonia
- **Prof. RNDr. Vladimír Tvarozek, PhD**  
Slovak University of Technology in Bratislava, Bratislava, Slovakia
- **Assoc. Prof. Ing. Zuzana Palkova, PhD**  
Slovak University of Agriculture in Nitra, Nitra, Slovakia
- **Andrzej Tutaj, PhD**  
AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland
- **Prof. Valentin NEDEFF Dr. eng. Dr.h.c.**  
“Vasile Alecsandri” University of Bacău, Romania
- **Cătălin POPA, PhD**  
“Mircea cel Bătrân” Naval Academy, Constantza, Romania
- **Prof. dr Larisa Jovanović**  
Alfa University, Belgrade, Serbia
- **Prof. dr hab. Edmund LORENCOWICZ**  
University of Life Sciences in Lublin, Poland
- **Assoc. Prof. Ion MIERLUS - MAZILU, PhD**  
Technical University of Civil Engineering, Bucharest, Romania
- **Prof. Dojčil Vojvodić PhD**  
Faculty of Philosophy, University of Novi Sad, Serbia
- **Prof. Alberto Cabada**  
University of Santiago de Compostela, Faculty of Mathematics, Santiago de Compostela, Spain
- **Kamen Rikev, PhD**  
Institute of Slavic Philology, Maria Curie-Skłodowska University in Lublin, Poland
- **Prof. Ricardo Gobato, PhD**  
Secretariat of State of Parana Education and Sport (SEED/PR), Laboratory of Biophysics and Molecular Modeling Genesis
- **Prof. Fatima Rahim Abdul Hussein, PhD**  
University of Misan, College of Basic Education, English Department, Iraq

- **Prof. Liqaa Habeb Al-Obaydi, PhD**  
English Department, College of Education for Human Science, University of Diyala, Iraq
- **Dra. Clotilde Lechuga Jiménez, PhD**  
Social Science Education, Education Science Faculty (Teatinos Campus), University of Malaga, Spain
- **Prof. Dr. Mehmet Şahin, PhD**  
Mersin University, Faculty of Education, Department of Curriculum and Instruction, Turkey
- **Prof. Igor Kevorkovich Danilov, DSc**  
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia
- **Prof. Aleksander Valentinov Sladkowski, DSc**  
Silesian University of Technology, Poland
- **Prof. Vera Karadjova, PhD**  
“St. Kliment Ohridski” University – Bitola, Faculty of tourism and hospitality – Ohrid, Republic of North Macedonia
- **Prof. Aleksandar Trajkov, PhD**  
“St. Kliment Ohridski” University - Bitola, Faculty of tourism and hospitality – Ohrid, Republic of North Macedonia
- **Prof. Petar Pepur, PhD**  
University of Split, Croatia
- **Prof. Korhan Arun, PhD**  
Namik Kemal University, Tekirdağ, Turkey
- **Prof. Yuliya Yorgova, PhD**  
Burgas Free University, Bulgaria
- **Jelena Stankovic, PhD**  
University of Nis, Serbia
- **Prof. Dr. Diana E. Woolfolk Ruiz**  
CETYS University, Mexico
- **Prof. Gerhard Fiolka, PhD**  
University of Fribourg, Switzerland
- **Prof. Haluk Kabaalioglu, PhD**  
Yeditepe University, Turkey
- **Prof. Silva Alves, PhD,**  
University of Lisbon, Portugal
- **Hanneke van Brugge, DHC mult**  
Appeldoorn, The Netherlands
- **Prof. Elena Torina**  
Tula State Pedagogical University "L. N. Tolstoy", Tula, Russia
- **Prof. Violeta Jotova**  
Direction Pediatrics at St. Marina University Hospital - Varna, Bulgaria, Chair ESPE Postgraduate Qualification Committee
- **Prof. Tanya Timeva, MD, PhD**  
Obstetrics and Gynecology Hospital "Dr. Shterev", Sofia, Bulgaria
- **Prof. Kiril Stoychev, PhD,**  
Institute of Metal Science, Equipment and Technologies “Acad. A. Balevsci” with Haydroaerodinamics centre – BAS, Bulgaria
- **Assoc. Prof. Mark Shamtsyan, PhD**  
Technical University, Saint Petersburg, Russia
- **Assoc. Prof. Oleksii Gubenia, PhD**  
National University of Food Technologie, Kiev, Ukraine
- **Prof. Olexandr Zaichuk, DSc**  
Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnepropetrovsk, Ukraine
- **Prof. Eugene Stefanski, DSc**  
Samara University, Russia

- **Assoc. Prof. Tatiana Strokovskaya, PhD**  
International University of Nature “Dubna”, Dubna, Russia
- **Prof. DSc. Petar Sotirow**  
Maria Curie-Sklodowska University of Lublin, Poland
- **Prof. Papken Ehasar Hovsepian**  
Sheffield Hallam University, Sheffield, UK
- **Accos. Prof. Krassimir Dochev Dochev, PhD**  
University of Portsmouth School of Engineering, UK
- **Mariana Yordanova Docheva, PhD**  
University of Portsmouth School of Engineering, UK
- **Assoc. Prof. Ivan Antonov Lukanov, PhD**  
University of Botswana, Faculty of Engineering and Technology, Gaborone, Botswana
- **Assoc. Prof. Petko Vladev Petkov, PhD**  
Research Associate Cardiff University, UK
- **Prof. Stepan Terzian DSc**  
Bulgarian Academy of Science, Bulgaria
- **Prof. Gabriel Negreanu, PhD**  
University Politehnica of Bucharest, Romania

## ORGANISING COMMITTEE

◆ **ORGANIZED BY: UNIVERSITY OF RUSE (UR) AND UNION OF SCIENTISTS (US) - RUSE**

◆ **ORGANISING COMMITTEE:**

● **Chairperson:**

Prof. DTSc. Hristo Beloev, DHC mult., Academician of Bulgarian Academy of Sciences - Rector of UR, Chairperson of US - Ruse

● **Scientific Secretary:**

Prof. Diana Antonova, DSc  
dantonova@uni-ruse.bg, 082/888 249

● **THEMATIC FIELDS:**

- **Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Sciences and Veterinary Medicine**
- **Maintenance and Reliability**
- **Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment**
- **Ecology and Conservation**
- **Industrial Design**  
Assoc. Prof. Plamen Manev, PhD  
pmanev@uni-ruse.bg, +359 82 888 485
- **Pedagogy; Psychology and Methodology of training in...;** (27.10.23, Silistra)  
Assoc. Prof. Diana Zhelezova-Mindizova, PhD,  
dmindizova@uni-ruse.bg
- **Philology;** (27.10.23, Silistra)  
Assoc. Prof. Rumiana Lebedova, PhD  
rlebedova@uni-ruse.bg
- **Technical Sciences;** (27.10.23, Silistra)  
Assoc. Prof. Evgenia Goranova, PhD,  
egoranova@uni-ruse.bg
- **Chemical Technologies** (03-04.11., Razgrad)
- **Biotechnologies and Food Technologies** (03-04.11., Razgrad)  
Assoc. Prof. Tzvetan Dimitrov  
conf\_rz@abv.bg, +359 887 631 645
- **Mechanical Engineering and Machine-building Technologies**  
Prof. Ivelin Ivanov, PhD  
ivivanov@uni-ruse.bg, +359 82 888 472
- **Electrical Engineering, Electronics and Automation**  
Assoc. Prof. Boris Evstatiev, DSc  
bevstatiev@uni-ruse.bg, +359 82 888 371
- **Communication and Computer Systems**  
Assoc. Prof. Galina Ivanova, PhD, giivanova@uni-ruse.bg, +359 82 888 855  
Assoc. Prof. Adriana Borodzhieva, PhD, aborodzhieva@uni-ruse.bg, +359 82 888 734
- **Transport and Machine Science**  
Assoc. Prof. Simeon Iliev, PhD  
spi@uni-ruse.bg, +359 82 888 331

- **Sustainable and Intelligent Transport Systems, Technologies and Logistics**  
Prof. Velizara Pencheva, PhD  
vpencheva@uni-ruse.bg, +359 82 888 558, +359 82 888 608
- **Economics and Management**  
Pr. Assist. Miroslava Boneva, PhD, mboneva@uni-ruse.bg, +359 82 888 776  
Pr. Assist. Elizar Stanev, PhD, eastanev@uni-ruse.bg, +359 82 888 557
- **European studies and International Security**  
Prof. Vladimir Chukov, DSc, spi@uni-ruse.bg, +359 82 825 667
- **Mathematics, Informatics and Physics**  
Prof. Tsvetomir Vasilev, PhD  
tvasilev@uni-ruse.bg, +359 82 888 475
- **Education - Research and Innovations**  
Assoc. Prof. Emilia Velikova, PhD  
evelikova@uni-ruse.bg, +359 885 635 874
- **Pedagogy and Psychology**  
Assoc. Prof. Bagryana Ilieva, PhD  
bilieva@uni-ruse.bg, +359 82 888 219
- **History, Ethnology and Folklore**  
Pr. Assist. Reneta Zlateva, PhD  
rzlateva@uni-ruse.bg, +359 82 888 752
- **Linguistics, Literature and Art Science**  
Assoc. Prof. Velislava Doneva, PhD  
doneva\_v@uni-ruse.bg, +359 886 060 299
- **Health Promotion**  
Assoc. Prof. Stefka Mindova, PhD  
smindova@uni-ruse.bg, +359 882 895 149
- **Social Work**  
Pr. Assist. Ana Popova, PhD  
sipopova@uni-ruse.bg, +359 889 874 219
- **Medical and Clinical Diagnostic Activities**  
Pr. Assist. Deniza Trancheva, PhD  
dtrancheva@uni-ruse.bg, +359 82 888 410
- **Health care**  
Assist. Veselka Mihailova, PhD  
vmihaylova@uni-ruse.bg, +359 879586861
- **Law**  
Assoc. Prof. Elitsa Kumanova, PhD  
ekumanova@uni-ruse.bg, +359 884 980 050
- **National Security**  
Assoc. Prof. Milen Ivanov, DSc  
poligon@abv.bg, +359 82 888 736
- **Quality of Higher Education**  
Prof. Ivanichka Serbezova, PhD, iserbezova@uni-ruse.bg  
Daniela Todorova, dtodorova@uni-ruse.bg, +359 82 888 378



• **REVIEWERS:**

**FINANCIAL MATHEMATICS**

- Prof. Angela Slavova, DSc
- Assoc. Prof. Iliya Brayonov, PhD
- Assoc. Prof. Evelina Veleva, PhD

**INFORMATICS**

- Accos. Prof. Desislava Atanasova, PhD
- Accos. Prof. Desislava Baeva, PhD

## FINANCIAL MATHEMATICS

### Content

1. <b>FRI-2.203-SSS-FM-01</b>	12
<b>An Application of the Arima Model in Capital Asset Pricing Model for Forecasting of the Stocks of Index Standard &amp; Poor's 500</b> <i>Yovana Ivanova, Elitsa Raeva</i>	
2. <b>FRI-2.203-SSS-FM-02</b>	21
<b>The Application of the Long Short-Term Memory Neural Networks for Eur/Usd Exchange Rate Forecasting</b> <i>Reneta Vassileva, Maya Markova</i>	
3. <b>FRI-2.203-SSS-FM-03</b>	29
<b>Comparison between the Chain Ladder Method and the Bornhuetter-Ferguson Method for Third Party Liability Insurance</b> <i>Hedie Redzheb, Elitsa Raeva</i>	
4. <b>FRI-2.203-SSS-FM-04</b>	36
<b>Building a Portfolio Using Neural Networks and Markowitz Modern Theory</b> <i>Tsvetelin Tsonev, Ivan Georgiev, Slavi Georgiev</i>	
5. <b>FRI-2.203-SSS-FM-05</b>	38
<b>On Synchronization of Neuronal Dynamics with Slow Inhibitory Synapses</b> <i>Teodor Georgiev, Julia Chaparova</i>	

## INFORMATICS

### Content

1. **FRI-1.407.1-SSS-I-01** 69  
**Game Engine and Engine Components Design and Development**  
*Serkan Sadulov, Mustafa Mustafov, Kamelia Shoilekova*
2. **FRI-1.407.1-SSS-I-02** 70  
**The Game Domina**  
*Petar Mishev, Galina Atanasova, Bagryana Ilieva*
3. **FRI-1.407.1-SSS-I-03** 75  
**System for Centralized Control of Smart Devices**  
*Nikola Kirilov, Kamelia Shoilekova*
4. **FRI-1.407.1-SSS-I-04** 79  
**Memstego – an Approach for Hiding Information**  
*Vladislav Nikolov, Galina Atanasova, Bagryana Ilieva*
5. **FRI-1.407.1-SSS-I-05** 85  
**Online Calculator for Determining the Optimal Seeding Rate for Annual And Perennial Cereals and Leguminous Forage Crops**  
*Bozhidar Atanasov, Kamelia Shoilekova*
6. **FRI-1.407.1-SSS-I-06** 91  
**Recursion and the "Divide And Conquer" Method as Techniques for Solving Problems in Computer Science Education**  
*Stanaila Neykova-Karagaeva, Svetlozar Tsankov*

FRI-2.203-SSS-FM-01

---

## AN APPLICATION OF THE ARIMA MODEL IN CAPITAL ASSET PRICING MODEL FOR FORECASTING OF THE STOCKS OF INDEX STANDARD & POOR'S 500 <sup>1</sup>

---

**Yovana Ivanova - Student**

Department of Applied Mathematics and Statistics,  
University of Ruse "Angel Kanchev"  
Email: jovana2000i@gmail.com

**Chief Assist. Elitsa Raeva, PhD**

Department of Applied Mathematics and Statistics,  
University of Ruse  
E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

***Abstract:** Investing can be one of the best ways to achieve financial stability and personal wealth growth. It doesn't come without risk, as the prices of financial assets are influenced by various economic and political factors, leading to price fluctuations. This study aims to examine the impact of Amazon's asset price movements on the S&P500 index. Through the utilization of SPSS and Microsoft Excel software, future asset values are forecasted. The research employs a combined approach, integrating the Capital Asset Pricing Model (CAPM) and the ARIMA model to estimate the expected return for the Amazon asset. The expected market return is forecasted using SPSS and then incorporated into the formula of the Capital Asset Pricing Model.*

***Keywords:** Investing, Financial stability, Asset prices, Standard and Poor's 500 index, SPSS, Capital Asset Pricing Model, ARIMA model.*

### ВЪВЕДЕНИЕ

Инвестирането може да бъде един от най-добрите начини за постигане на финансова стабилност и увеличаване на личните средства. Съвременният свят проявява все по-голям интерес към инвестиционните възможности, като финансовите средства стават все по-значими за един инвеститор. Същевременно, то е свързано и с риск, тъй като цените на финансовите активи се променят и могат да се изменят от различни икономически и политически фактори. За да бъдат успешни в своите инвестиции, инвеститорите трябва да извършват подробни анализи, да следят пазарните тенденции и да изградят добре обмислени стратегии. Чрез капиталовложение в различни финансови инструменти като акции, облигации, суровини или недвижими имоти, инвеститорите могат да генерират доходност. Част от тези финансови инструменти са акциите. В настоящата работа е изследван индекса Standard & Poor's 500.

За първи път е публикуван през 1957 г. S&P 500 е широко смятан за най-добрия единичен измерител на американски акции с голяма капитализация. Това го прави важен индикатор за финансовите пазари и икономическото състояние на САЩ. Компаниите, включени в индекса, се избират от екип на анализатори на Standard & Poor's, които се фокусират върху фактори като пазарната капитализация и ликвидността на дадена компания.

Цените на акциите, включени в S&P 500, се променят непрекъснато през търговските дни във фондовата борса. Amazon е част от S&P 500, тя е най-голямата компания в света по оборот сред продаващите стоки и услуги чрез интернет. Централата на компанията е разположена в щат Вашингтон, САЩ. Компанията е създадена през 1994 г. от предприемача Джеф Безос, а през 1995 г. стартира сайтът. „Амазон“ е наречена в чест на реката Амазонка, най-пълноводната в света. Прогнозирането на движението на S&P 500 и другите акции

---

<sup>1</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 23 май 2023 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ОЦЕНЯВАНЕ НА ОПЦИИ ЧРЕЗ СИМУЛАЦИЯ НА СТОХАСТИЧНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ.

изисква дълбоки анализи и изследвания на пазара, както и използване на различни методи и модели за прогнозиране.

Целта на настоящата работа е да се провери какво е влиянието на движението на цените на активите на Amazon върху индекса Standard and Poor's 500 (S&P 500) и дали имат връзка помежду си. Данните са взети от информационната платформа Yahoo Finance за периода 01.11.2020 - 31.01.2023 г. на дневна база. С софтуера SPSS и Microsoft Excel се извършва прогнозиране на бъдещите стойности на активите. Чрез използването на математически модел за оценка на капиталовите активи (МОКА) ще се извърши предварителна преценка за възвращаемостта на индекс за Amazon спрямо S&P 500. След това е направена прогноза с ARIMA модел за Amazon с SPSS. Резултатите от МОКА модела се сравняват с ARIMA модели. Главната задача е да се разгледа комбиниран метод между модел за оценка на капиталовите активи и ARIMA модел за оценка на очакваната възвръщаемост за актива Amazon. Като очаквана на възвръщаемост на пазара се прогнозира чрез SPSS, а се замества във формулата за модел на оценка на капиталовите активи.[1]

### МОДЕЛ ЗА ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИТЕ АКТИВИ (МОКА)

CAPM (Capital Asset Pricing Model) е модел за оценка на капиталовите активи, който се използва за определяне на очакваната доходност на инвестиция в акция или портфейл от акции. Моделът предполага, че инвеститорите изискват компенсация за риска и че доходността на акцията зависи от риска на акцията спрямо пазара като цяло.

Въпреки че МОКА има някои ограничения, като предполагагането, че пазарът е ефективен, и че инвеститорите са рационални, той все още се използва широко в инвестиционния свят за определяне на стойността на акции и портфейли от акции.

Очакваната норма на възвръщаемост се пресмята чрез следната формула:

$$E(R_I) = R_F + (E(R_M) - R_F)B_I, \quad (1)$$

където,

- $E(R_I)$  - очакваната норма на възвращаемост на  $i$ -тия актив;
- $R_F$  - нормата на възвращаемост на безрисковия актив;
- $E(R_M)$  - очакваната норма на възвращаемост на пазара;
- $\beta_I$  - показател за системният риск;
- $(E(R_M) - R_F)$  - пазарна рискова премия.

### БЕТА КОЕФИЦИЕНТ КАТО ИЗМЕРИТЕЛ НА ВОЛАТИЛНОСТТА

Числителят на коефициента  $\beta$  се явява измерител на систематичния (пазарния) риск на акцията. Следователно коефициентът  $\beta$  е отношението между систематичния риск на акциите и риска на пазарния портфейл.

За да се пресметне бета коефициентът, се използва формулата:

$$\beta = \frac{\text{COV}(R_I, R_M)}{\text{VAR}(R_M)} \quad (2)$$

• Ако  $\beta$  коефициентът е по-голям от 1, това означава, че даденият актив е изключително рисков, поради наличието на висока волатилност. Той внася по-голям риск, отколкото общият риск на пазарния портфейл.

• Когато  $\beta = 1$ , възвращаемостта на актива и пазарния портфейл се движат в една и съща посока с еднаква сила, а ако  $0 < \beta < 1$ , тогава те отново се движат в една посока, но възвращаемостта на актива се джижи с по-малка сила.

- При  $\beta = 0$  не се наблюдава зависимост между възвращаемостите, което означава, че даденият актив е безрисков.

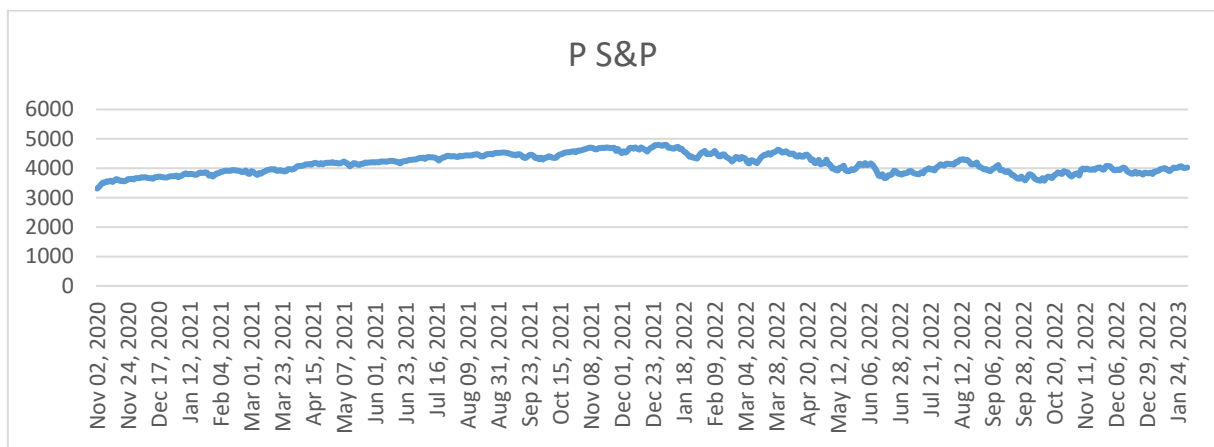
Ковариацията се пресмята по формулата

$$\text{COV}(R_I, R_M) = \left[ \left( R_I - E(R_I) \right) \left( R_M - E(R_M) \right) \right] \quad (3)$$

### ПРОГНОЗИРАНЕ НА ЦЕНИТЕ НА ИНДЕКСА – Standard and Poor’s 500

В това предвиждане на настоящия анализ са разгледани данните на индекса S&P 500 за периода 01.11.2020 - 31.01.2023 г. на дневна база. Използвани са софтуера SPSS и Microsoft Excel. Първия етап е да се възпроизведат реалните данни в Microsoft Excel и да се изчертае графика на цените за съответния период, за да се проследи данните във времето (фигура 1).

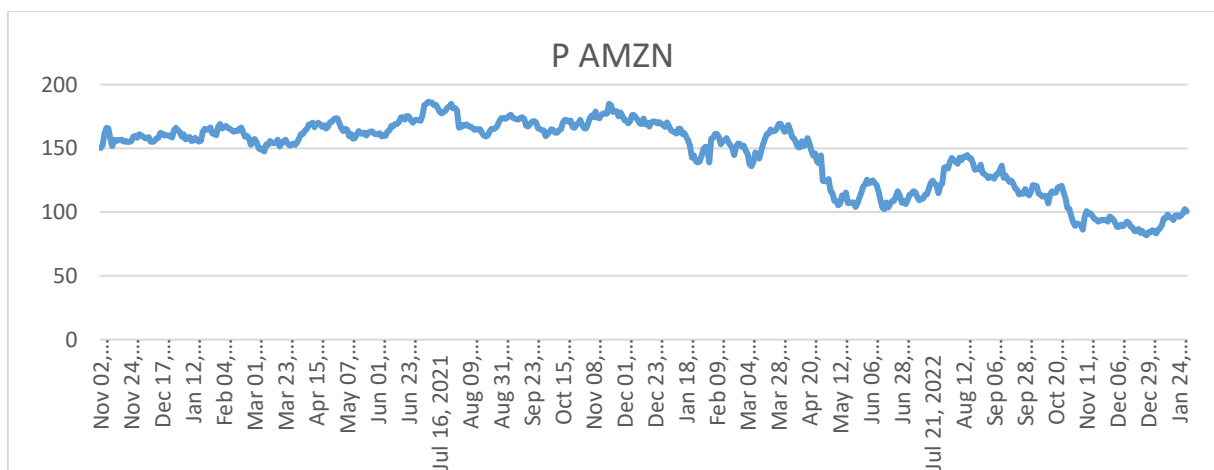
Изчистени от outlaers



ФИГУРА 1. Графика на цените на Standard and Poor’s 500

### ПРОГНОЗИРАНЕ НА ЦЕНИТЕ НА ИНДЕКСА – Amazon

Втория етап е да се възпроизведат реалните данни в Microsoft Excel и да се изчертае графика на цените за съответния период, за да се проследи данните във времето (фигура 2).

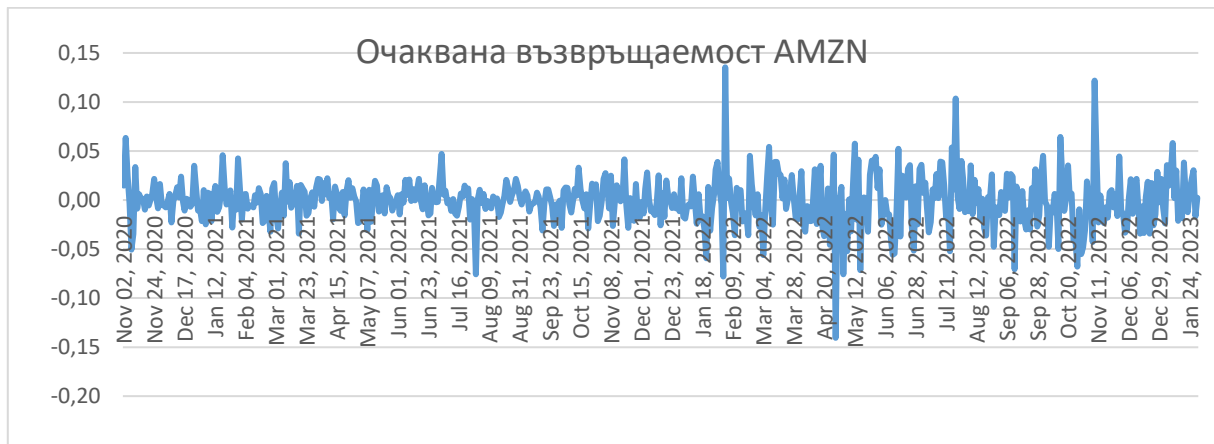


ФИГУРА 2. Графика на цените на Amazon

### МОДЕЛ ЗА ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИТЕ АКТИВИ ЗА Amazon

Графика на данните във времето беше показан на фигура 1. На следващ етап се изчислява процентната норма на възвращаемост по формулата. Видимо е, че е изместена общата средна стойност поради спад на цените на AMAZON през месец май 2022.

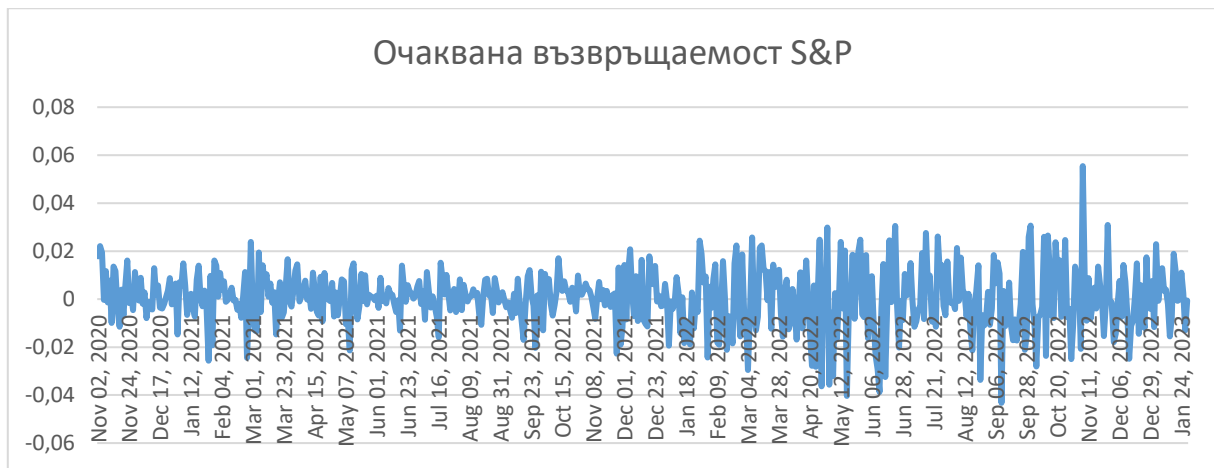
$$R_1 = \frac{(P_2 - P_1)}{P_1}$$



ФИГУРА 3. Графика на възвращемостта на Amazon

### МОДЕЛ ЗА ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИТЕ АКТИВИ ЗА S&P 500

Пресмята се отново процентната норма на възвръщаемост на целия индекс. Тук се наблюдава занижение поради инфлацията в САЩ за септември 2022 г.



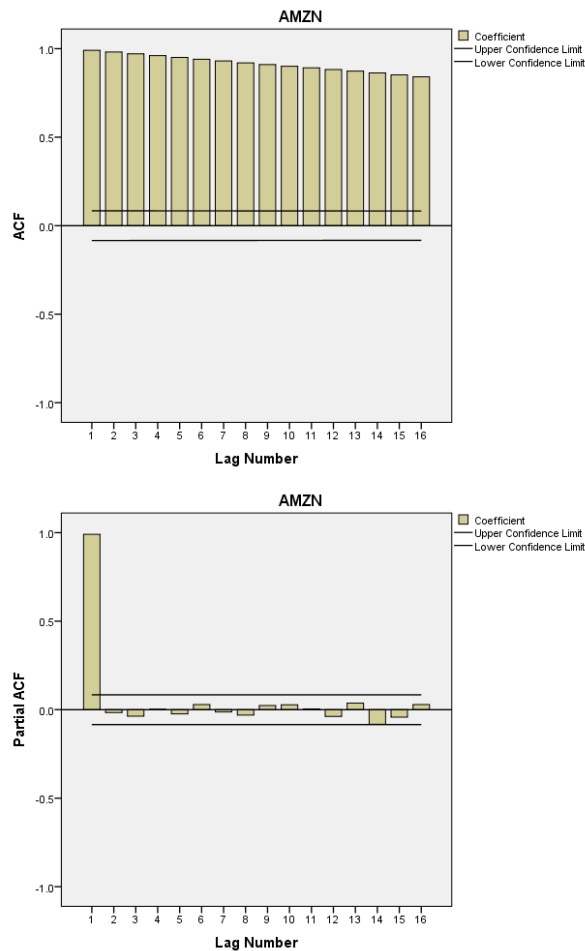
ФИГУРА 4. Графика на възвращемостта на Standard and Poor's 500

### МОДЕЛЪТ ARIMA - Amazon

ARIMA е статистически модел, който се използва за анализ и прогнозиране на времеви редове. Моделът се състои от три параметъра: авторегресия (AR), интегриране (I) и пълзяща средна стойност (MA). Авторегресията описва зависимостта между текущото наблюдение и предишните наблюдения в редицата. Интегрирането се използва за превръщане на нестационарния времеви ред в стационарен. Движещата средна е тип времева редица, която използва множество предишни наблюдения, за да предскаже следващата стойност. [2]

ARIMA моделите могат да се използват за прогнозиране на времеви редове, като например данни за икономически показатели, като инфлацията, безработицата, цените на стоки и услуги, или за финансови показатели, като например цените на акции или валутни курсове.

Основни стъпки в моделирането с ARIMA са идентифициране, построяване и оценяване на модела и изследване на остатъците. За целите на изследването са използвани модели ARIMA. Следващ етап в доклада е да се изследва автокорелационната и частично автокорелационната функция (ACF и PACF) на AMAZON на цената (Фигура 5).



**ФИГУРА 5.** Автокорелационна и частично автокорелационна функция

Наличието на толкова много излизания от доверителните интервали говори за необходимост от ARIMA модел. Същото се потвърждава и от графиката на Partial ACF.

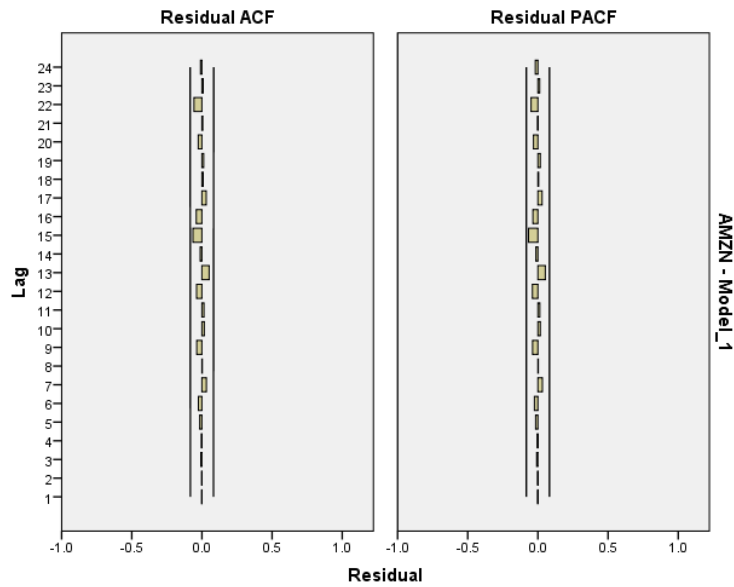
След разглеждането на няколко различни стойности  $p$   $d$   $q$  ARIMA е избран най-добрият модел ARIMA (7, 1, 9) с логаритмувани данни.

Това, което доказва, че именно този е оптималният ARIMA модел е, че критерият BIC (Bayesian Information Criterion) е с минимална стойност 2,574. Този критерий произлиза от Теоремата на Бейс.

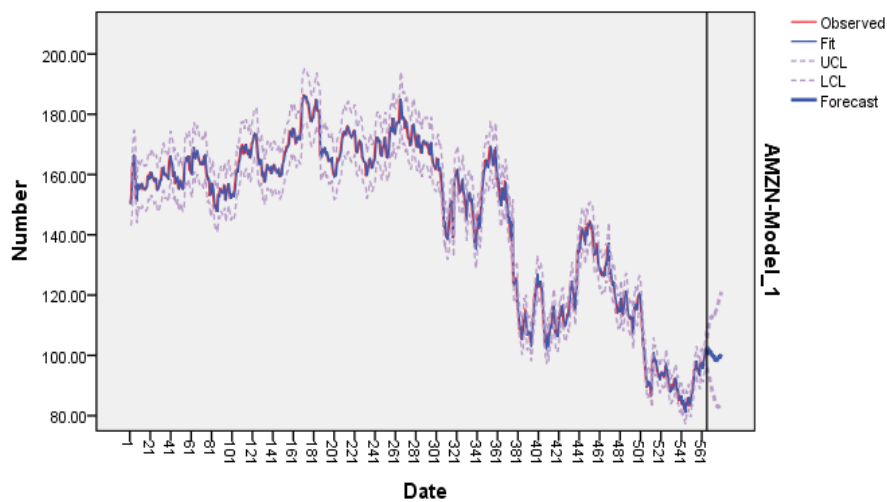
Друго доказателство, че е оптимален моделът е, че няма излизания от доверителните интервали на ACF и Partial ACF (Фигура 6).

След провеждане на ARIMA модела се изчертава графика на историческите данни и направената прогноза (Фигура 7).





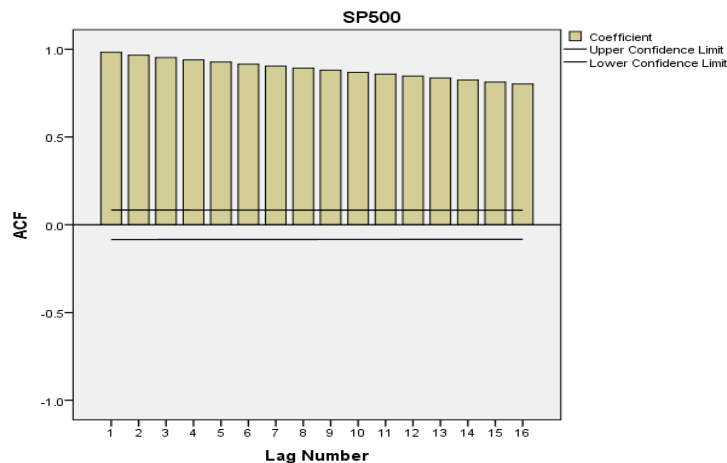
ФИГУРА 6. Автокорелационна и частично автокорелационна функция

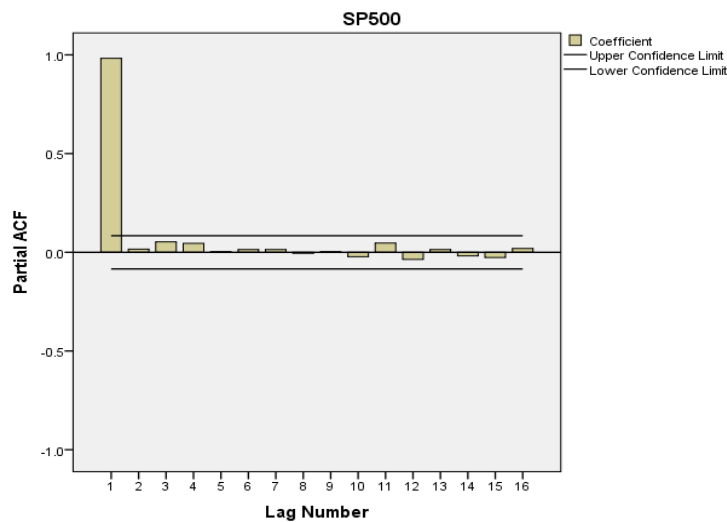


ФИГУРА 7. Графика на данните и направената прогноза

### МОДЕЛЪТ ARIMA - S&P 500

Изследват се историческите дневни данни на индекса Standard and Poor's 500 и се изчертава автокорелационната функция и частично автокорелационната функция. Наличието на положителни стойности извън доверителните интервали на ACF и PACF говори за необходимост от ARIMA модел.





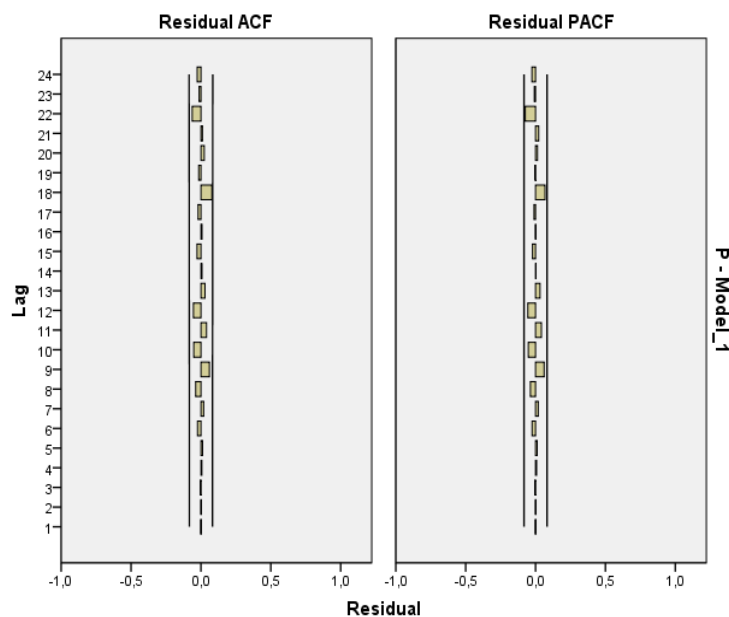
**ФИГУРА 8.** Автокорелационна и частично автокорелационна функция

След разглеждането на няколко различни стойности (p d q) ARIMA е избран най-добрият модел ARIMA(2,1,2)

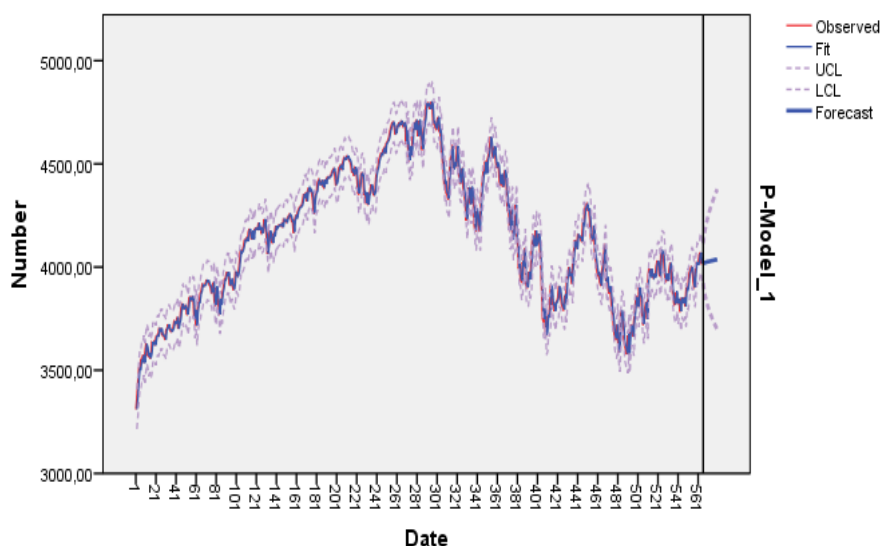
Това, което доказва, че именно този е оптималният ARIMA модел е, че критерият BIC (Bayesian Information Criterion) е с минимална стойност 7,831. Този критерий произлиза от Теоремата на Бейс. [3]

Друго доказателство, че е оптимален моделът е, че няма излизания от доверителните интервали на ACF и Partial ACF (Фигура 9).

След провеждане на ARIMA модела се изчертава графика на историческите данни и направената прогноза (Фигура 10).



**Фигура 9.** Автокорелационна и частично автокорелационна функция



ФИГУРА 10. Графика на данните и направената прогноза

### ЧИСЛЕНИ РЕЗУЛТАТИ

Пресмята се бета коефициента от уравнението на МОКА спрямо индекса S&P 500. Използва се (2) за бета коефициента. Получава се 0.8030 и е по-малко от 1, което означава, че възвръщаемостта на ценната книга е по-малко вероятно да отговори на пазарните движения.

За  $rf$  става ясно, че възвръщаемостта е 8,73% [4]. Замества се и останалото във формулата, за да се получи очакваната норма на възвръщаемост за акциите на Amazon спрямо индекса.

$$E(R_M) = 0.00041$$

$$E(R_I) = 0.0837 + (0.00041 - 0.0873) * 0.8030$$

$$0,015425931 = 1.5426\%$$

Очаквана възвръщаемост на акциите за Amazon чрез ARIMA модели е 0,00238687. В ARIMA модела оказва влияние поведението на данните на Amazon без да се отчита зависимост от S&P 500 и безрисковата норма на възвръщаемост за година. Предвид че данните имат отрицателен тренд се очаква по-нисък резултат за очакваната норма.

$$ARIMA(R_I) = 0.0101 = 1.01\%$$

А накрая се прилага комбинираният метод между МОКА и ARIMA за акциите на Amazon с Ексел и SPSS. Като очаквана на възвръщаемост на пазара се прогнозира чрез SPSS, а се замества във формулата за модел на оценка на капиталовите активи.

$$ARIMA(R_M) = 0.001188$$

$$E(R_I) = 0.0837 + (0.001188 - 0.0873) * 0.8030$$

$$E(R_I) = 0,018152806 = 1.8153\%$$

### ИЗВОДИ

Резултатите от това изследване могат да бъдат полезни за инвеститорите и финансовите анализатори, като им предоставят по-добра представа за възможните промени в цените на акциите в индекса S&P 500 и им помагат да изградят по-устойчиви инвестиционни стратегии.

Анализът чрез ARIMA модели показва занижена възвръщаемост.

Комбинираният метод чрез ARIMA модели и МОКА дава по-близки до реалните.

### **БЛАГОДАРНОСТИ**

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2023 – ФПНО – 04, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

### **ЛИТЕРАТУРА**

[1] <https://bg.bienngocruise.com/capital-asset-pricing-model>

[2] Centeno, V., I.R. Georgiev, V. Mihova and V. Pavlov (2019), Price Forecasting and Risk Portfolio Optimization, AIP Publishing

[3] Cohen, N., Berchenko, Y. (2021), Normalized Information Criteria and Model Selection in the Presence of Missing Data, Mathematics, 9(19), 2474.

[4] <https://www.cnbc.com/world/>

## THE APPLICATION OF THE LONG SHORT-TERM MEMORY NEURAL NETWORKS FOR EUR/USD EXCHANGE RATE FORECASTING<sup>2</sup>

### Reneta Vassileva - Student

Department of Applied Mathematics and Statistics,  
University of Ruse "Angel Kanchev"  
E-mail: ren4etoss@gmail.com

### Principal Assistant Prof. Maya Markova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics  
University of Ruse "Angel Kanchev"  
E-mail: maya.markova@gmail.com

**Abstract:** *The use of deep learning techniques has emerged as a powerful tool for predicting financial time series data. In this study, we focus on exploring the effectiveness of Long Short-Term Memory (LSTM) neural networks in forecasting time series. The study examines the forecasting of the foreign exchange rate between EUR and USD using a multivariate multi-step LSTM model. The input data for the model is constructed by transforming one-hour data of the open, high, low, and close prices of EUR/USD into a three-dimensional structure. Python programming language is used for dataset preparation and implementation of the LSTM model. The performance of the model is measured using Mean Squared Error (MSE) and Root Mean Squared Error (RMSE). The findings of the study provide insights into the predictive capabilities of LSTM models in financial time series forecasting.*

**Keywords:** *neural networks, deep learning, LSTM model, FOREX, forecasting, time series.*

### ВЪВЕДЕНИЕ

Валутният пазар (FOREX) е най-активно търгуваният финансов пазар в света. Той е в центъра на глобалния капиталов пазар, който свързва и движи парите и инвестиционните фондове на всяка страна. Форекс пазарът работи 24 часа в денонощието, пет дни в седмицата, което позволява извършването на сделки по всяко време и реагиране на събития и икономически новини в реално време. Големи финансови транзакции за милиони долари могат да се извършат за няколко секунди на този пазар. Участници в него са най-големите банки и централните банки на различни страни, инвестиционни и пенсионни фондове, големи компании и частни инвеститори с огромен личен капитал. Те не купуват или продават реална валута, а само правят залози за растеж или спад на обменните курсове на валутата. Валутите се търгуват под формата на валутни двойки, чието движение измерва стойността на една валута спрямо друга [6]. Например най-търгуваната валутна двойка на пазара - EUR/USD измерва стойността на еврото спрямо щатския долар. Когато стойността на двойката се повиши, това означава, че стойността на еврото се е повишила спрямо стойността на щатския долар и обратно когато стойността на двойката намалява стойността на еврото е намаляла [8].

За да се печели от Форекс трябва да се прави задълбочен анализ на пазара и да се отворят позиции в точното време. Анализа на пазара може да бъде фундаментален и технически анализ. Фундаментален анализ е всичко, което е свързано с външни фактори. Те мога да бъдат политически, икономически и дори природни бедствия и тяхното въздействие върху курса на валутните двойки. Техническият анализ показва движението на двойката в графики. В рамките на техническия анализ се разглеждат технически индикатори, които отразяват движението на цената в опит да се предвидят бъдещи движения. За най-добри резултати трябва да се комбинират технически и фундаментален анализ. Краткосрочните

<sup>2</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 23 май 2023 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ПРИЛОЖЕНИЕ НА LSTM НЕВРОННИ МРЕЖИ ЗА ПРЕДСКАЗВАНЕ НА ЦЕНАТА НА EUR/USD.

търговци фокусират своите стратегии най-вече върху движенията на цените и предпочитат да използват технически анализ, защото в краткосрочен план - часове или един ден, е по-малко вероятно икономическите новини да повлияят на движенията на цените [4].

С появата на новите технологии и развитието на изкуствения интелект популярността на техническия анализ нараства и увеличава значително влиянието си върху валутния пазар. За да прогнозира бъдещото развитие на цените техническите анализатори използват исторически данни за валутния курс. Техническият анализ предполага, че цялата информация за текущия пазар е разкрита в ценовото движение на валутата и неговото изучаване е всичко, което е необходимо за вземане на информирани търговски решения. Освен това техническият анализ се основава на идеята, че историята може да се повтори [4].

Инвеститорите могат да направят значителни печалби при минимални разходи поради честото колебание на валутния курс. В резултат на това прогнозирането на валутните курсове с помощта на времеви редове се превърна в популярна тема в проучванията на финансовия пазар. Изследователите откриват, че колебанията на обменния курс показват характеристиките на нелинейна динамична система с много сложни променливи. В отговор на търсенето на пазара за прогнозиране на обменния курс от решаващо значение е използването на нелинейни методи. Такъв нелинеен метод са изкуствените невронни мрежи и по-конкретно дълбокото обучение. [10]

Тази статия има за цел да проучи приложението на LSTM невронни мрежи за прогнозиране на времеви редове на Форекс с едночасови данни за обмен на EUR/USD.

## ИЗЛОЖЕНИЕ

### Невронни мрежи

Изкуствените невронни мрежи могат да се опишат като математически модел за обработка на информация. Една невронна мрежа не е фиксирана програма, а по-скоро модел, система, която обработва информация или входни данни. Характеристиките на една невронна мрежа са следните:

- Обработката на информация се извършва в най-простата ѝ форма, върху прости елементи наречени неврони.
- Невроните са свързани помежду си и обменят сигнали.
- Връзките между невроните могат да бъдат по-силни или по-слаби и това определя как се обработва информацията.
- Всеки неврон има вътрешно състояние, което се определя от всички входящи връзки от други неврони.
- Всеки неврон има различна активационна функция, която се изчислява върху състоянието му, и определя неговия изходен сигнал.

Едно по-общо описание на невронната мрежа може да бъде изчислителен граф от математически операции [11].

Има две основни характеристики на невронните мрежи: архитектура и обучение. Архитектурата на невронната мрежа описва набора от връзки между невроните, броя на слоевете и броя на невроните във всеки слой. Обучението описва процеса на регулиране на теглата на връзките между невроните, за да се подобри работата на мрежата. Най-често срещаният метод на обучение е градиентният метод, но има и други начини за обучение на невронни мрежи [11].

### LSTM невронни мрежи

Мрежите за дълговременна памет - Long Short-Term Memory (LSTM) често наричани LSTM мрежи са специален вид рекурентни невронни мрежи способни да изучават дългосрочни зависимости. Те са предназначени да преодолеят предизвикателството на дългосрочните зависимости в данните. Способността им да запомнят информация за продължителни периоди от време е практически вградена, което ги прави идеални за този тип задачи. LSTM са особено подходящи за работа с последователни данни, като времеви

редове, естествен език и аудио данни. Те могат да работят ефективно, като използват комбинация от клетки с памет, входни и изходни портове [1].

Структурата на една LSTM мрежа (фиг.1) се състои от поредица от клетки с памет, които могат да съхраняват информация във времето. Клетките са свързани помежду си чрез портове, които контролират потока на информация към и от клетките. В LSTM мрежата има три вида портове:

1. Порт за забравяне (означен на фиг. 1 с  $F_t$ ): Този порт определя коя информация да бъде отхвърлена от състоянието на клетката. Той приема като вход предишното скрито състояние и текущия вход и извежда стойност между 0 и 1 за всеки елемент в състоянието на клетката. Ако изхода е 0, предишното вътрешно състояние се забравя, откъдето идва и името порт за забравяне (forget gate). Ако изхода е 1, предишното състояние се предава непроменено.

2. Входен порт (означен на фиг.1 с  $I_t$ ): Този порт определя коя информация да се добави към състоянието на клетката. Той приема като вход предишното скрито състояние и текущия вход и извежда стойност между 0 и 1 за всеки елемент в състоянието на клетката.

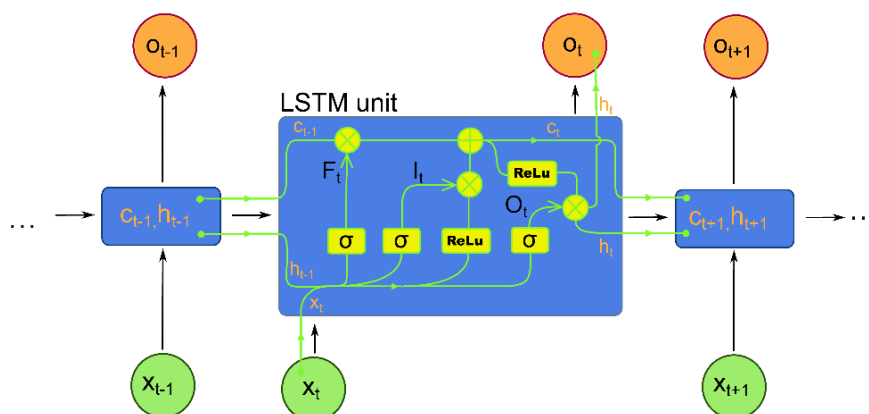
3. Изходен порт (означен на фиг.1 с  $O_t$ ): Този порт определя каква част от вътрешното състояние на клетката се изпраща на изхода. Той приема като вход текущия вход и текущото скрито състояние и извежда стойност между 0 и 1 за всеки елемент в състоянието на клетката.

Портовете се управляват от активационни функции, които определят изхода на порта въз основа на входа. Изходът на всеки порт се умножава по предишното състояние на клетката, за да се определи новото състояние на клетката. След това изходът на състоянието на клетката се подава през активационна функция, за да се определи изходът на LSTM мрежата.

Теглата на портовете се коригират по време на обучението чрез обратно разпространение и градиентно спускане. Мрежата се обучава, за да минимизира грешката между прогнозирания изход и действителния изход.

Всеки от портовете в мрежата LSTM играе специфична роля в контрола на потока от информация през мрежата. Портът за забравяне определя коя информация да бъде запазена или премахната от предишното състояние на клетката въз основа на текущия вход и предишното скрито състояние. Входният порт определя коя нова информация да се добави към състоянието на клетката въз основа на текущия вход и предишното скрито състояние. Изходният порт определя коя информация да бъде изведена от текущото състояние на клетката въз основа на текущия вход и текущото скрито състояние.

Клетките на паметта в мрежата LSTM са проектирани да съхраняват информация във времето. Това позволява на мрежата да се учи от минали входни данни и да използва тази информация, за да прави точни прогнози за бъдещи входни данни. Портовете в мрежата контролират потока на информация към и от клетките на паметта, което позволява на мрежата да съхранява или отхвърля информация изборително, когато е необходимо.

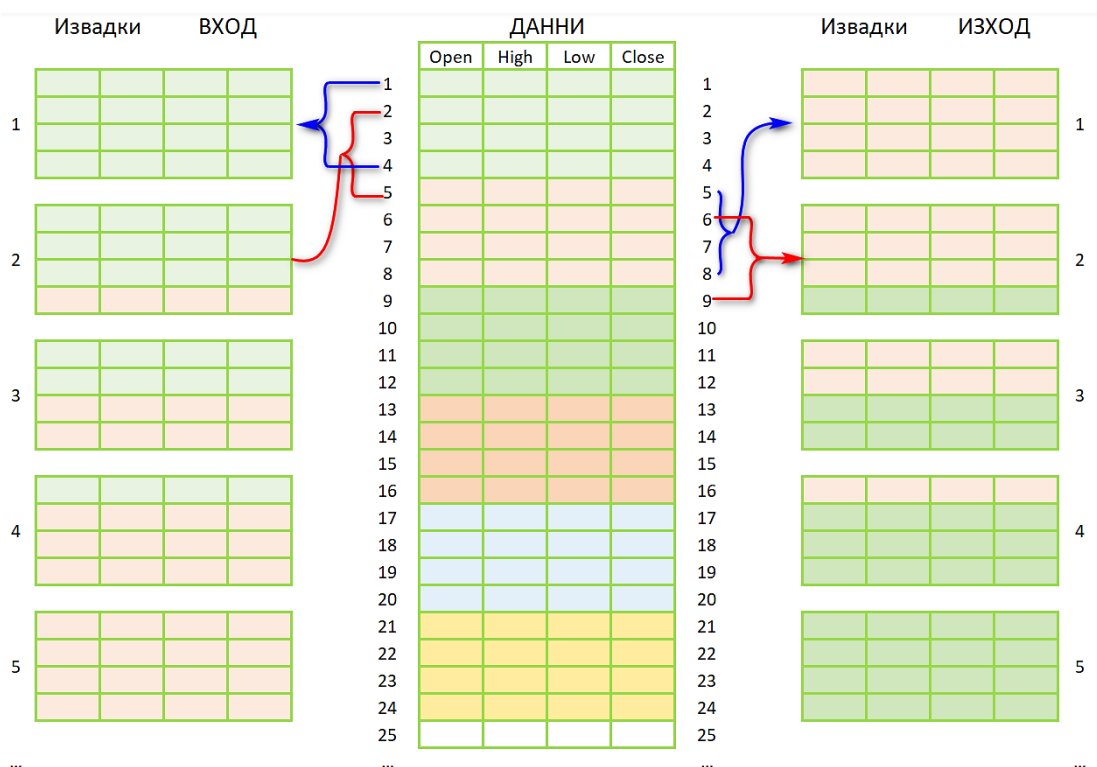


Фиг.1. Архитектура на LSTM клетка [9]

### LSTM невронно-мрежови модел

Данните използвани за създаване на модела на невронната мрежа са взети от сайта [www.fnam.ru](http://www.fnam.ru) [5]. За обучение и валидация на модела са използвани едночасови данни за обменния курс EUR/USD от 01.01.2019г. до 31.12.2021 г., а за тестване са използвани едночасови данни от 01.01.2022г. до 30.12.2022г. Цените на отваряне, най-висока цена, най-ниска цена и цена на затваряне са предварително обработени по следния начин: (извадка, времеви стъпки, характеристики). Имаме четири характеристики - четирите вида цени: отваряне, най-висока, най-ниска и затваряне. Времевите стъпки са четири (общо четири часа) на интервал от един час.

Многовариантната последователност от входни данни е разделена на извадки от входни и изходни данни за невронната мрежа. Първите четири времеви стъпки от данни се използват за входни данни, а следващите четири времеви стъпки от всяка от четирите характеристики се използват като изходни (цели) данни за модела. Втората извадка взема данните от втора до пета времева стъпка за вход и за изход от шеста до девета стъпка и т.н [2].



Фиг. 2. Форматиране на данните във входни и изходни извадки

Направен е многовариантен многостъпков модел за прогнозиране на времеви редове с данни от Форекс пазара. Моделът използва за вход цените на отваряне, най-висока, най-ниска и цена на затваряне през интервал от 1 час и предвижда следващите четири стъпки на тези четири цени.

Създадохме много модели и окончателният ни модел се състои от пет слоя. Настройките и параметрите на конструирания LSTM модел са показани в таблица 1. Моделът се състои от 4 LSTM слоя и един напълно свързан слой. Входните данни са в примерен вектор с размерност (none, 4, 4).

Таблица 1. Параметри на LSTM модела

Параметри	Стойност
Брой неврони в LSTM слой 1	256
Активационна функция на LSTM слой 1	ReLU
kernel_initializer на LSTM слой 1	he_normal
kernel_regularizer на LSTM слой 1	l2(12=0.0000001)
Брой неврони в LSTM слой 2	256



Активационна функция на LSTM слой 2	ReLU
Брой неврони в LSTM слой 3	256
Активационна функция на LSTM слой 3	ReLU
Брой неврони в LSTM слой 4	256
Активационна функция на LSTM слой 4	ReLU
Времеви стъпки	4
Batch_size	64
Скорост на обучение	0.00002
Оптимизатор	Adam
Функция на загубата	mean_squared_error
Метрика	RootMeanSquaredError
Епохи	400

Моделът е изграден в Python с помощта на библиотеката за дълбоко обучение Keras [7] в средата на Google Colab. Python кодът на конструкцията на модела е показан на фиг. 3.

```
#choose a number of time steps - стъпка 4 при интервал 1час прави 4 часа
n_steps_in,n_steps_out=4,4
# the dataset knows the number of features - 4
n_features=X_train.shape[2]

kernel_reg=regularizers.l2(l2=0.0000001)
opt = Adam(learning_rate=0.00002)

model = Sequential()
model.add(LSTM(256,activation='relu',return_sequences=True, input_shape=(n_steps_in, n_features),
              kernel_initializer='he_normal',kernel_regularizer=kernel_reg))
model.add(LSTM(256,activation='relu',return_sequences=True))
model.add(LSTM(256,activation='relu',return_sequences=True))
model.add(LSTM(256,activation='relu',return_sequences=True))
model.add(Dense(n_features))
model.compile(optimizer=opt, loss='mse', metrics=[tf.keras.metrics.RootMeanSquaredError()])

print(model.summary())
```

Фиг. 3. Конструиране на модела – Python код

При обучението на модела се настройват неговите параметри, за да се минимизира функцията на загуба върху предоставените обучителни примери. Функцията на загуба измерва грешката в предсказанието на модела за даден пример, т.е. разликата между предсказаната стойност от модела и истинската стойност за този пример. Тя изисква два параметъра: истинската маркировка на примера "y" и предсказанието на модела "ŷ". При обучението на нашия модел се използват Mean Squared Error (MSE) и Root Mean Squared Error (RMSE).

MSE е често използвана функция на загуба в задачи на регресия. Тя измерва средноквадратичната разлика между предсказаните стойности и истинските стойности на набор от примери. За да се изчисли MSE, се взема истинската стойност на примера, означена като "y", и се изважда предсказаната стойност на модела за този пример, означена като "ŷ". След това разликата се повдига на квадрат, за да са гарантира, че е положителна. Този процес се повтаря за всички примери в набора от данни. Накрая, се взема средната стойност на всички повдигнати на квадрат разлики, за да се получи MSE.

Математически MSE може да се изрази по следния начин:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum (y - \hat{y})^2$$

Където "n" представлява броят на примерите в набора от данни, а  $\Sigma$  означава сумата от квадратните разлики за всички примери [3].

RMSE (Root Mean Squared Error), както подсказва името, е квадратният корен на MSE. Това е мярка за стандартното отклонение на грешки от предсказването и често се предпочита, защото има същата единица на измерване като зависимата променлива. RMSE осигурява по-лесна за интерпретиране метрика, като взема квадратния корен на средноквадратичните разлики.

Математически RMSE може да се изчисли по следния начин:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y - \hat{y})^2}$$

Както MSE, така и RMSE се използват широко за оценка на ефективността на регресионните модели по време на обучението. Колкото по-ниска е стойността на MSE или RMSE, толкова по-близки са предсказаните стойности до истинските, което показва по-добра работа на модела по отношение на точността на прогнозиране [3].

Чрез минимизиране на MSE или RMSE по време на процеса на обучение параметрите на модела се коригират, за да се намерят оптималните стойности, които водят до възможно най-малки грешки при прогнозиране на дадените извадки за обучение. Това помага на модела да се учи и да подобрява способността си да прави точни прогнози върху неизследвани данни.

Данните за обучение са разделени на 70% за обучение и 30% за валидиране. За да предотвратим преобучението на невронната мрежа, което често се случва в по-сложни модели, ние използваме регуларизация L2 за kernel\_regularizer и инициализация на ядрото "he\_normal" в първия LSTM слой. (вижте фиг.3).

Регуларизацията L2 принуждава теглата да са много близо до нула (но не точно нула). Функцията на загуба на невронната мрежа се разширява чрез така наречения регулиращ член по време на L2 регуларизацията.

Регулиращият член се дефинира като Евклидова норма на матриците за тегло (или L2 норма), която е сумата от квадратните стойности на теглото на матрицата на теглата. Той се добавя към функцията на загуба, избрана за настоящата задача, претеглена от скаларна стойност алфа, разделена на две. Това води до нов израз на функцията за загуба [9]:

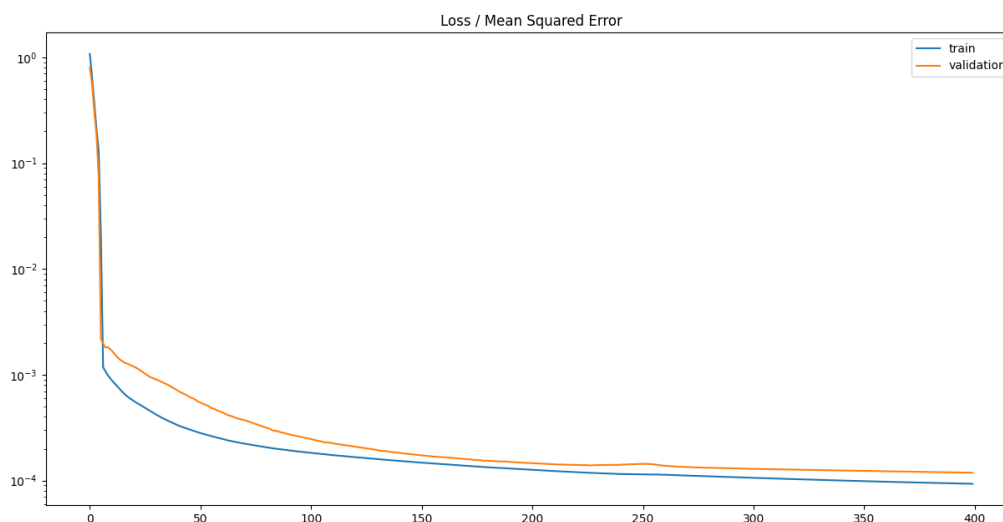
$$\hat{L}(W) = \frac{\alpha}{2} \|W\|_2^2 + L(W) = \frac{\alpha}{2} \sum_i \sum_j w_{ij}^2 + L(W) \quad (1)$$

Резултатите от обучението на невронната мрежа показват (фиг. 4), че функцията на загуба на набора за обучение измерена чрез MSE е  $9,3E-05$ . Функцията на загуба на набора за валидиране измерена чрез MSE е  $1,19E-04$ , а измерена чрез RMSE е  $0,0063$ .

```
Epoch 391/400
211/211 [=====] - 9s 45ms/step - loss: 9.4158e-05 - root_mean_squared_error: 0.0037 - val_loss: 1.1956e-04 - val_root_mean_squared_error: 0.0063
Epoch 392/400
211/211 [=====] - 9s 44ms/step - loss: 9.4066e-05 - root_mean_squared_error: 0.0037 - val_loss: 1.1947e-04 - val_root_mean_squared_error: 0.0063
Epoch 393/400
211/211 [=====] - 9s 45ms/step - loss: 9.3945e-05 - root_mean_squared_error: 0.0037 - val_loss: 1.1936e-04 - val_root_mean_squared_error: 0.0063
Epoch 394/400
211/211 [=====] - 9s 44ms/step - loss: 9.3866e-05 - root_mean_squared_error: 0.0037 - val_loss: 1.1931e-04 - val_root_mean_squared_error: 0.0063
Epoch 395/400
211/211 [=====] - 9s 44ms/step - loss: 9.3740e-05 - root_mean_squared_error: 0.0037 - val_loss: 1.1915e-04 - val_root_mean_squared_error: 0.0063
Epoch 396/400
211/211 [=====] - 9s 44ms/step - loss: 9.3656e-05 - root_mean_squared_error: 0.0037 - val_loss: 1.1905e-04 - val_root_mean_squared_error: 0.0063
Epoch 397/400
211/211 [=====] - 9s 44ms/step - loss: 9.3542e-05 - root_mean_squared_error: 0.0037 - val_loss: 1.1897e-04 - val_root_mean_squared_error: 0.0063
Epoch 398/400
211/211 [=====] - 12s 55ms/step - loss: 9.3453e-05 - root_mean_squared_error: 0.0037 - val_loss: 1.1890e-04 - val_root_mean_squared_error: 0.0063
Epoch 399/400
211/211 [=====] - 10s 46ms/step - loss: 9.3341e-05 - root_mean_squared_error: 0.0037 - val_loss: 1.1877e-04 - val_root_mean_squared_error: 0.0063
Epoch 400/400
211/211 [=====] - 9s 45ms/step - loss: 9.3260e-05 - root_mean_squared_error: 0.0037 - val_loss: 1.1872e-04 - val_root_mean_squared_error: 0.0063
```

Фиг. 4 Резултати за функцията на загубата, измерена чрез Mean square error и Root mean squared error

На фигура 5 се вижда представянето на набора за обучение и набора за валидация. Графиката показва, че моделът е добре обучен и няма преобучение.



Фиг. 5. Функция на загубата на набора за обучение и набора за валидиране

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В тази статия е направен модел за дълбоко обучение на невронна мрежа с LSTM слоеве, който прогнозира времеви редове на обменния курс EUR/USD, използвайки исторически данни за цената на отваряне, най-висока, най-ниска цена и цена на затваряне на 1-часов интервал. Моделът е създаден и тестван на Python в среда Google Colab. Моделът има пет слоя – четири LSTM слоя с 256 неврона в скритите слоеве и активационна функция ReLU и един напълно свързан слой. Моделът е компилиран с функция на загубата средно квадратична грешка (MSE) и оптимизатор Adam със скорост на обучение 0.00002, за предотвратяване попадането в локален минимум на функцията на загубата. Резултатите показват, че функцията на загуба на набора за обучение е  $9,3E-05$ . Функцията на загуба на набора за валидиране измерена чрез MSE е  $1,19E-04$ , а измерена чрез RMSE е 0,0063, което е един изключителен резултат. След обучението моделът е запазен във файл за по-нататъшна употреба и прогнози с нови данни. Резултата от работата на модела е прогноза за следващите четири стъпки през един час на четирите цени - цена на отваряне, най-висока цена, най-ниска цена и цена на затваряне.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2023-ФПНО-04, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

## REFERENCES

- [1] Brownlee, J. (2017). Long Short-Term Memory Networks With Python. Machine Learning Mastery.
- [2] Brownlee, J. (2018). Deep Learning for Time Series Forecasting Predict the Future with MLPs, CNNs and LSTMs in Python. Machine Learning Mastery. Извлечено от <https://machinelearningmastery.com/deep-learning-for-time-series-forecasting/>
- [3] Chugh, A. (08 12 2020 г.). MAE, MSE, RMSE, Coefficient of Determination, Adjusted R Squared — Which Metric is Better? 19.01.2023 URL <https://medium.com/analytics-vidhya/mae-mse-rmse-coefficient-of-determination-adjusted-r-squared-which-metric-is-better-cd0326a5697e>
- [4] Davison, N. (2020). Forex trading. Independently published.
- [5] finam.ru: <https://www.finam.ru/profile/forex/eur-usd/export/>
- [6] Georgiev, I. V. (2022). A Modified Ordinary Differential Equation Approach in Price Forecasting. New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences (030008-1–030008-7). AIP Publishing, 2459. doi:10.1063/5.0083542

- [7] Geron, A. (2019). Hand-on machine learning with Scikit-Learn, Keras & TensorFlow. Sebastopol, CA 95472: O'Reilly.
- [8] Harris, T. (2016). Forex: The Simple Strategy on Trading Currency Successfully. First Class Publishing.
- [9] Markova, M. (2022). Convolutional neural networks for forex time series forecasting. AIP Conference Proceedings 2459, (030024). doi: <https://doi.org/10.1063/5.0083533>
- [10] Nielsen, M. (2015). Neural Networks and Deep Learning. Determination press. Извлечено от <http://neuralnetworksanddeeplearning.com/index.html>
- [11] Vasilev, I., Slater, D., Spacagna, G., Roelants, P., & Zocca, V. (2019 ). Python Deep Learning. Birmingham: Packt Publishing.

FRI-2.203-SSS-FM-03

---

## COMPARISON BETWEEN THE CHAIN LADDER METHOD AND THE BORNHUETTER-FERGUSON METHOD FOR THIRD PARTY LIABILITY INSURANCE<sup>3</sup>

---

### Hedie Redzheb -Student

Department of Applied Mathematics and Statistics,  
University of Ruse "Angel Kanchev"  
E-mail: hedie2001@abv.bg

### Chief Assist. Elitsa Raeva, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,  
University of Ruse "Angel Kanchev"  
E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

**Abstract:** *The Chain-ladder method (CLM) and the Bornhuter-Ferguson method (BF method) are the most widely used methods from the insurance companies for calculating the claims reserves for covering claims that have been incurred but not reported (IBNR). The purpose of this paper is to estimate the required "run-off payment" reserves using the both methods and to make comparisons between the results obtained. Some numerical experiments have been presented.*

**Key words:** *Chain Ladder method, Bornhuetter-Ferguson method, Car liability insurance, run-off reserves*

### ВЪВЕДЕНИЕ

Договорите по общо застраховане покриват рискове като имуществени вреди, гражданска отговорност, обща гражданска отговорност, отговорност на продукта, професионална отговорност, и т.н.

Гражданската отговорност е вид застраховка, с която се сключва застрахователен договор между дадената застрахователна фирма и потребител. Гражданска отговорност на автомобилистите е задължителна застраховка, която трябва да бъде сключена за всички превозни средства, които са в движение и притежава свидетелство за регистрация. Застраховката покрива имуществени и неимуществени вреди, причинени на трети лица, включително пешеходци, велосипедисти и други участници в движението по пътищата, във връзка с притежаването и/или използването на пътно превозно средство (ППС) в движение или по време на престой, в съответствие с българското законодателство или законодателството на държавата, в която е настъпила вредата. Обикновено не всички щети по застрахователния портфейл биват изплатени от застрахователната компания до края на календарната година. Периодът за задържане на плащания по обезщетения е от 10 години.

За да могат да изплатят тези искове, застрахователите трябва да разполагат с резерви, които да им позволят да изплатят всички висящи плащания. Причините за това забавяне са различни: късно обявяване на щетите, липса на документи, непълна експертиза, продължително съдебно производство и други. Резерви биват породени от три вида претенции за обезщетение:

- искове, които са постъпили, но процесът по установяването (плащането) им не е завършен (Reported but not settled - RBNS);
- искове, които са възникнали, но не са предявени (Incured but not reported -IBNR);
- искове, чиито процес по установяване е завършен, но съществуват причини, поради които могат да бъдат отново разглеждани [1].

---

<sup>3</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 23 май 2023 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: СРАВНЕНИЕ МЕЖДУ ВЕРИЖНО-СТЪЛБОВИДЕН МЕТОД И МЕТОД НА БОРНХУТЕР-ФЪРГЮСЪН ОТНОСНО ЗАСТРАХОВКА ГРАЖДАНСКА ОТГОВОРНОСТ.

Най-големият риск за застрахователите е свързан с наличието на IBNR искове. При оценяване на резервите, необходими за покриване на този вид претенции, най-широко приложение намират Верижно-стълбовидният метод и метода на Борнхутер-Фергюсън.

### ВЕРИЖНО-СТЪЛБОВИДЕН МЕТОД

При моделиране на исовете, които са възникнали, но все още не са уредени, наличните данни се представят в т.нар. триъгълник на развитие (run-off triangle). При оценяването на резерва "висящи плащания" първите две колони на Таблица 1 показват общата сума  $S_i$  от възникналите щети през  $Y_{i-та́та}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . календарна година. Периодът на разглеждане  $n$  зависи от вида на застраховките. Чрез Таблица 1 се представя информация за общия размер на исовете, регистрирани през дадена календарна година. Не всички искове обаче се изплащат в годината на възникването им. Поради тази причина, в хода на времето, се разглежда развитието на изплащане на сумите.

Ако исовете (големините или броя), които са възникнали през годината  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , но са били изплатени с  $j$  години закъснение, където  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , са означени с  $X_{ij}$ , то сумата  $S_i$ , поискана от застрахователя през  $i$ -тата година се изразява чрез сумата по редовете:

$$S_i = \sum_{k=0}^{n-i} X_{ik}, i = 1, 2, \dots, n.$$

**ТАБЛИЦА 1. Триъгълник на развитие (Run-off triangle)**

Година на възникване	Установени плащания	Година на развитие							
		0	1	2	3	...	n-2	n-1	
$Y_1$	$S_1$	$X_{10}$	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$		$X_{1,n-2}$	$X_{1,n-1}$	
$Y_2$	$S_2$	$X_{20}$	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{23}$		$X_{2,n-2}$		
$Y_3$	$S_3$				$X_{33}$	...			
...	...								
$Y_{n-1}$	$S_{n-1}$	$X_{n-1;0}$	$X_{n-1;1}$						
$Y_n$	$S_n$	$X_{n0}$							

Общата стойност на исовете, които са изплатени през дадена календарна година се представя чрез сумата от стойностите в диагоналните клетки,  $\widehat{S}_i$ , от последните  $n$  стълбове на Таблица 1.

$$\widehat{S}_i = \sum_{k=0}^{i-1} X_{i-k,k}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Следващият етап от процеса на планиране на резервите, за възникнали, но неизплатени искове се състои в изчисляването на факторите на развитие. Тези коефициенти се наричат също така оценки на кумулативните загуби от неуредени щети. Изчисляването им изисква наличието на таблица, съдържаща кумулативните стойности на триъгълника на развитие (Таблица 2).

**ТАБЛИЦА 2. Кумулативни стойности и фактори на развитие**

Година на възникване	Година на развитие							
	0	1	2	3	...	n-2	n-1	
$Y_1$	$CS_{10}$	$CS_{11}$	$CS_{12}$	$CS_{13}$		$CS_{1,n-2}$	$CS_{1,n-1}$	
$Y_2$	$CS_{20}$	$CS_{21}$	$CS_{22}$	$CS_{23}$		$CS_{2,n-2}$	$CS_{2,n-1}$	
$Y_3$	$CS_{30}$	$CS_{31}$	$CS_{32}$	$CS_{33}$	...			

....			...	...
$Y_{n-1}$	$CS_{n-1;0}$	$CS_{n-1;1}$		
$Y_n$	$CS_{n0}$	$\widehat{CS}_{n;1}$		$\widehat{CS}_{n;n-1}$
Фактори на развитие	-	$f_1$	$f_2$	$f_3$
				$f_{n-1}$

$$CS_{ik} = \sum_{j=0}^k X_{ij}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1;$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad i + k \leq n.$$

Факторите на развитие се пресмятат като съотношение на очакваните кумулативни стойности на щетите, които се изплащат със съответното закъснение в рамките на разглеждания период. При условие че, очакваната стойност на кумулативните загуби по искове за  $i$ -та година на възникване и  $k$ -тата година на изплащане, се отбележи с:

$$E\{CS_k^i\} = \frac{\sum_{j=1}^i CS_{jk}}{i}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

$$i + k \leq n.$$

то оценките за кумулативните загуби се пресмятат като отношение на тези очаквания на два съседни периода по следния начин:

$$f_k = \frac{E\{CS_k^{n-k}\}}{E\{CS_{k-1}^{n-k}\}} = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} CS_{j;k}}{\sum_{j=1}^{n-k} CS_{j;k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1. \tag{2}$$

Тези фактори предоставят информация за увеличението на очакваната сума, която трябва да се задели за изплащане на искове при дадено закъснение от  $k$  години.

Оценките за очакваните бъдещи загуби, изчислени въз основа на кумулативните стойности на възникналите загуби от исковете, се изчисляват като се използват вече получените фактори на развитие, по следната формула:

$$\widehat{CS}_{ik} = CS_{i;k-1} * f_k, \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n - 1;$$

$$n < i + k \leq 2n - 1$$

**ТАБЛИЦА 3. Оценка на очакваните стойности**

Година на възникване	Година на развитие						
	0	1	2	3	...	n-2	n-1
$Y_1$	$X_{10}$	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$		$X_{1;n-2}$	$X_{1;n-1}$
$Y_2$	$X_{20}$	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{23}$		$X_{2;n-2}$	$\widehat{X}_{2;n-1}$
$Y_3$				$X_{33}$	....		
....				....			
$Y_{n-1}$	$X_{n-1;0}$	$X_{n-1;1}$	$\widehat{X}_{n-1;2}$				
$Y_n$	$X_{n0}$	$\widehat{X}_{n1}$					$\widehat{X}_{n;n-1}$

Използвайки обратни последователни преобразувания се достига отново до оценки на стойностите на исковете  $X_{ij}$  от Таблица 1, с включени стойностите под главния диагонал, отговарящи на получените оценки (Таблица 3).  $X_{ij}$  са дадените стойности на изплатените искове, а  $\widehat{X}_{ij}$  са оценените стойности:

$$\widehat{X}_{ij} = \widehat{CS}_{ij} - \widehat{CS}_{i,j-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 1, 3, \dots, n - 1;$$

$$n < i + j \leq 2n - 1.$$

Сумата на диагоналите от Таблица 3 представлява оценките за очакваните стойности, които ще трябва да бъдат изплатени от щети, възникнали през предходни години. Тези стойности са разпределени по години за периода от следващите  $n$  години [2], [3].

$$Z_{Y_{n+i}} = \sum_{j=0}^{n-i-1} \hat{X}_{n-j;i+j}, i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (2)$$

### МЕТОД НА БОРНХУТЕР-ФЪРГЮСЪН

Методът на Борнхутер-Фъргюсън (BF метод) е създаден от двама актюери - Борнхютър и Фъргюсън, и е представен за първи път през 1975 г. Той съчетава характеристиките на верижно-стълбовидния метод и метода на коефициента на очакваните загуби и присвоява тегла за процента на платените загуби и възникналите загуби. За разлика от верижно-стълбовидния метод, който изгражда модел въз основа на минал опит, метода на Борнхутер-Фъргюсън изгражда модел въз основа на вероятността застрахователят да бъде изложен на риск.

Методът на коефициента на очакваните загуби (loss ratio) е техника, използвана за определяне на прогнозния размер на претенциите спрямо спечелените премии, която се използва, когато застрахователят не разполага с подходящи данни за минали застрахователни събития, които да предостави поради промени в предлаганите от него продукти.

Методът на Борнхутер-Фъргюсън оценява IBNR за определен период от време, като оценява крайната загуба за определени излагания на риск и след това оценява процента от тази крайна загуба, който не е бил докладван по това време. Борнхютър-Фъргюсън изчислява приблизителната загуба като сума от докладваната загуба плюс IBNR, като IBNR се изчислява като приблизителната крайна загуба, умножена по процента на загубата, която не е докладвана [4].

Първо за BF метода, използвайки вече пресметнатите фактори на развитие ( $f$ ) за верижно-стълбовидния метод, се пресмятат кумулативните фактори на развитие ( $df$ ) чрез следната формула:

$$df_i = \prod_{j=i}^n f_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Пресметнатите кумулативни фактори на развитие се подреждат назад и образуват така наречените фактори основаващи се на кумулативните фактори на развитие ( $F$ ). След това се пресмята процентът на непредадените исокове, чрез формулата:

$$1 - \frac{1}{F}$$

Коефициентът на очакваните загуби (loss ratio) се пресмята като съотношение на възникналите исокове към спечелената премия ( $EP$ ) за съответния период. Предполага се, че коефициентът на очакваните загуби е един и същ за различните години. Използвайки това се пресмятат първоначалните крайни загуби ( $IUL$ ):

$$IUL = \text{loss ratio} * EP$$

Накрая се пресмятат нововъзникващи задължения ( $EL$ ) като:

$$EL = IUL * \left(1 - \frac{1}{F}\right)$$



Сумата от нововъзникващи задължения (EL) представлява оценка за очакваните стойности, които ще трябва да бъдат изплатени от щети, възникнали от предходни години.

### ЧИСЛЕНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ

За периода 2000 – 2022г. разглеждаме данни за “Гражданската отговорност” на автомобилистите. За последните 10 години стойностите на изплатените претенции по застраховката са взети от официалния сайт на Комисията за финансов надзор [5].

Първо данните са оценени по Верижно-стълбовидния метод като са изчислени 13 триъгълника на развитие. Получените резултати са представени в Таблица 4. Като в последната колона от таблицата са изчислени общите суми на прогнозираните резерви, които застрахователят трябва да задели.

**ТАБЛИЦА 4. Прогнозни суми по Верижно-стълбовиден метод**

ПЕРИОД	ОБЩО										
2000-2010	0	0	28233	36638	38672	296454	557954	1631813	5585369	2967444	<b>37872577,78</b>
2001-2011	0	0	59675	25485	63810	757985	1355946	2670303	8031795	38927246	<b>51892245,62</b>
2002-2012	0	0	64420	37401	96460	1038127	1615309	2991047	7702855	38554995	<b>52100614,14</b>
2003-2013	0	5135	97622	72382	206346	1217123	1682660	2655692	6967814	35993923	<b>48898696,32</b>
2004-2014	0	0	36	0	530608	1998986	2707615	3412337	9532851	42696517	<b>60878950,19</b>
2005-2015	21931	0	191099	371864	565802	1691125	2335018	3086667	8980340	45243363	<b>62487209,16</b>
2006-2016	531829	0	96882	75970	716221	2238038	2819857	3727340	10563644	58134292	<b>78904071,84</b>
2007-2017	678828	0	0	0	1207785	2316967	3107879	5329415	11861768	45889341	<b>70391984,55</b>
2008-2018	35458	51717	43282	36088	1337803	2687355	4633915	8795410	14632843	54861876	<b>87115748,82</b>
2009-2019	69217	0	211169	20618	1697174	3125862	6143281	9634157	17738606	62933994	<b>101574077,80</b>
2010-2020	241368	2140553	1264421	812889	1469284	3973765	6738313	10751198	20131245	56161502	<b>103684537,76</b>
2011-2021	0	2303223	1636373	1997741	1796326	3928503	7795934	10783917	17324819	66812189	<b>114379026,39</b>
2012-2022	0	593693	2758206	3061462	1907568	4222349	7960798	8950550	19770842	67249529	<b>116474997,34</b>

Като втора стъпка прогнозите са пресметнати по ВФ метода. Тъй като не са налични реални данни за годишните спечелени премии (EP) за целта на нашия анализ симулираме данни и използваме очакването на неизплатените претенции за дадените периоди  $EP = E(X)$ . Получените резултати са представени в Таблица 5 като последната колона представлява сумата на прогнозираните резерви.

**ТАБЛИЦА 5. Прогнозни суми по Метода на Борнхутер-Фъргюсън**

ПЕРИОД	ОБЩО											
2000-2010	0	0	0	28253	66742	116032	434238	1148353	3202616	9357959	40039826	<b>54394019</b>
2001-2011	0	0	0	58908	92125	173315	995681	2655531	5367234	13845492	52140921	<b>75329207</b>
2002-2012	0	0	0	63191	112764	255513	1367833	3025769	6337985	13849237	52050273	<b>77062564</b>
2003-2013	0	0	5025	101799	216117	489986	1716341	3574154	6090820	12772709	48313452	<b>73280403</b>
2004-2014	0	-47018	-116541	-167463	-662727	-140738	1912097	4663726	8083691	18166459	62483412	<b>94174897</b>
2005-2015	0	22312	-255328	-145645	229017	829914	2557307	4905666	8081822	17962652	64552641	<b>98740358</b>
2006-2016	0	534616	508646	674118	779055	1484206	3770658	6670053	11175040	22401782	83661138	<b>131659312</b>
2007-2017	0	682728	678919	661217	623644	1855662	4301379	7674937	13651253	26304608	69408625	<b>125842972</b>
2008-2018	0	35348	87933	127991	170067	1502290	4255628	9252877	18754171	32689521	86798144	<b>153673970</b>
2009-2019	0	68626	64373	276320	319929	2006799	5277968	11702746	21313951	39584386	103054222	<b>183669321</b>
2010-2020	0	234308	2329264	3758981	4898166	6996875	11365414	18166184	29408944	50417775	98286279	<b>225862189</b>
2011-2021	0	-1859920	287367	1931972	4143535	6226564	10308046	18512892	29981169	42894647	118522708	<b>230948980</b>
2012-2022	0	-1043591	-570037	2000622	5138347	7160828	11634598	19904669	25553418	49831847	119316070	<b>238926772</b>

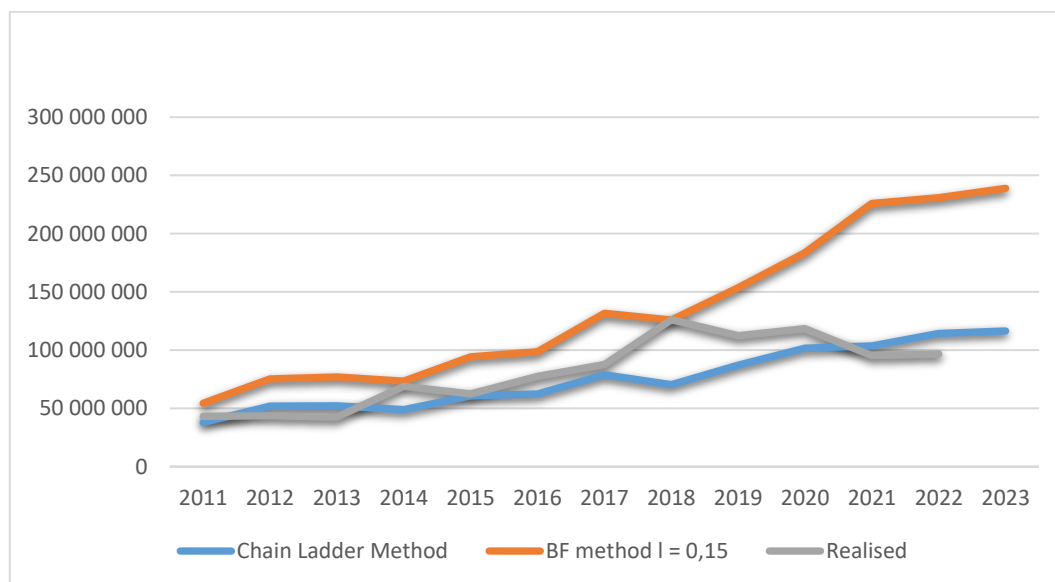
В таблица 6 са представени обобщени резултати за изчислените прогнози за съответните години по двата метода. В третата колона е изчислена процентната разлика между резултати получени по Верижно-стълбовидния метод и Метода на BF по следния начин:

$$\frac{BF - CLM}{BF}$$

ТАБЛИЦА 6. Резултати

ГОДИНИ	CHAIN LADDER METHOD	BF METHOD	РАЗЛИКИ
2011	37 872 578	54394019,11	30%
2012	51 892 246	75329206,95	31%
2013	52 100 614	77062564,24	32%
2014	48 898 696	73280402,74	33%
2015	60 878 950	94174897,17	35%
2016	62 487 209	98740358,48	37%
2017	78 904 072	131659311,8	40%
2018	70 391 985	125842971,9	44%
2019	87 115 749	153673970	43%
2020	101 574 078	183669320,7	45%
2021	103 684 538	225862188,8	54%
2022	114 379 026	230948980,2	50%
2023	116 474 997	238926771,72	51%

Фигура 1 представлява графика на прогнозираните резерви получени по Верижно-стълбовидния метод и BF метода и реализираните стойности. На графиката се вижда, че реалните стойности се движат между прогнозираните по двата метода като са по близки до тези на Верижно-стълбовидния метод. Към края на период вече има съществена разлика между реализираните стойности и прогнозираните по метода на BF и това се дължи на нарастваща премия тъй като BF метода зависи от нея.



ФИГУРА 1. Графика на прогнозираните резерви получени по Верижно-стълбовидния метод и BF метода и реализираните стойности

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Верижно-стълбовидният метод и методът на Борнхутер-Фъргюсън са най-широко използваните методи за оценяване на резервите при наличието на IBNR искове. Двата метода както имат прилики така имат и разлики.

Една от съществените разлики между двата метода е случаите в които могат да се използват. Верижно-стълбовидният метод е подходящ да се използва, когато е налице постоянен модел на развитие на загубите и значителен брой докладвани претенции. Докато методът на ВФ е подходящ в случаите, когато не разполагаме с данни за развитието или данните са ненадеждни.

Също така ВФ методът има тенденция да подценява прогнозите, когато загубите са минимални и премията е ниска и да ги надценява, когато загубите са значителни и премията е висока. Именно това наблюдаваме в направения анализ. Високата процентна разлика към края на разглеждания период се дължи именно на правопрпорционалната зависимост на ВФ метода от размера на премията.

Методът на Борнхутер-Фергюсън е по подходящ за оценяване на резервите, когато претенциите са с ниска честото, но висока тежест.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2023 – ФПНО – 04, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

## **REFERENCES**

- [1] Brayanov, I., Risk analysis, University of Ruse “Angel Kanchev”, 2016.
- [2] Raeva E., V. Pavlov, S. Georgieva (2021), Claim Reserving Estimation by Using the Chain Ladder Method, AIP Conference Proceedings, 2321, 030029.
- [3] Raeva E., V. Pavlov, (2017), Planning Outstanding Reserves in General Insurance, AIP Conference Proceedings 1895 (1), 050009.
- [4] Schmidt, K.D., Zocher, M. (2016). Bornhuetter–Ferguson Principle.
- [5] <https://www.fsc.bg/bg/pazari/zastrahovatelen-pazar/statistika/obshto-zastrahovane>.

FRI-2.203-SSS-FM-04

---

## BUILDING A PORTFOLIO USING NEURAL NETWORKS AND MARKOWITZ MODERN THEORY<sup>4</sup>

---

### **Tsvetelin Tsonev - Student**

Financial Mathematics Student,  
University of Ruse “Angel Kanchew”  
E-mail: cgconevev@gmail.com

### **Assoc. Prof. Ivan Georgiev, PhD**

Department of Applied Mathematics and Statistics,  
University of Ruse “Angel Kanchew”  
E-mail: irgeorgiev@uni-ruse.bg

### **Assist. Prof. Slavi Georgiev, PhD**

Department of Applied Mathematics and Statistics,  
University of Ruse “Angel Kanchew”  
E-mail: sggeorgiev@uni-ruse.bg

**Abstract:** A technical analysis has been conducted on real data of selected financial instruments using Excel and MATLAB. Price movements of these instruments have been forecasted using the NARXNN method. As a result, expected rates of return for the financial instruments are evaluated. The modern portfolio theory of Markowitz is utilized to organize an optimal risk portfolio based on a specific criterion. Percentages of the financial instruments participating in the optimal risk portfolio are determined. Expected rate of return, standard deviation, and the capital distribution line are calculated. Taking into account positions (long, short), percentage allocation of the portfolio, the latest known and actual prices, and the forecasted prices, a comparison is made between the realized and forecasted rates of return.

**Keywords:** Portfolio optimization, NARX neural network, financial time series, modern portfolio theory, nonlinear optimization.

## REFERENCES

- [1] <https://finance.yahoo.com>
- [2] J. M. Kihoro, R. O. Otieno, and C. Wafula, Seasonal time forecasting: A comparative study of ARIMA and ANN models, African Journal of Science and Technology, Science and Engineering Series, 5(2), 41-49, (2004).
- [3] D. Stathakis, How many hidden layers and nodes?, International Journal of Remote Sensing, 30(8), 2133-2147, (2009).
- [4] P. Zhang, and C. Shen, Choice of the number of hidden layers for back propagation neural network driven by stock price data and application to price prediction, Journal of Physics: Conf. Series, 1302, 022017, (2019).
- [5] [https://www.researchgate.net/figure/An-overview-of-NARXNN-architecture\\_fig1\\_368334262](https://www.researchgate.net/figure/An-overview-of-NARXNN-architecture_fig1_368334262)
- [6] [https://bjournal-bfu.bg/uploads/posts/2007\\_1\\_41\\_48\\_bg.pdf](https://bjournal-bfu.bg/uploads/posts/2007_1_41_48_bg.pdf)
- [7] W. Enders, *Applied Econometric Time Series*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., (1995).
- [8] T. C. Mills, *Time Series Techniques for Economists*, Cambridge University Press, (1990).
- [9] R. Tsay, *Analysis of Financial Time Series*, Third Edition, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., (2010).

---

<sup>4</sup> This Report is presented on a Student Scientific Session on 23 May 2023 in the “Financial Mathematics” section and nominated for publication in Compiled edition of Reports Awarded with “Best Paper“ Cristal Prize’23, as a hard copy (ISBN 978-954-712-826-2) and on-line on the Conference Website (<http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=bestPapers>)

[10] K. A. Smith, and J. N. D. Gupta, Neural networks in business: techniques and applications for the operations researcher, *Computers & Operations Research*, 27, 1023-1044, (2000).

[11] S. Russel, and P. Norvig, *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 4th edition, New Jersey: Pearson Education, Inc., (2020).

[12] Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). *Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root*. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 427-431

[13] Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). *Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root*. *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.

ON SYNCHRONIZATION OF NEURONAL DYNAMICS  
WITH SLOW INHIBITORY SYNAPSES<sup>5</sup>

**Teodor Georgiev, PhD student**

Differential Equations Doctoral Programme  
University of Ruse  
E-mail: t.georgiev@mg-babatonka.bg

**Assoc. Prof. Julia Chaparova, PhD**

Department of Mathematics  
University of Ruse  
E-mail: jchaparova@uni-ruse.bg

***Abstract:** In this paper, we study the dynamics of two mutually coupled neurons connected via inhibitory synapses. The key assumption in the model is that the release of the neurotransmitter activates some secondary processes in the synapses that give additional time to the postsynaptic neuron before it feels the inhibition. A parameter set is established in which a synchronous solution can be constructed. In that case uniqueness and stability is proved. A fixed point theorem is used.*

***Keywords:** inhibition, synchronous solution, relaxation oscillator, geometric singular perturbation theory*

**ВЪВЕДЕНИЕ**

Голяма роля за синхронизиране на невронните динамики имат инхибиторните (потискащите) неврони. Въпреки че са само около 15% от всички неврони в мозъка, тяхната активност е от изключително значение за правилното функциониране на нервната система, включително за познавателните, двигателните и сетивни функции на мозъка, [1]. Днес е добре известно, че при всички психиатрични разстройства и при някои неврологични заболявания като болестта на Паркинсон има някакви нарушения в предаването на нервни импулси от страна на инхибиторните неврони, [2].

В тази статия е разгледан математически модел за синхронизиране на два еднакви неврона, свързани с потискащи синапси. Изложението следва основно [3]. Въпреки че моделът се отнася само до две нервни клетки, разглежданията могат да се обобщят за синхронизиране на клъстери от неврони. Освен това редица неврони имат разпръснати по повърхността си рецептори, чрез които реагират на инхибиторните невротрансмитери, като ГАВА например. Това означава, че инхибиторните неврони могат да регулират активността на голямо количество нервни клетки, без да са синаптично свързани с тях, [4].

Предполагаме, че динамиката на всеки един от невроните (без да са свързани помежду си), може да се опише със системата

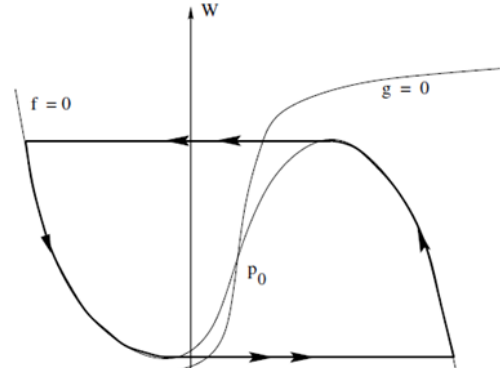
$$\frac{dv}{dt} = f(v, w) \tag{1}$$

$$\frac{dw}{dt} = \epsilon g(v, w)$$

известна като релаксационен осцилатор. Тук с  $v$  е означен мембрания потенциал, а  $w$  е релаксационна променлива, която например може да представя активирането на калиевия ток, както е в модела на Morris-Lesar, или инактивирането на калциевия ток, както е в модела в [5]. Малкият положителен параметър  $\epsilon$  показва, че  $w$  се развива в бавен времеви мащаб. Приемаме, че  $v$ -нулклината  $f(v, w) = 0$  е крива с кубично-подобна форма, докато  $w$ -

<sup>5</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 23 май 2023 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ВЪРХУ СИНХРОНИЗИРАНЕТО НА НЕВРОННИ ДИНАМИКИ С БАВНИ ПОТИСКАЩИ СИНАПСИ.

нуклината  $g(v, w) = 0$  е монотонно растяща функция, която пресича  $v$ -нуклината точно в една точка  $p_0$ . Нека още  $f > 0$  под  $v$ -нуклината (съотв.  $f < 0$  над  $v$ -нуклината) и  $g > 0$  под  $w$ -нуклината (съотв.  $g < 0$  над  $w$ -нуклината). Това означава, че ако  $p_0$  лежи върху левия клон на кубичната  $v$ -нуклина,  $p_0$  е асимптотически устойчива стационарна точка. Ако обаче  $p_0$  лежи върху средния клон на кубичната нуклина, то  $p_0$  е неустойчива. В разглежданията по-нататък приемаме, че е налице именно този случай. Ясно е, че за всички достатъчно малки  $\epsilon$  съществува устойчив граничен цикъл и при  $\epsilon \rightarrow 0$  граничният цикъл се приближава към сингулярен граничен цикъл, Фиг. 1.



Фиг. 1 Нуклини и сингулярен граничен цикъл

Сингулярният граничен цикъл се състои от четири части. Две от тях лежат върху кубичната нуклина и съответстват на мълчаливата (левия клон) и активната (десния клон) фаза на неврона. Другите две части – скок напред и скок назад – са хоризонтални линии във фазовата равнина, свързващи левия и десния клон. Скокът напред към активната фаза в минимума върху левия клон на кубичната крива и скокът назад в максимума върху десния й клон съответстват на хистерезиса, породен от загубата на устойчивост.

В тази статия разглеждаме математически модел на два взаимно свързани неврона с потискащи синапси

$$v_i' = f(v_i, w_i) - s_i g_{syn}(v_i - v_{syn}), \quad w_i' = \epsilon g(v_i, w_i), \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

$$x_i' = \epsilon \alpha (1 - x_i) H(v_j - \theta_v) - \epsilon \beta x_i, \quad s_i' = \phi(1 - s_i) H(x_i - \theta_{syn}) - \epsilon K s_i, \quad i \neq j \quad (3)$$

Тук  $(v_1, w_1)$  и  $(v_2, w_2)$  съответстват на двата осцилатора,  $g_{syn} > 0$  е максималната проводимост на синапса, реверсивният потенциал  $v_{syn}$  е такъв че  $v > v_{syn}$  за всяко ограничено сингулярно решение (т.е. синапсът е потискащ), променливите  $s_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ , показват доколко постсинаптичната проводимост зависи от пресинаптичния потенциал,  $\phi, K, \alpha, \beta > 0$  са скоростни константи,  $H$  е функцията на Хевисайд,  $\theta_{syn} > 0$  и  $\theta_v$  са прагови константи.

Да отбележим, че бавните синапси се активират върху бързата времева скала, а се деактивират върху бавната времева скала. Освен това, с въвеждането на променливите  $x_i$  се осигурява допълнително време от момента на скока напред на единия осцилатор до момента, в който другия осцилатор ще усети потискането. Както ще видим, това забавено включване на потискането е решаващо за устойчивата синхронизация на двата осцилатора. Модели със закъснение от този вид са разгледани и от други автори, [6].

### РЕДУЦИРАНИ ПОДСИСТЕМИ – БЪРЗИ И БАВНИ РЕЖИМИ

Бързите уравнения се получават от системата (2)-(3) като се положи  $\epsilon = 0$ , тази подсистема описва скоковете на осцилаторите напред и назад. Бавните уравнения, получени от (2)-(3) със заместване  $\tau = \epsilon t$  и след това с полагане  $\epsilon = 0$ , описват режимите, в които клетките са в мълчалива или активна фаза. Бавните режими са:

#### 1) Двете клетки са мълчаливи.

Означаваме производните по отношение на бавното време  $\tau$  с  $\dot{\phantom{x}}$ . В този режим траекториите на клетките лежат върху левия клон на „кубичната“ повърхнина

$$f(v, w) - s g_{syn}(v - v_{syn}) = 0, \quad (4)$$

$$\dot{w}_i = g(v_i, w_i), \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

и понеже в този режим  $v_j < \theta_v$ ,  $j = 1, 2$ ,

$$\dot{x}_i = -\beta x_i, \quad \begin{cases} \dot{s}_i = -Ks_i & \text{ако } x_i < \theta_{syn} \\ s_i = 1 & \text{ако } x_i > \theta_{syn} \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Горната подсистема може да се редуцира още: от (4) изразяваме левия клон на кубичната повърхнина като  $v = h_L(w, s)$  и заместваме в (5), ако означим  $G_L(w, s) = g(h_L(w, s), w)$ , то

$$\dot{w}_i = G_L(w_i, s_i), \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

В този режим двете клетки не са свързани. Свързването се осъществява в момента, в който едната клетка скочи към активната фаза върху десния клон на „кубичната“ повърхнина (4). Кривата на скоковете напред  $w = w_L(s)$  във фазовата равнина на бавните променливи  $(w, s)$  съответства на кривата на минимумите върху левия клон на (4). Ще покажем в Лема 1, че

$$\frac{dw_L}{ds} < 0,$$

т.е. колкото по-голямо е потискането  $s \in [0, 1]$ , толкова по-малка трябва да стане стойността на  $w_i$ , за да може клетка  $i$  да скочи напред.

## 2) Двете клетки са активни.

В този режим траекториите на клетките лежат върху десния клон на „кубичната“ повърхнина (4),

$$f(v, w) - sg_{syn}(v - v_{syn}) = 0, \quad \dot{w}_i = g(v_i, w_i), \quad i = 1, 2$$

и от  $v_j > \theta_v$ ,  $j = 1, 2$ , в този режим следва

$$\dot{x}_i = (\alpha + \beta) \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_i \right), \quad \begin{cases} \dot{s}_i = -Ks_i & \text{ако } x_i < \theta_{syn} \\ s_i = 1 & \text{ако } x_i > \theta_{syn} \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Ако от (4) изразим десния клон на кубичната повърхнина като  $v = h_R(w, s)$  и заместим в (5), означавайки  $G_R(w, s) = g(h_R(w, s), w)$ , то

$$\dot{w}_i = G_R(w_i, s_i), \quad i = 1, 2.$$

Ако синапсите бяха директни, то скокът на едната клетка напред към активната фаза щеше веднага да включи потискането на другата клетка на  $s = 1$ , което показва невъзможност за съществуване на устойчиво синхронизирано решение. При индиректните синапси в нашия случай скокът на клетка 1 към активна фаза включва потискането  $s_2 = 1$  на клетка 2 със закъснение, породено от необходимостта  $x_2$  да нарасне и да пресече праговата стойност  $\theta_{syn}$ . Това допълнително време дава възможност (при определени условия) на клетка 2 да стигне до кривата  $w_L(s)$  и също да скочи към активната фаза преди  $s_2$  да стане 1.

Една клетка напуска активната фаза, когато достигне максимума върху десния клон на кубичната крива  $f(v, w) - g_{syn}(v - v_{syn}) = 0$  (това е кривата, получена от (4) при  $s = 1$ ). Означаваме точката за скок назад във фазовата равнина на бавните променливи  $(w, s)$  с  $w_R(1)$ .

3) Едната клетка е мълчалива, а другата е активна – разглежданията са представени в изложението по-долу.



## ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

За система (2)-(3) предполагаме, че са изпълнени следните условия:  $f, g \in C^1$ ,

$$(A) \quad \frac{\partial f}{\partial w} < 0, \quad \frac{\partial g}{\partial v} > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial w} < 0$$

близо до  $v$ -нулклината,  $f_w$  е монотонно растяща по  $v$  и монотонно намаляваща по  $w$ , и  $g_v = 0$  близо до десния клон на (4) за  $s \in [0, 1]$ . Освен това предполагаме, че  $\alpha$  и  $\beta$  са достатъчно големи (такива, че изрази от вида  $(\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)}$  и  $\beta e^{-\beta}$  са достатъчно малки) и

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} > \theta_{syn}$$

(това условие гарантира, че потискането ще се включва и изключва по време на всеки цикъл на осцилаторите). Означаваме с

$$a_- = \min \left( -\frac{\partial g}{\partial w} \right) > 0 \quad \text{върху левия клон на (4) за } s \in [0, 1].$$

Нека  $(w^*, s^*) = (w_L(s^*), s^*)$  е точката върху кривата  $w = w_L(s)$ , в която синхронизираното решение ще скочи напред, и нека  $\lambda = w'_L(s^*)$  (в Лема 1 ще покажем, че  $\lambda < 0$ ). Означаваме още с  $a_+$  стойността на  $g(v, w)$  в точката на скока напред на синхронизираното решение върху десния клон на (4).

В сила е следната

**Лема 1** Нека кривата на минимумите върху левия клон на „кубичната“ повърхнина (4) е означена с  $(v_L(s), w_L(s))$ . Тогава  $\lambda = w'_L(s^*) < 0$ .

**Доказателство.** Полагаме  $\Phi(v, w, s) = f(v, w) - sg_{syn}(v - v_{syn})$  дясната страна на (4). Тъй като (4) задава неявно левия клон  $v = h_L(w, s)$ , то

$$\frac{\partial h_L}{\partial w} = -\frac{\Phi_w}{\Phi_v}, \quad \frac{\partial h_L}{\partial s} = -\frac{\Phi_s}{\Phi_v}.$$

Заместваме в (4) с  $(v_L(s), w_L(s))$  и диференцираме по  $s$ . Така получаваме

$$\Phi_v v'_L(s) + \Phi_w w'_L(s) + \Phi_s = 0.$$

Но в точките на минимум върху левия клон на (4)  $\frac{\partial h_L}{\partial w}$  намалява неограничено. Следователно в тези точки  $\Phi_v = 0$  и

$$w'_L(s) = -\frac{\Phi_s}{\Phi_w} = \frac{g_{syn}(v_L(s) - v_{syn})}{f_w(v_L(s), w_L(s))}.$$

От условие (A) и факта, че синапсите са потискащи, следва  $\lambda = w'_L(s^*) < 0$ .

Чрез последователност от лемите ще докажем следния основен резултат:

**Теорема 1.** Нека нелинейностите и константите в (2)-(3) удовлетворяват горните условия. Ако  $K < a_-$  и  $Ks^* < a_+ / |\lambda|$ , то (2)-(3) има единствено синхронизирано решение, лежащо върху сингулярния граничен цикъл, и то е локално асимптотически устойчиво.

**Построяване на синхронизираното решение.** Нека двете клетки първоначално са в активна фаза върху десния клон на (4) близо една до друга и нека (без ограничение на общността) клетка 1 е върху точката за скок назад, а клетка 2 е зад нея. Това означава, че  $w_2(0) < w_1(0)$  и  $w_1(0) - w_2(0)$  е достатъчно малко. Нека още  $\alpha / (\alpha + \beta) > x_i(0) > \theta_{syn}$ ,  $i = 1, 2$ . Ще следваме двете клетки върху сингулярния граничен цикъл, докато едната от тях се върне в изходна позиция за скок назад. Нека това стане по отношение на бавното време при  $\tau = T_0$ . Ако след този пълен цикъл двете клетки са по-близо една до друга, отколкото първоначално са били, то синхронизираното решение е асимптотически устойчиво.

Да отбележим изрично, че след скока на двете клетки назад, е възможно (при определени условия) всяка една от тях *първа* да скочи напред. Както ще видим в доказателството на Теоремата, условието  $K < a_-$  се отнася до случая, в който клетките запазват наредбата си до края на цикъла, а условието  $Ks^* < a_+ / |\lambda|$  съответства на случая, в който в края на цикъла водеща е по-бавната клетка. Накрая ще коментираме биофизичния смисъл на тези условия и отношението на всяко от тях към устойчивостта на синхронизираното решение.

Методът за доказване на теоремата се състои в следното. Разглеждаме изображението на Поанкаре

$$P(w_2(0), x_1(0), x_2(0)) = (w_i(T_0), x_1(T_0), x_2(T_0)),$$

където  $i = 2$ , ако клетка 1 първа достигне точката за скок назад, и  $i = 1$ , ако клетка 2 първа достигне тази точка. Ще докажем, че изображението  $P$  е свиващо. Това се извършва на две стъпки: първата стъпка доказва, че дефиниционното множество на  $P$  се свива равномерно (под действието на  $P$ ) върху множеството от решения със синхронизирани начални условия  $w_2(0) = w_1(0) = w_R(1)$ ,  $x_1(0) = x_2(0)$ . Това е едномерно подмножество, параметризирано чрез  $x_1(0)$ . Втората стъпка доказва, че  $P$ , ограничено върху това едномерно подмножество, е също равномерно свиващо изображение. Двете стъпки заедно гарантират единственост и устойчивост на синхронизираното решение. Анализът се извършва по отношение на бавното време  $\tau$ .

Въвеждаме следните означения: Нека  $\delta$  е времето, необходимо на клетка 2 да достигне точката за скок назад от началната позиция върху десния клон на (4);  $\delta_x = |x_1(0) - x_2(0)|$ . Предполагаме, че  $\delta$  и  $\delta_x$  са достатъчно малки. От условието  $x_i(0) > \theta_{syn}$ ,  $i = 1, 2$  следва, че първоначално двете клетки са максимално потиснати ( $s_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ ). Нека  $t_i$  е моментът, в който  $x_i(\tau) = \theta_{syn}$ . След  $t_i$  траекторията на клетка  $i$  лежи в мълчаливата фаза и нейното потискане  $s_i$  намалява. Нека  $T_i$  е моментът, в който траекторията на клетка  $i$  достигне кривата  $w_L(s)$  за скок напред.

Изложението по-нататък се отнася за предположението  $t_2 < t_1$ . Разглежданията при  $t_2 > t_1$  се провеждат по подобен начин.

В сила са следните две лема, свързани със скока назад.

**Лема 2.**  $0 < x_1(\delta) - x_1(0) < \delta$ .

**Доказателство.** Понеже при  $0 < \tau < \delta$  клетка 1 е в мълчалива фаза, а клетка 2 е в активна фаза с  $v_2 > \theta_v$ , то от първото уравнение в (7) следва

$$x_1(\tau) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(0) \right) e^{-(\alpha + \beta)\tau},$$

следователно

$$0 < x_1'(\tau) = (\alpha + \beta) \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(0) \right) e^{-(\alpha + \beta)\tau}, \quad 0 < \tau < \delta. \quad (8)$$

Ще покажем, че в този интервал  $x_1'(\tau) < 1$ . Допускаме, че

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_i(0) < e^{-(\alpha + \beta)m} \quad \text{за някое } 0 < m < T_0 - T_2. \quad (9)$$

Тогава от (8)

$$x_1'(\tau) < (\alpha + \beta) e^{-(\alpha + \beta)m} < 1$$

за достатъчно голямо  $\alpha + \beta$ , откъдето неравенството следва.

Да отбележим, че в интервала  $T_j < \tau < T_0$ , в който клетка  $j$  е в активна фаза с  $v_j > \theta_v$ , отново от първото уравнение в (7) следва

$$x_i(\tau) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_i(T_j) \right) e^{-(\alpha+\beta)(\tau-T_j)},$$

откъдето

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_i(T_0) = \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_i(T_j) \right) e^{-(\alpha+\beta)(T_0-T_j)} < e^{-(\alpha+\beta)m},$$

понеже  $0 < x_i(T_j) < \theta_{syn} < \frac{\alpha}{\alpha+\beta} < 1$ . Това означава, че след един пълен цикъл условието (9) е отново изпълнено.  $\square$

**Лема 3.**  $t_1 - t_2 + \delta < \frac{1}{\beta \theta_{syn}} \left( \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \theta_{syn} \right)$ .

**Доказателство.** Клетка 1 скача назад при  $\tau = 0$  и остава в мълчалива фаза с  $v_1 < \theta_v$  до  $\tau = T_1$ . От  $\dot{x}_2 = -\beta x_2$  в  $0 < \tau < T_1$  следва

$$x_2(\tau) = x_2(2\delta) e^{-\beta(\tau-2\delta)}, \quad 0 < \tau < T_1.$$

Клетка 2 скача назад при  $\tau = \delta$  и остава в мълчалива фаза с  $v_2 < \theta_v$  до  $\tau = T_2$ . От  $\dot{x}_1 = -\beta x_1$  следва

$$x_1(\tau) = x_1(\delta) e^{-\beta(\tau-\delta)}, \quad \delta < \tau < T_2.$$

От  $x_1(t_1) = x_2(t_2) = \theta_{syn}$  и от горните равенства следва

$$t_1 = \delta + \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{x_1(\delta)}{\theta_{syn}} \right), \quad t_2 = 2\delta + \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{x_2(2\delta)}{\theta_{syn}} \right).$$

По този начин

$$t_1 - t_2 + \delta = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{x_1(\delta)}{x_2(2\delta)} \right) = \frac{1}{\beta} \ln \left( 1 + \frac{x_1(\delta) - x_2(2\delta)}{x_2(2\delta)} \right).$$

Да отбележим, че от  $t_2 < t_1$  следва  $x_1(\delta) > x_2(2\delta)$ . Тъй като  $x_2(0) > \theta_{syn}$ , можем да изберем  $\delta$  така че  $x_2(2\delta) > \theta_{syn}$ . Тогава

$$t_1 - t_2 + \delta < \frac{1}{\beta} \frac{x_1(\delta) - x_2(2\delta)}{\theta_{syn}} < \frac{1}{\beta \theta_{syn}} \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \theta_{syn} \right). \quad \square$$

Доказателството на Теорема 1 при  $t_2 < t_1$  е разделено на два основни случая.

**Случай 1.** Клетка 1 (която в началния момент е била в точката за скок назад) първа достига кривата  $w_L(s)$  и скача напред, а след нея е клетка 2 ( $T_1 < T_2$ ), и клетка 1 първа достига края на цикъла.

**Случай 2.** Или клетка 1 първа достига кривата  $w_L(s)$  и скача напред, а след нея е клетка 2 ( $T_1 < T_2$ ), но клетка 2 първа достига края на цикъла (**Случай 2А**), или клетка 2 първа достига кривата  $w_L(s)$  и скача напред, а след нея е клетка 1 ( $T_2 < T_1$ ), и клетка 2 първа достига края на цикъла (**Случай 2В**).

Следното твърдение е в сила в Случай 1.

**Твърдение 1.** Ако  $K < a_-$ , то  $T_2 - T_1 \leq \rho_1 \delta$  за някое  $0 < \rho_1 < 1$ .

За неговото доказателство е необходима

**Лема 4.** Ако  $K < a_-$ , то наклонът на кривата на минимумите  $w_L(s)$  остава отрицателен във фазовата равнина  $(w, s)$  по продължение на решенията на

$$\dot{w} = G_L(w, s), \quad \dot{s} = -Ks \tag{10}$$

назад във времето.

**Доказателство.** Разглеждаме вариационните уравнения, асоциирани със системата (10). Тези уравнения са

$$\dot{W} = -aW - bS, \quad \dot{S} = -KS \quad (11)$$

(вж. [7]), където  $a = -\partial G_L(w, s)/\partial w$ ,  $b = -\partial G_L(w, s)/\partial s$  са пресметнати по продължение на решенията на (10). Вариационните уравнения проследяват изменението (вариацията) на  $(w, s)$  по посока  $(W, S)$  по продължение решенията на (10). Означаваме  $m \equiv W/S$ . Ако положим  $m(0) = \lambda$ , наклонът на  $w_L(s)$  в точката за скок напред, то  $m(\tau)$  за  $\tau < 0$  представлява еволюцията на този наклон назад във времето по продължение решенията на (10). От (11) за  $m(\tau)$  имаме

$$\dot{m} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{W}{S} \right) = \frac{\dot{W}S - W\dot{S}}{S^2} = \frac{(-aW - bS)S + KSW}{S^2} = -b + (K - a)m.$$

От условие (A), дефиницията на  $G_L(w, s) = g(h_L(w, s), w)$  и равенствата, изведени в доказателството на Лема 1, имаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_L}{\partial w} &= -\frac{\Phi_w}{\Phi_v} = -\frac{f_w}{\Phi_v} < 0, & \frac{\partial h_L}{\partial s} &= -\frac{\Phi_s}{\Phi_v} = \frac{g_{syn}(v - v_{syn})}{\Phi_v} < 0, \\ a &= -\frac{\partial G_L}{\partial w} = -\frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial h_L}{\partial w} - \frac{\partial g}{\partial w} > 0, & b &= -\frac{\partial G_L}{\partial s} = -\frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial h_L}{\partial s} > 0. \end{aligned}$$

Тук използвахме, че  $\Phi_v < 0$  върху левия клон на (4) и  $v_{syn} < v$ . Освен това  $K - a < 0$ , понеже  $K < a_- = \min \left( -\frac{\partial g}{\partial w} \right)$ .

Ще докажем, че  $m(\tau) < \lambda < 0$  за  $\tau < 0$ . За това е достатъчно да докажем, че

$$-b + (K - a)\lambda > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a - K} < |\lambda| = \frac{g_{syn}(v^* - v_{syn})}{-f_w(v^*, w^*)}$$

където  $v^* = v_L(s^*)$ . Лявата страна на последното неравенство се преобразува до

$$\frac{g_v g_{syn}(v - v_{syn})}{g_v(-f_w) + (K + g_w)\Phi_v} < \frac{g_v g_{syn}(v - v_{syn})}{g_v(-f_w)} = \frac{g_{syn}(v - v_{syn})}{-f_w}$$

и неравенството следва, понеже  $v_{syn} < v < v^*$ ,  $w > w^*$  и  $f_w$  е растяща по  $v$  и намаляваща по  $w$ .  $\square$

**Забележка.** Лема 4 е обобщение на Лема 3 в [3], където авторите съществено използват, че  $f$  е линейна по  $w$ .

**Доказателство на Твърдение 1.** Разглеждаме образът на кривата на минимумите  $w_L(s)$  при изображението (11), назад във времето, по продължение на решенията на (10), докато кривата стигне до позицията на клетка 1 при  $\tau = t_1$  (до момент  $\tau = t_i$  клетка  $i$  е с максимално потискане  $s_i = 1$ , след  $t_i$  траекторията ѝ във фазовата равнина  $(w, s)$  се определя от (10) до момент  $\tau = T_i$ , в който клетка  $i$  достига кривата  $w_L(s)$  и напуска мълчаливата фаза). Означаваме с  $\tau = t_3$  моментът, в който клетка 2 би скочила към активна фаза, ако клетка 1 скочеше напред при  $\tau = t_1$ , т.е.  $t_3$  е такава, че

$$T_2 - T_1 = t_3 - t_1.$$

Ще покажем, че  $t_3 - t_1 \leq \rho_1 \delta$  за някое  $0 < \rho_1 < 1$ .

Означаваме  $\hat{w}_1(\tau) \equiv w_1(\tau - \delta)$ . Следователно  $\hat{w}_1(\delta) = w_2(\delta)$  и понеже  $\hat{w}_1$  и  $w_2$  удовлетворяват първото уравнение в (10) с  $s = 1$  за  $\delta < \tau < t_2$ , то  $\hat{w}_1(t_2) = w_2(t_2)$ .

Разглеждаме отново транслираната назад във времето крива  $w_L(s)$  в позицията на клетка 1 при  $\tau = t_1$ . Друга точка от тази крива е позицията на клетка 2 при  $\tau = t_3$ . Означаваме с  $\lambda_1$  наклонът на хордата, свързваща тези две точки,

$$\lambda_1 = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{w_2(t_3) - w_1(t_1)}{s_2(t_3) - s_1(t_1)} = \frac{w_2(t_3) - w_1(t_1)}{-(1 - s_2(t_3))}.$$

От обобщената теорема за крайните нараствания следва, че съществува  $t_1 < \bar{\tau} < t_3$ , такова че:

$$\lambda_1 = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{\dot{W}(\bar{\tau})}{\dot{S}(\bar{\tau})},$$

което е наклонът на транслираната назад във времето крива  $w_L(s)$  при  $\tau = \bar{\tau}$ . В Лема 4 показахме, че наклонът на кривата във всяка точка е отрицателен. Така  $\lambda_1 < 0$ . По този начин  $w_2(t_3) > w_1(t_1)$ .

Означаваме с  $M = \frac{\max|G_L|}{\min|G_L|}$  в компактно множество  $0 \leq s \leq 1$ ,  $w_L(s) \leq w \leq w_R(1)$ .

Понеже  $g < 0$  над  $w$ -нулклината (вж. Фиг. 1), от (10) следва, че  $w_i$ ,  $i = 1, 2$  е намаляваща функция върху левия клон на (4). Така от  $0 < \delta < t_2 < t_1 < t_3$  имаме

$$0 < w_2(t_2) - w_2(t_3) < w_2(t_2) - w_1(t_1) = \hat{w}_1(t_2) - w_1(t_1) = w_1(t_2 - \delta) - w_1(t_1).$$

От теоремата на Лагранж за крайните нараствания следва, че съществуват  $t_2 < \xi_2 < t_3$  и  $t_2 - \delta < \xi_1 < t_1$ , такива че

$$|\dot{w}_2(\xi_2)|(t_3 - t_2) < |\dot{w}_1(\xi_1)|(t_1 - t_2 + \delta).$$

Следователно

$$t_3 - t_1 < t_3 - t_2 < M(t_1 - t_2 + \delta).$$

От Лема 3

$$t_3 - t_1 < \frac{M}{\beta\theta_{syn}} \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \theta_{syn} \right) \leq \rho_1 \delta$$

за някое  $0 < \rho_1 < 1$ , стига да изберем  $\beta$  достатъчно голямо.  $\square$

Твърдение 1 гарантира компресия (сближаване на двата осцилатора) по време на мълчаливата фаза. По време на активната фаза тази компресия се запазва.

**Твърдение 2.** При  $\tau = T_0$ , когато клетка 1 е в точката за скок назад  $w_R(1)$ , времето между двете клетки е по-малко от  $\rho_1 \delta$ .

**Доказателство.** Понеже  $g_v = 0$  близо до десния клон на (4) за  $s \in [0, 1]$ , от  $\frac{\partial G_R}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial h_R}{\partial s} = 0$  следва, че  $G_R(w, s)$  не зависи от  $s$ , т.е. скоростта, с която клетките се движат в активна фаза, не зависи от  $s$ . Затова дефинираме разстояние между двете клетки като времето на  $w$ -координатата на по-бавната клетка да достигне  $w$ -координатата на водещата клетка. В частност, времето между двете клетки в активна фаза остава инвариантно. Затова ще намерим времето между двете клетки веднага след скока напред.

За  $T_1 < \tau < T_2$  клетка 1 е в активна фаза, а клетка 2 още е в мълчалива фаза. От  $t_2 < t_1$  и  $s_i(\tau) = e^{-K(\tau - t_i)}$ ,  $i = 1, 2$ , следва  $s_1(\tau) > s_2(\tau)$  за  $t_2 < \tau \leq T_2$ . Така от Лема 1 и хипотезата на Случай 1 имаме  $w_1(T_1) < w_2(T_2) < w_1(T_2)$  върху десния клон на (4). Следователно времето от  $w_2(T_2)$  до  $w_1(T_2)$  е по-малко от времето от  $w_1(T_1)$  до  $w_1(T_2)$ , което е  $T_2 - T_1 \leq \rho_1 \delta$  от Твърдение 1.  $\square$

В Случай 2 следното твърдение е в сила.

**Твърдение 3.** Нека  $Ks^* < a_+ / |\lambda|$ . Тогава при  $\tau = T_0$ , когато клетка 2 е в точката за скок назад  $w_R(1)$ , времето между двете клетки е по-малко от  $\rho_2 \delta$  за някое  $0 < \rho_2 < 1$ .

За да завърши първата стъпка на доказателството на Теорема 1, се показва, че  $|x_1(T_0) - x_2(T_0)| < \max\{\delta, \delta_x\}$ . Накрая се показва, че множеството от траектории със синхронизирани начални условия  $w_2(0) = w_1(0) = w_R(1)$ ,  $x_1(0) = x_2(0)$ , параметризирано чрез  $x_1(0)$ , също се свива равномерно под действието на  $\Pi$ , до единствена орбита.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В тази статия разгледахме математически модел на два невронни осцилатора, свързани чрез бавни потискащи синапси. Ключовият елемент в модела бе наличието на променливите  $x_1, x_2$ , чрез които се осигурява допълнително време, след скока на единия осцилатор в активна фаза, преди другият да получи максимално потискане  $s = 1$ . Този времеви прозорец осигурява възможност на другия осцилатор също да скочи в активна фаза. Показахме, че при  $K < a_-$  и  $Ks^* < a_+ / |\lambda|$  системата има единствено синхронизирано устойчиво решение, което е неподвижна точка за изображението  $\Pi$ . Условието  $K < a_-$  в биофизичен смисъл означава, че синапсите се възстановяват със скорост, по-малка от скоростта на възстановяване на невроните от техния рефракторен период. Това условие гарантира компресия само в първата част на цикъла в Случай 1. За втората част на цикъла и за Случай 2 това условие е без значение. От друга страна условието  $Ks^* < a_+ / |\lambda|$  гарантира компресия само във втората част на цикъла в Случай 2. То също е без значение за Случай 1. Показано е в [3] чрез числени експерименти, че системата преминава от Случай 1 в Случай 2 и обратно при промяна на  $|\lambda|$ . Ако кривата на скоковете напред е по-вертикална (което съответства на малки стойности на  $|\lambda|$ ), системата е в Случай 1, а ако тя е по-хоризонтална (което значи големи  $|\lambda|$ ), системата е в Случай 2. По този начин ако е изпълнено само едното от условията на Теорема 1, чрез промяна единствено на  $|\lambda|$  синхронизираното решение може да преминава от устойчивост в неустойчивост и обратно.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2023 – ФПНО – 03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] O. Swanson, A. Maffei, From Hiring to Firing: Activation of Inhibitory Neurons and Their Recruitment in Behavior. *Frontiers in Molecular Neuroscience*, 12 (2019), 168.
- [2] G. Buzsáki, *Rhythms of the Brain*, Oxford University Press, 2006.
- [3] D. Terman, N. Kopell, A. Bose, Dynamics of two mutually coupled slow inhibitory neurons, *Physica D* 117 (1998), 241-275.
- [4] A. Wnuk, How Inhibitory Neurons Shape the Brain's Code, BrainFacts.org, 2021.
- [5] X. Wang, J. Rinzel, Alternating and synchronous rhythms in reciprocally inhibitory model neurons, *Neural Computation*, 4 (1992), 84-97.
- [6] D. Golomb, X.-J. Wang, J. Rinzel, Synchronization properties of spindle oscillations in a thalamic reticular nucleus model, *Journal of Neurophysiology*, 72 (1994).
- [7] Variational equations. *Encyclopedia of Mathematics*. URL: [http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Variational\\_equations&oldid=52039](http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Variational_equations&oldid=52039)

FRI-2.204-SSS-FM-06

---

## CHARACTERISTICS AND METHODOLOGY OF THE TAX SYSTEM IN BULGARIA<sup>6</sup>

---

**Mihaela Dimitrova**

Financial Mathematics Student,  
University of Ruse  
E-mail: mihaeladimitrova@icloud.com

**Assoc. Prof. Iliyana Raeva**

Department of Applied Mathematics and Statistics,  
University of Ruse  
E-mail: iraeva@uni-ruse.bg

**Abstract:** *The tax is an element of the budget revenue, which is a coercive, non-refundable and gratuitous (without direct counter-benefit) payment imposed unilaterally and generally by the state. Researches show that when a country's total tax burden as a share of GDP is lower, economic growth in that country is higher. The lower taxes, more money stays in the pocket of the taxpayer, that is, with the one who made the money and has the greatest incentives to manage it effectively. Conversely, with high taxes, most of the money is in the hands of bureaucrats, and when work with foreign money and have far lower incentives to spend it efficiently. The lower the taxes, the less distortion of incentives there is in decisions about labor, savings, investment and others. This report presents the structure of the tax system in Bulgaria, examines the tax systems of some European countries, a comparative analysis is made of the two main types of tax- progressive and proportional. For the performed calculations was used PYTHON.*

**Keywords:** *tax system, progressive tax, proportional tax, investments.*

### ВЪВЕДЕНИЕ

Данъците съпътстват човека и обществото от древни времена и са в основата на икономиката на държавата. Днес, това е една от най-обсъжданите теми на медиите, политическите дискусии, изборите, международните икономически отношения. Срещаме се с тях ежедневно - при покупка на стоки и услуги, при получаване на трудово възнаграждение, когато декларираме доходите си от изминалата година, при получаване на покана за плащане на данъци върху притежаваните от нас недвижими имоти и т.н. Според класическия икономист от XIX век Дейвид Рикардо „данъците са дял от продукта на земята и труда, предоставян в разпореждане на правителството“. Влияят съществено върху дейността и конкурентоспособността както на фирмите, така и на националните икономики.

Исторически погледнато, преди да станат задължение данъците са свободно, епизодично дарение в полза на владетел на общността (племето, града-държава и т.н.), извършвано с конкретна цел (благодарност за придобитата плячка във война, израз на подчинение и др.). Първоначално те дори не са основен източник на доход за вожда, а само допълнение към богатството му. Когато човечеството е живяло с царе, императори, султани, диктатори и др., които притежавали дори и човешкия живот, те често са превръщали данъците в жесток инструмент за експлоатация на безправните поданици. Днес, всички граждани и фирми са задължени да плащат данъци, а събирането им се извършва само по силата на закони, т.е. подчинява се на строги общоизвестни и общовалидни правила. В повечето литературни източници от по-късно време справедливостта на облагането (по принцип) дори вече не се поставя под съмнение. Тя се приема за даденост, а на преден план изпъкват по-детайлни въпроси, свързани със структурирането на отделни данъци или засягащи организацията на облагането.

---

<sup>6</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 27. 05. 2022 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ХАРАКТЕРИСТИКА И МЕТОДОЛОГИЯ НА ДАНЪЧНАТА СИСТЕМА В БЪЛГАРИЯ.

Българското законодателство не дава легално определение на данъците. У нас за такива се приемат (на практика) всички налози, наречени данък в съответния закон (напр. Закон за данъците върху доходите на физическите лица, Закон за данъка върху добавената стойност и т.н. ). В този смисъл българската практика не е изключение, защото и в законодателствата на други държави не се открива такова определение.

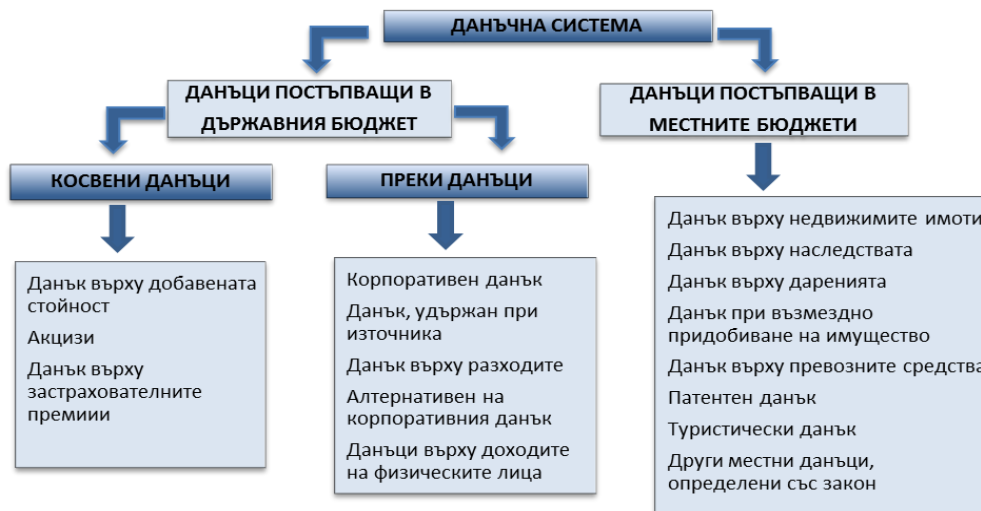
Прецизна дефиниция се дава в съвременното германско законодателство [1]. Според нея “данъци са всички парични плащания, не представляващи заплащане на определено благо, които са наложени с цел реализиране на приходи от публичната власт на всички онези, за които са изпълнени условията на закона.”

От това определение става ясно:

- плащанията в натура не се приемат за данък
- срещу платените данъци отделният данъкоплатец не може да очаква получаването на определено благо (напр. стока или услуга).
- данъци могат да бъдат налагани само от публичната власт
- данъци могат да се налагат само въз основа на закон, с цел реализиране на приходи от публичната власт.
- реализирането на приходи може да не е основна, а вторична цел на данъчното облагане

## ОСНОВНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ДАΝЪЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

2.1 Видове данъци и структура на данъчната система /съгл. сайта на министерството на финансите/



Фигура 1 Структурата на данъчната система в България

На Фигура 1 е представена структурата на данъчната система в България. Чрез нея е представено по какъв начин се разделя данъчната система: кои данъци постъпват в държавния бюджет и кои в местните бюджети.

## 2.2 Икономически характеристики на видовете данъчни системи

Повечето от държавите в Европейския съюз са възприели една от двете системи за облагане на доходите - “прогресивната система” или “пропорционалната система”.

При *прогресивната система* на данъчно облагане данъчната ставка се изменя по предварително избрана прогресия, а данъчното задължение нараства прогресивно с увеличаване на данъчната основа. Тази система на облагане води до промяна в



съотношението на доходите, установено преди данъчното облагане. Ето защо този вид данъчно облагане е по-изгодно за по-ниските доходи и по-неизгодно за по-високите доходи.

При *пропорционалната система на облагане* размерът на данъчната ставка остава един и същ, а данъчното задължение се изменя пропорционално с изменението на данъчната основа. Този вид данъчно облагане не води до промяна в съотношението на доходите преди и след облагането. За това тази система е приемлива форма за облагане както на високите, така и на ниските доходи и изглежда обективна и справедлива.

В утвърдилата се данъчна практика в повечето държави от Европейския съюз се приема, че прогресивната система на данъчно облагане е по-подходяща за облагане на доходите на физическите лица, докато пропорционалната система е подходяща за облагане на печалбите на фирмите. Прогресивната и пропорционалната система на данъчно облагане се прилагат различно в държавите членки на ЕС[2].

### 2.3 Данъчните системи в Европейските държави

Държава	Прогресивна система	Пропорционална система
<b>Скандинавски страни и Нидерландия</b>	<b>Доходите на физическите лица</b>	<b>На печалбите на фирмите</b>
България	Доходите на физическите лица	На печалбите на фирмите
Естония	Доходите на физическите лица и на печалбите на фирмите	
Русия	Доходите на физическите лица	На печалбите на фирмите
Словения	Доходите на физическите лица и на печалбите на фирмите	
Сърбия	Доходите на физическите лица и на печалбите на фирмите	

Таблица 2. Данъчните системи в Европейските държави

Само в 6 страни, включително и България, съществува пропорционална система на облагане. Всички останали 34 държави използват прогресивна скала или смесен тип на облагане. Следователно, всички страни, които прилагат плосък данък по света, се намират в Европа.

\* В 11 от 40-те европейски държави съществува необлагаем минимум, вкл. В такива с развити икономики, като Франция, Австрия, Норвегия и Испания.

\* Въпреки че България притежава един от най-ниските корпоративни данъци върху печалбата в Европа, това не се отразява благоприятно както на вътрешните инвестиции, така и на преките чуждестранни инвестиции. През последните 10 години те значително намаляват и се установяват на нива.

### 2.4 Плоския данък в България – добри и лоши страни

Облагането на доходите на физическите лица и печалбите на фирмите по системата на пропорционалното данъчно облагане се нарича още облагане *с плосък данък*. Системата на плоския данък означава въвеждането на единна данъчна ставка за облагане на доходите както на физическите лица, така и на фирмите, независимо от размера на дохода. Тоест с плоския данък на практика се облагат с една и съща данъчна ставка доходите на всички - на бедни, и на богати. Важно изискване е данъчната ставка да бъде само една и също така да бъде относително ниска по своя размер. Друго важно условие е данъчният праг да бъде еднакъв за всички данъкоплатци и достигането му да води до задължение за плащане на дължимия данък.

Плосък данък	Плюсове	Минуси
България	Бизнесът трупа повече пари	Въвеждане на данък общ доход, дори за суми под 200лв.
	Повече инвестиции и предприемаческа активност	Премахнат е годишен необлагаем минимум от 2400лв.
	Намаляване на дяла на сивата икономика	Големи фирми, дружества и компании отчитат високи печалби, надхвърлящи понякога 50-60%. Тези свръхпечалби се облагат с 10%.
	Създаване на допълнителни работни места	Търговците спекуланти също плащат само 10% данък върху безбожната си печалба, и то ако не са я укрили.

Таблица 3. Предимства и недостатъци на плоския данък

Тъй като системата на плоския данък зависи от данъчната основа и от данъчната ставка, има вероятност новата система да създаде предпоставки за заплащане на по-висок размер на данъка върху доходите от страна на лицата с ниски и средни доходи. Ето защо може да се подчертае, че въвеждането на системата на плоския данък зависи основно от размера на данъчната основа.

### СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА РЕАЛНИТЕ ДОХОДИ НА НАСЕЛЕНИЕТО В БЪЛГАРИЯ ПРЕЗ ПОСЛЕДНИТЕ 10 ГОДИНИ ПО ОТНОШЕНИЕ НА РАЗЛЪЧНИТЕ ВИДОВЕ ДАΝЪЧНИ СИСТЕМИ

На Таблица 4 са представени средните работни заплати за последните 10 години и са пресметнати стойностите на плоския и прогресивен данък за съответните работни заплати. Изчисленията са направени с помощта на Python.

```

7   if razmer_godishna_zaplata < 9168:
8       chista_zaplata_de = razmer_godishna_zaplata * 1
9       print(f"данък 0% за размер годишна заплата до 9168 евро - РЕЗУЛТАТ:{chista_zaplata_de:.2f}euro")
10  elif 9168 <= razmer_godishna_zaplata < 13966:
11      chista_zaplata_de = razmer_godishna_zaplata * 0.86
12      print(f"данък 14% за размер годишна заплата между (9168 - 13966) евро - РЕЗУЛТАТ:{chista_zaplata_de:.2f}euro")
13  elif 13966 <= chista_zaplata_de < 54949:
14      chista_zaplata_de = razmer_godishna_zaplata * 0.76
15      print(f"данък 24% за размер годишна заплата между (13966 - 54949) евро - РЕЗУЛТАТ:{chista_zaplata_de:.2f}euro")
16  elif 54949 <= chista_zaplata_de < 250532:
17      chista_zaplata_de = razmer_godishna_zaplata * 0.58
18      print(f"данък 42% за размер годишна заплата между (54949 - 250532) евро - РЕЗУЛТАТ:"
19            f"{chista_zaplata_de:.2f}euro")
20  else:
21      chista_zaplata_de = razmer_godishna_zaplata * 0.55
22      print(f"данък 45% за размер годишна заплата над 250532 евро - РЕЗУЛТАТ:{chista_zaplata_de:.2f}euro")
23  elif dyrjava == "BG":
24      chista_zaplata_bg = razmer_godishna_zaplata * 0.78
25      print(f"данък 22% - РЕЗУЛТАТ:{chista_zaplata_bg:.2f}лева")

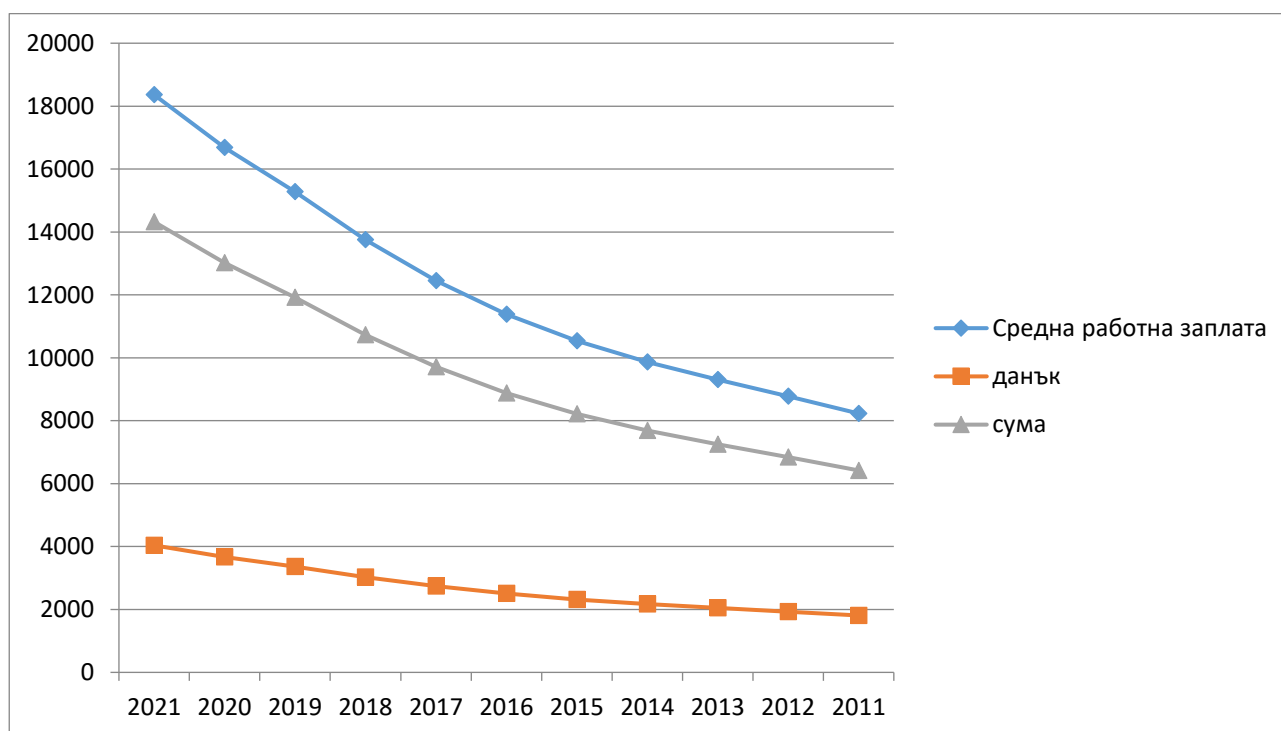
```

Таблица 4. Част от програмен код

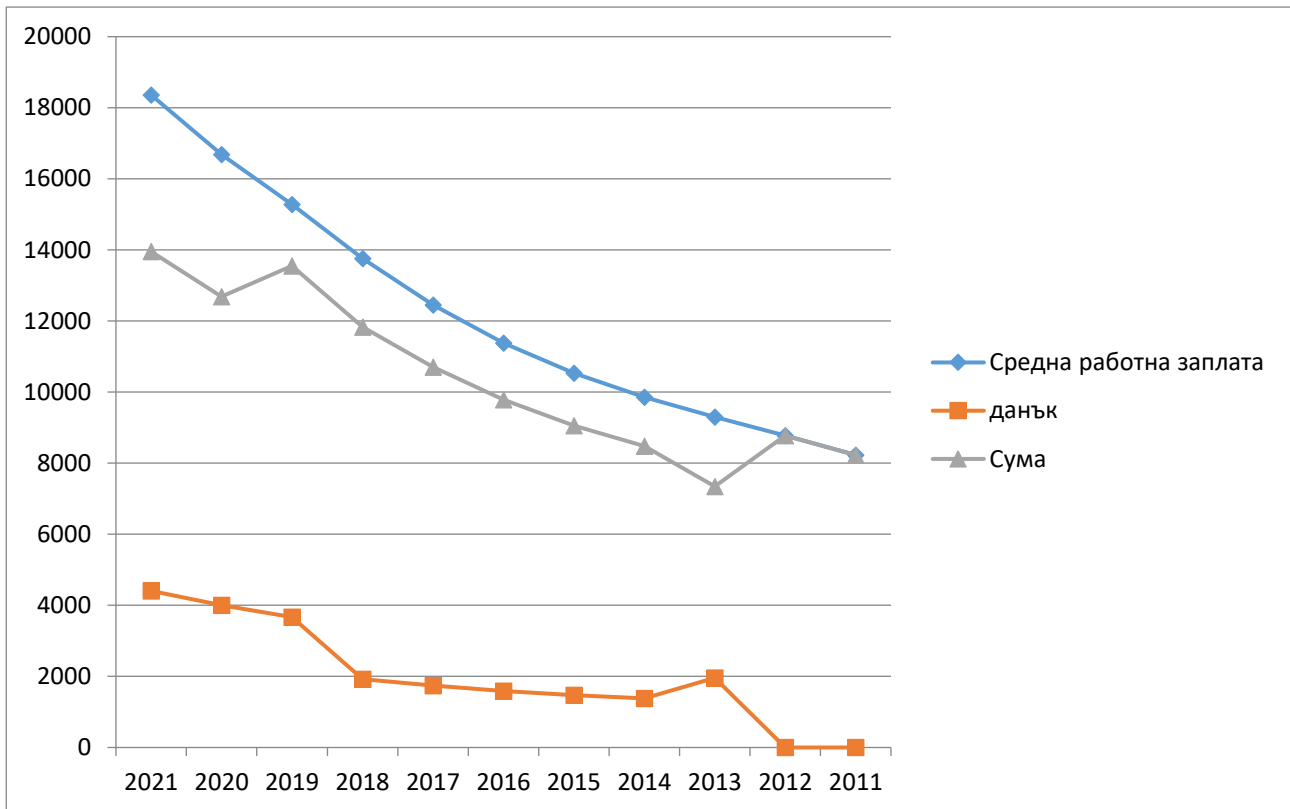
Представена е част от програмния код, с помощта на който е пресметната Таблица 4. За пресмятане на примерна годишна заплата, ако е въведен прогресивен данък са използвани проценти, които важат за Германия.

година	Средна работна заплата	Пропорционален данък		Прогресивен данък	
		сума	данък	Сума	данък
2021	18359	14320.02	4038.98	13952.84	4406.16
2020	16687	13015.02	3671.98	12682.12	4004.88
2019	15283	11920.74	3362.26	11615.08	3667.92
2018	13755	10728.90	3026.10	11829.30	1925.70
2017	12448	9709.44	2738.56	10705.28	1742.72
2016	11379	8875.62	2503.38	9785.94	1593.06
2015	10535	8217.30	2317.70	9060.10	1474.90
2014	9860	7690.80	2169.20	8479.6	1380.40
2013	9301	7254.78	2046.22	7345.76	1955.24
2012	8773	6842.94	1930.06	8773	0
2011	8230	6419.40	1810.06	8230	0

Таблица 4. Доходи на населението при двата вида данък



Графика 1. Пропорционален данък



Графика 2. Прогресивен данък

## АНАЛИЗ НА ПОЛУЧЕНИТЕ РЕЗУЛТАТИ

При прогресивния данък данъчната ставка расте заедно с данъчната основа. Такъв е данъкът върху доходите на физическите лица в България до 2008 год. След въвеждането на пропорционалния данък, няма информация за процента, който е използван последно при прогресивния данък. Както се вижда прогресивния данък расте заедно с увеличаването и на средната работна заплата. Хора със силно вариращо трудово възнаграждение е възможно през някои месеци да не получат доходи, а през други те да са високи. При пропорционален данък сборът от сумите, които се плащат месечно е равна на годишното задължение. При прогресивен данък първо се плащат месечните задължения, след края на годината се изчислява годишното задължение и накрая се установява разликата.

## ИЗВОДИ

В резултат на направените изследвания могат да се направят следните изводи за ефекта на въвеждане на плоския данък в България :

- ❖ Повишена е средната работна заплата;
- ❖ Въвеждането на системата на плоския данък зависи основно от размера на данъчната основа;
- ❖ Създадени са допълнителни работни места.

Плоският данък не допринася в борбата на държавата със сивата икономика. Това на практика елиминира и един от основните мотиви за въвеждането на пропорционална скала на облагане.

Плоският данък без необлагаем минимум облагодетелства високодоходните групи, като те разполагат с допълнителен ресурс от лични доходи.

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Desislava Nikolova, Petar Ganev (2016), *Flat tax in Bulgaria*
- [2] Lubka Cenova (2004), *Doctor of Tax Law*, Trud I право.
- [3] Peshev, P. (2015). Analysis of the Wealth Inequality Dynamics in Bulgaria: Different Approach. Issue 4.

**Интернет източници:**

- [4] Всичко, което трябва да знаете за данъците и обезщетенията в Германия (taxback.com).
- [5] Министерство на финансите :: Начало (minfin.bg).
- [6] ДАНЪК - Общ списък на понятия – УНИВЕРСИТЕТСКИ РЕЧНИК – ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ – Нов български университет (nbu.bg).
- [7] <https://weknowthelaw.eu/данъчно-облагане-в-германия/>
- [8] <https://germany.sophista.info/danachni-klasove-germania/>
- [9] [https://www.eu-gleichbehandlungsstelle.de/eugs-bg/граждани-на-европейския-съюз/живот-и-работа-в-германия/данъци?id=Was\\_für\\_Steuerklassen\\_gibt\\_es\\_in\\_Deutschland](https://www.eu-gleichbehandlungsstelle.de/eugs-bg/граждани-на-европейския-съюз/живот-и-работа-в-германия/данъци?id=Was_für_Steuerklassen_gibt_es_in_Deutschland)
- [10] <http://library.fes.de/pdf-files/bueros/sofia/15330.pdf>.

## ANALYSIS OF VARIANCE (ANOVA)<sup>7</sup>

### Preslava Dimitrova

Financial Mathematics Student,  
University of Ruse  
E-mail: preslava252@gmail.com

### Prof. Velizar Pavlov, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,  
University of Ruse  
E-mail: vpavlov@uni-ruse.bg

***Abstract:** The purpose of analysis of variance is to examine the presence or absence of a significant influence of any qualitative or quantitative factor on changes in the studied characteristics. Analysis of variance is a method of great complexity in many different variations, each of which is applied in a specific experimental context.*

***Keywords:** Analysis of variance, Fisher analysis of variance, One-Way ANOVA, Two-Way ANOVA.*

### ВЪВЕДЕНИЕ

Целта на дисперсионния анализ е да се проучи наличието или отсъствието на значително влияние на какъвто и да е качествен или количествен фактор върху промените в изследваните характеристики. Дисперсионният анализ е метод с голяма сложност в много различни вариации, всяка от които се прилага в конкретен експериментален контекст. За целта факторът, имащ или не оказващ значително влияние, се разделя на градационни класове (с други думи, групи) и се установява дали влиянието на фактора е едно и също чрез изследване на значимостта между средните в наборите от данни, съответстващи на градациите на фактора. Минималният брой градационни класове (групи) е два. Класовете за оценяване могат да бъдат качествени или количествени.

Методите за t- и z-тест, разработени през 20-ти век, се използват за статистически анализ до 1918 г., когато Роналд Фишър създава метода за анализ на дисперсията. [1, 2] ANOVA се нарича още анализ на вариацията на Фишер и е разширение на t- и z-тестовете. Терминът става добре известен през 1925 г., след като се появява в книгата на Фишър „Статистически методи за научни работници“ [3].

Дисперсионният анализ е почти универсален метод за тестване на различията в групите, тъй като се използва както в техническите науки и маркетинговите науки, така и в изследванията на човешкото поведение. Анализът изследва съотношението на две вариации. Дисперсията е мярка за разсейването на данните около средната стойност. Първо - дисперсията, обяснена с влиянието на фактора, която характеризира разсейването на стойностите между градациите на фактора (групите) около средната стойност на всички данни. Второ - необяснимата дисперсия, която характеризира разпръскването на данните в градациите (групи) около средните стойности на самите групи. Първата дисперсия може да се нарече междугрупова, а втората – вътрешногрупова. Съотношението на тези вариации се нарича действително съотношение на Фишер и се сравнява с критичната стойност на съотношението на Фишер.

Ако действителното съотношение на Фишер е по-голямо от критичното, тогава средните класове на градация се различават един от друг и изследваният фактор значително влияе върху промяната в данните. Ако е по-малко, тогава средните градационни класове не се различават един от друг и факторът няма значителен ефект.

<sup>7</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 27. 05. 2022 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ДИСПЕРСИОНЕН АНАЛИЗ (ANOVA).

В настоящата работа е разгледан дисперсионният анализ, като е представен пример от практиката.

При дисперсионният анализ се определя специфичното тегло на общото въздействие на един или повече фактори. Значимостта на влиянието на фактора се определя чрез тестване на хипотези:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$ , където  $a$  - брой градационни класове - всички градационни класове имат една и съща средна стойност

$H_1$ : не всички  $\mu_i$  са равни - не всички класове на градация имат една и съща средна стойност

Ако влиянието на даден фактор не е значително, тогава разликата между класовете на градация на този фактор също е незначителна и нулевата хипотеза  $H_0$  не се отхвърля по време на анализа на дисперсията. Ако влиянието на фактора е значително, тогава нулевата хипотеза  $H_0$  се отхвърля: не всички класове на градация имат една и съща средна стойност, тоест сред възможните разлики между класовете на градация един или повече са значими.

В зависимост от броя на оценяваните фактори се разграничават еднофакторен, двуфакторен и многофакторен дисперсионен анализ.

### Еднофакторен дисперсионен анализ: същност на метода, формули, примери

Еднофакторният дисперсионен анализ се основава на факта, че сумата от квадратните отклонения на статистическия комплекс може да бъде разделена на компоненти:

$$SS = SSa + SSe,$$

Където:

$SS$  – обща сума на квадратите отклонения

$SSa$  – обясним сбор от квадрати отклонения или сума от квадрати отклонения

$SSe$  – необясним сбор от квадрати отклонения или сбор от квадрати отклонения на грешката.

Ако обозначим с  $n_i$  броя на опциите във всеки клас на градация (група) и  $a$  е общият брой градации на фактора (групи), тогава:

$$\sum_{i=1}^a n_i = n$$

общия брой на наблюденията и можете да получите следните формули

$$SS = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X})^2$$

общ брой квадратни отклонения:

$$SS_a = \sum_{i=1}^a n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

сумата от квадратните отклонения, обяснени с влиянието на фактор а:

$$SS_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

сума от квадратни отклонения на грешката:

където:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad \text{обща средна стойност на наблюденията}$$

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad \text{средната стойност на наблюденията във всяка градация на фактора (група).}$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = \sum_{i=1}^a (n_i - 1) s_i^2 =$$

$$= (n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2 + \dots + (n_a - 1) s_a^2,$$

където  $s_i^2$  е дисперсия на градационния фактор (група).

За да се извърши еднофакторен дисперсионен анализ върху данните от статистически комплекс, трябва да намерите действителното съотношение на Фишър - съотношението на дисперсията, обяснено с влиянието на фактора (междугрупова) и необяснимата дисперсия (вътрешногрупова):

$$F = \frac{MS_a}{MS_e}$$

и се сравнява с критичната стойност на Фишер  $F_{\alpha; v_a; v_e}$

Отклоненията се изчисляват, както следва:

$$MS_a = \frac{SS_a}{a - 1} \text{ за междугрупова дисперсия}$$

$$MS_e = \frac{SS_e}{n - a} \text{ за вътрешногрупова дисперсия}$$

при което,

$v_a = a - 1$  - брой степени на свобода на междугрупова дисперсия

$v_e = n - a$  - брой степени на свобода на вътрешногрупова дисперсия

$v = n - 1$  - обща сума на степени на свобода

Ако действителната стойност на коефициента на Фишър е по-голяма от критичната стойност  $F < F_{\alpha; v_a; v_e}$ , тогава нулевата хипотеза се отхвърля с ниво на значимост  $\alpha$ . Това означава, че факторът влияе значително върху промяната в данните и данните са зависими от фактора с вероятност  $P = 1 - \alpha$ .

### Пример:

Необходимо е да се установи дали видът на използваните суровини влияе върху печалбата на предприятието. В шест градационни класа (групи) на фактора (тип 1, тип 2 и др.) са събрани данни за печалбата от производството на 1000 единици продукти за 4 години.

Таблица 1

Вид на суровината	2018	2019	2020	2021	Средна стойност $\bar{x}_i$	Дисперсия $s_i^2$
1-й	7,21	7,55	7,29	7,6	7,413	0,0367
2-й	7,89	8,27	7,39	8,18	7,933	0,1571
3-й	7,25	7,01	7,37	7,53	7,290	0,0480
4-й	7,75	7,41	7,27	7,42	7,463	0,0414
5-й	7,7	8,28	8,55	8,6	8,283	0,1706
6-й	7,56	8,05	8,07	7,84	7,880	0,0563

Броят на класовете (групите) на факторната градация е  $a = 6$  и във всеки клас (група)  $n_i = 4$  наблюдения. Общият брой на наблюденията  $n = 24$ .

Изчисляване на степените на свобода:

$$v_a = a - 1 = 6 - 1 = 5,$$

$$v_e = n - a = 24 - 6 = 18,$$



$$v = n - 1 = 24 - 1 = 23.$$

Изчисляване на сумите на квадратните отклонения:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n} = \frac{185,04}{24} = 7,71,$$

$$\begin{aligned} SS_a &= \sum_{i=1}^a n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 = \\ &= 4 \bullet (7,413 - 7,71)^2 + 4 \bullet (7,933 - 7,71)^2 + \dots + \\ &+ 4 \bullet (7,880 - 7,71)^2 = 2,9293, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS_e &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = \sum_{i=1}^a (n_i - 1) s_i^2 = \\ &= (n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2 + \dots + (n_6 - 1) s_6^2 = \\ &= 3 \bullet 0,0367 + 3 \bullet 0,1571 + \dots + 3 \bullet 0,0563 = \\ &= 1,5303, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X})^2 = \\ &= (7,21 - 7,71)^2 + (7,89 - 7,71)^2 + \dots + \\ &+ (7,84 - 7,71)^2 = 4,4596, \end{aligned}$$

Изчисляване на дисперсията:

$$MS_a = \frac{SS_a}{a - 1} = \frac{2,9293}{5} = 0,58586,$$

$$MS_e = \frac{SS_e}{n - a} = \frac{1,5303}{18} = 0,085017$$

Изчисляване на фактическия коефициент на Фишер:

$$F = \frac{MS_a}{MS_e} = \frac{0,58586}{0,085017} = 6,89$$

Критично значение на съотношението на Фишер:

$$F_{0,05;5;18} = F.ОБР(0,05; 5; 18) = 2,77$$

Тъй като действителното съотношение на Фишър е по-голямо от критичното:

$$F = 6,89 > F_{0,05;5;18} = 2,77$$

с ниво на значимост  $\alpha = 0,05$ , заключаваме, че печалбата на предприятието, в зависимост от вида на използваните в производството суровини, се различава значително.

Или, отхвърляме основната хипотеза ( $H_0$ ) за равенството на средните във всички класове на факторна градация (групи).

### Двухфакторен дисперсионен анализ: същност на метода, формули, пример

Двухфакторният дисперсионен анализ се използва за проверка на възможната зависимост на два фактора - А и В. Тогава а е броят на градациите на фактор А и b е броят на

градациите на фактор В. В статистическия комплекс, сумата от квадратните остатъци се разделя на три компонента:

$$SS = SSa + SSb + SSe,$$

където:

$$SS = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (X_{ij} - \bar{X})^2$$

обща сума на квадратите отклонения

$$SS_a = b \sum_{i=1}^a (\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

сумата от квадратните отклонения, обяснени с влиянието на фактор

A

$$SS_b = a \sum_{j=1}^b (\bar{X}_j - \bar{X})^2$$

сума от квадратните отклонения, обяснени с фактор B

$$SS_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (X_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2$$

сума от квадрати отклонения на грешката

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b X_{ij}$$

обща средна стойност на наблюденията

$$\bar{X}_i = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b X_{ij}$$

средна стойност на наблюденията във всяка градация на фактор A

$$\bar{X}_j = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a X_{ij}$$

средният брой наблюдения във всяка градация на фактор B.

Отклоненията се изчисляват, както следва:

$$MS_a = \frac{SS_a}{a-1}$$

дисперсия, обяснена с фактор A

$$MS_b = \frac{SS_b}{b-1}$$

дисперсия, обяснена влиянием фактора B,

$$MS_e = \frac{SS_e}{(a-1)(b-1)}$$

дисперсия на грешката,

където,

$va = a - 1$  - броят на степените на свобода на дисперсията, обяснен с влиянието на фактор A

$vb = b - 1$  - броят на степените на свобода на дисперсията, обяснен с влиянието на фактор B

$ve = (a - 1)(b - 1)$  - дисперсия на грешката

$v = ab - 1$  - общия брой степени на свобода.

Ако факторите са независими един от друг, тогава се излагат две нулеви хипотези и съответните алтернативни хипотези, за да се определи значимостта на факторите:

$H_0: \mu_{1A} = \mu_{2A} = \dots = \mu_{aA},$

$H_1: \text{не всички } \mu_{iA} \text{ са равни}$

$H_0: \mu_{1B} = \mu_{2B} = \dots = \mu_{aB},$

$H_1: \text{не всички } \mu_{iB} \text{ са равни.}$

За да определите ефекта на фактор А, се нуждаете от действителното съотношение на

$$F_a = \frac{MS_a}{MS_e}$$

Фишер се сравни с критичното съотношение на Фишер

$$F_{\alpha, a, b, c}$$

За да определите ефекта на фактор В, се нуждаете от действителното съотношение на

$$F_b = \frac{MS_b}{MS_e}$$

Фишер

се сравни с критичното съотношение на Фишер

$$F_{\alpha, a, b, c}$$

Ако действителното съотношение на Фишер е по-голямо от критичното съотношение на Фишер, тогава нулевата хипотеза трябва да бъде отхвърлена с ниво на значимост  $\alpha$ . Това означава, че факторът оказва значително влияние върху данните: данните зависят от фактора с вероятност  $P = 1 - \alpha$ .

Ако действителното съотношение на Фишер е по-малко от критичното съотношение на Фишер, тогава нулевата хипотеза трябва да се приеме с ниво на значимост  $\alpha$ . Това означава, че факторът не влияе съществено върху данните с вероятност  $P = 1 - \alpha$ .

### Пример:

Дава се информация за средния разход на гориво на 100 километра в литри, в зависимост от обема на двигателя и вида на горивото.

Таблица 2

	Оловен бензин	Безоловен бензин	Дизел	Средна стойност $\bar{X}_i$
1001-1500 см <sup>3</sup>	9,3	8,9	6,5	8,23
1501-2000 см <sup>3</sup>	9,4	9,1	7,1	8,53
Над 2000 см <sup>3</sup>	12,6	9,8	8,0	10,13
Средна стойност $\bar{X}_j$	10,42	9,27	7,2	

Необходимо е да се провери дали разходът на гориво зависи от обема на двигателя и вида на горивото.

**Решение.** За фактор А, броят на градационните класове  $a = 3$ , за фактор В, броят на градационните класове  $b = 3$ .

Изчисляват се сумите на квадратните отклонения:

$$SS = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (X_{ij} - \bar{X})^2 = 24,72$$

$$SS_a = b \sum_{i=1}^a (\bar{X}_i - \bar{X})^2 = 6,26$$

$$SS_b = a \sum_{j=1}^b (\bar{X}_j - \bar{X})^2 = 16,09$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (X_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2 = 2,37$$

Изчисляват се дисперсиите:

$$MS_a = \frac{SS_a}{a-1} = \frac{6,26}{3-1} = 3,13$$

$$MS_b = \frac{SS_b}{b-1} = \frac{16,09}{3-1} = 8,04$$

$$MS_e = \frac{SS_e}{(a-1)(b-1)} = \frac{2,37}{(3-1)(3-1)} = 0,59$$

$$F_a = \frac{MS_a}{MS_e} = \frac{3,13}{0,59} = 5,28$$

Действителното съотношение на Фишър за фактор А критичната стойност на коефициента на Фишер:  $F_{\alpha;v_a,v_e} = F_{0,05;2;4} = 6,94$ . Тъй като действителното съотношение на Фишер е по-малко от критичното, с вероятност от 95% приемаме хипотезата, че обемът на двигателя не влияе на разхода на гориво. Въпреки това, ако изберем ниво на значимост от  $\alpha = 0,1$ , тогава действителната стойност на съотношението на Фишер  $F_{0,1;2;4} = 4,32$  и тогава с вероятност от 95% можем да приемем, че размерът на двигателя влияе на разхода на гориво.

$$F_b = \frac{MS_b}{MS_e} = \frac{8,04}{0,59} = 13,56$$

Действителното съотношение на Фишър за фактор В критичната стойност на коефициента на Фишер:  $F_{\alpha;v_b,v_e} = F_{0,05;2;4} = 6,94$ . Тъй като действителното съотношение на Фишер е по-голямо от критичната стойност на коефициента на Фишер, ние приемаме с 95% вероятност, че видът на горивото влияе върху неговата консумация.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В резултат на направените изследвания могат да се направят следните изводи:

1. Дисперсионният анализ или ANOVA е статистически метод, който разделя наблюдаваните данни на различни компоненти, които да се използват за допълнителни тестове.
2. Еднофакторният ANOVA се използва за три или повече групи данни, за да се получи информация за връзката между зависимите и независимите променливи.
3. Ако не съществува истинска дисперсия между групите, F-коефициентът на ANOVA трябва да е близо до 1.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ronald Fisher. "The Correlation between Relatives on the Supposition of Mendelian Inheritance." Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 52(2), 1918. Pages 399-433.
- [2] Encyclopaedia Britannica. "Sir Ronald Aylmer Fisher." Accessed Aug. 10, 2020.
- [3] Ronald Fisher. "Statistical Methods for Research Workers." Springer-Verlag New York, 1992.

MODEL FOR PRICING OF CAPITAL ASSETS<sup>8</sup>**Marinela Dimitrova**Financial Mathematics Student,  
University of Ruse  
E-mail: marinela.dimitrov@gmail.com**Prof. Dr. Iliyana Raeva,**Department of Applied Mathematics and Statistics,  
University of Ruse  
E-mail: iraeva@uni-ruse.bg

**Abstract:** The Capital Asset Valuation Model (MOCA) is used to find the expected rate of return on an asset. The model describes the relationship between expected return and systemic risk. Systemic risk, also known as market risk, is formed under the influence of external factors that do not depend on the immediate participants in the transaction and cannot be reduced by diversification.

**Keywords:** The Capital Asset Valuation Model, Beta coefficient, Market risk

**ВЪВЕДЕНИЕ**

Тази статия представя аналитичното значение и смисъл на бета коефициента в уравнението за МОКА. Моделът за оценка на капиталовите активи (МОКА) се използва за намиране на очакваната норма на възвръщаемост на определен актив. Моделът описва отношението между очакваната доходност и системния риск. Системният риск, известен още като пазарен, се формира под въздействието на външни фактори, които не зависят от непосредствените участници в сделката и не може да бъде редуциран чрез диверсификация. Неговото влияние се разпростира върху всички инвеститори.

Очакваната норма на възвръщаемост се пресмята чрез следната формула:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f), \quad (1)$$

където:

$E(R_i)$  – очаквана норма на възвръщаемост на  $i$ -тия актив

$R_f$  – норма на възвръщаемост на безрисковия актив

$E(R_m)$  – очаквана норма на възвръщаемост на пазара

$\beta_i$  – показател за систематичен риск

**1. Приложение на модела**

Като пример за приложение на модела да вземем международна верига от кафета „Старбъкс Корпорейшън“ (*Starbucks Corporation*). Нейната централа е в Сиатъл, щата Вашингтон, САЩ, където е открито първото им кафене. Това е най-голямата компания в кафеения бизнес в света. „Старбъкс“ предлага топли и студени напитки, кафе на зърна, инстантно кафе, чай, сладкиши и закуски. Повечето кафенета от веригата предлагат и пакетирани хранителни стоки, студени и топли сандвичи. Също така „Старбъкс“ има собствена марка сладолед. От своето основание през 1971 година компанията „Старбъкс“ започва да се разширява с бързи темпове. Откриват се средно по 2 нови кафенета всеки ден. В началото на 1980 г. компанията „Старбъкс“ е била рентабилна, но в края на 1980 година губи пари поради експанзията в Средния запад и Британска Колумбия. [1], [2]. През 1990 г. компанията има малка печалба. В периода на разширението на дейността си в Калифорния през 1991 година компанията „Старбъкс“ става модерна. Първото заведение на компанията

<sup>8</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 27.05.2022 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: МОДЕЛ ЗА ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИ АКТИВИ.

„Старбъкс“ извън САЩ или Канада е открито в средата на 1990-те години. През 2009 г. веригата планира да отвори 900 нови обекта извън САЩ, но обявява, че смята да затвори 300 магазина в САЩ от 2008 г. насам. Притежава 16 635 кафенета в 49 държави. Най-много кафета има в САЩ (общо над 11 000 бр.), България, Канада, Япония и др. Първото заведение от веригата отваря врати през 30 март 1971 година в Сиатъл. Собственици на обекта са 3 приятели: учителят по английски Джери Болдуин, учителят по история Зев Сейгъл и писателят Гордън Болкер. Те били вдъхновени от предприемача Алфред Пийт да се захванат с този бизнес. Първоначално компанията е носила името „Пекуод“, но това име е отхвърлено и компанията е наречена „Старбъкс“ [3].

### ТАБЛИЦА ЗА СТОЙНОСТИТЕ НА ИНДЕКСА S&P500 ЗА 5 ГОДИНИ В МЕСЕЧНИ ДАННИ

Разглеждаме симулирана таблица на стойностите на индекса S&P500 за 5 години в месечни данни от 1 ви февруари 2017г. до 1 ви януари 2022 г. и са сравнени със стойностите на акциите на Starbucks. Пресметната е нормата на възвръщаемост в проценти (Percentage returns). Тези данни са посочени в Таблица 1.

Таблица 1. Таблица на стойностите на индекса S&P500 за 5 години в месечни данни

Date	Starbucks Price	Starbucks Percentage returns	Date	S&P Price	S&P 500 Percentage returns
Feb 01, 2017	51,63 лв.	3,1377%	Feb 01, 2017	2 363,64 лв.	-0,0389%
Mar 01, 2017	53,25 лв.	2,8545%	Mar 01, 2017	2 362,72 лв.	0,9091%
Mar 31, 2017	54,77 лв.	5,9156%	Mar 31, 2017	2 384,20 лв.	1,1576%
Apr 30, 2017	58,01 лв.	-7,9641%	Apr 30, 2017	2 411,80 лв.	0,4814%
May 31, 2017	53,39 лв.	-7,4171%	May 31, 2017	2 423,41 лв.	1,9349%
Jun 30, 2017	49,43 лв.	1,6185%	Jun 30, 2017	2 470,30 лв.	0,0546%
Jul 31, 2017	50,23 лв.	-1,6524%	Jul 31, 2017	2 471,65 лв.	1,9303%
Aug 31, 2017	49,40 лв.	2,1053%	Aug 31, 2017	2 519,36 лв.	2,2188%
Sep 30, 2017	50,44 лв.	5,4322%	Sep 30, 2017	2 575,26 лв.	2,8083%
Oct 31, 2017	53,18 лв.	-0,1504%	Oct 31, 2017	2 647,58 лв.	0,9832%
Dec 01, 2017	53,10 лв.	-1,0734%	Dec 01, 2017	2 673,61 лв.	5,6179%
Jan 01, 2018	52,53 лв.	0,5140%	Jan 01, 2018	2 823,81 лв.	-3,8947%
Feb 01, 2018	52,80 лв.	1,9318%	Feb 01, 2018	2 713,83 лв.	-2,6885%
Mar 01, 2018	53,82 лв.	-0,5574%	Mar 01, 2018	2 640,87 лв.	0,2719%
Mar 31, 2018	53,52 лв.	-1,5695%	Mar 31, 2018	2 648,05 лв.	2,1608%
Apr 30, 2018	52,68 лв.	-13,3447%	Apr 30, 2018	2 705,27 лв.	0,4842%
May 31, 2018	45,65 лв.	7,2508%	May 31, 2018	2 718,37 лв.	3,6022%
Jun 30, 2018	48,96 лв.	2,0221%	Jun 30, 2018	2 816,29 лв.	3,0263%
Jul 31, 2018	49,95 лв.	7,0871%	Jul 31, 2018	2 901,52 лв.	0,4294%
Aug 31, 2018	53,49 лв.	2,5051%	Aug 31, 2018	2 913,98 лв.	-6,9403%
Sep 30, 2018	54,83 лв.	14,5176%	Sep 30, 2018	2 711,74 лв.	1,7859%
Oct 31, 2018	62,79 лв.	-2,9623%	Oct 31, 2018	2 760,17 лв.	-9,1777%
Dec 01, 2018	60,93 лв.	5,8099%	Dec 01, 2018	2 506,85 лв.	7,8684%
Jan 01, 2019	64,47 лв.	3,1022%	Jan 01, 2019	2 704,10 лв.	2,9729%

**PROCEEDINGS OF UNIVERSITY OF RUSE - 2023, volume 62, book 6.5**

Feb 01, 2019	66,47 лв.	6,3638%	Feb 01, 2019	2 784,49 лв.	1,7924%
Mar 01, 2019	70,70 лв.	4,4979%	Mar 01, 2019	2 834,40 лв.	3,9313%
Mar 31, 2019	73,88 лв.	-2,0845%	Mar 31, 2019	2 945,83 лв.	-6,5778%
Apr 30, 2019	72,34 лв.	10,7133%	Apr 30, 2019	2 752,06 лв.	6,8930%
May 31, 2019	80,09 лв.	12,9604%	May 31, 2019	2 941,76 лв.	1,3128%
Jun 30, 2019	90,47 лв.	1,9786%	Jun 30, 2019	2 980,38 лв.	-1,8092%
Jul 31, 2019	92,26 лв.	-8,0858%	Jul 31, 2019	2 926,46 лв.	1,7181%
Aug 31, 2019	84,80 лв.	-4,3632%	Aug 31, 2019	2 976,74 лв.	2,0432%
Sep 30, 2019	81,10 лв.	1,0234%	Sep 30, 2019	3 037,56 лв.	3,4047%
Oct 31, 2019	81,93 лв.	3,4298%	Oct 31, 2019	3 140,98 лв.	2,8590%
Dec 01, 2019	84,74 лв.	-3,5166%	Dec 01, 2019	3 230,78 лв.	-0,1628%
Jan 01, 2020	81,76 лв.	-7,5342%	Jan 01, 2020	3 225,52 лв.	-8,4110%
Feb 01, 2020	75,60 лв.	-15,7937%	Feb 01, 2020	2 954,22 лв.	-12,5119%
Mar 01, 2020	63,66 лв.	16,7138%	Mar 01, 2020	2 584,59 лв.	12,6844%
Mar 31, 2020	74,30 лв.	1,6420%	Mar 31, 2020	2 912,43 лв.	4,5282%
Apr 30, 2020	75,52 лв.	-5,1112%	Apr 30, 2020	3 044,31 лв.	1,8388%
May 31, 2020	71,66 лв.	4,0050%	May 31, 2020	3 100,29 лв.	5,5101%
Jun 30, 2020	74,53 лв.	10,3717%	Jun 30, 2020	3 271,12 лв.	7,0065%
Jul 31, 2020	82,26 лв.	2,2733%	Jul 31, 2020	3 500,31 лв.	-3,9228%
Aug 31, 2020	84,13 лв.	1,2005%	Aug 31, 2020	3 363,00 лв.	-2,7666%
Sep 30, 2020	85,14 лв.	12,7202%	Sep 30, 2020	3 269,96 лв.	10,7546%
Oct 31, 2020	95,97 лв.	9,6593%	Oct 31, 2020	3 621,63 лв.	3,7121%
Dec 01, 2020	105,24 лв.	-9,5021%	Dec 01, 2020	3 756,07 лв.	-1,1137%
Jan 01, 2021	95,24 лв.	11,5813%	Jan 01, 2021	3 714,24 лв.	2,6091%
Feb 01, 2021	106,27 лв.	1,5809%	Feb 01, 2021	3 811,15 лв.	4,2439%
Mar 01, 2021	107,95 лв.	4,7800%	Mar 01, 2021	3 972,89 лв.	5,2425%
Mar 31, 2021	113,11 лв.	-0,5305%	Mar 31, 2021	4 181,17 лв.	0,5487%
Apr 30, 2021	112,51 лв.	-1,4310%	Apr 30, 2021	4 204,11 лв.	2,2214%
May 31, 2021	110,90 лв.	8,6023%	May 31, 2021	4 297,50 лв.	2,2748%
Jun 30, 2021	120,44 лв.	-3,2464%	Jun 30, 2021	4 395,26 лв.	2,8990%
Jul 31, 2021	116,53 лв.	-5,7410%	Jul 31, 2021	4 522,68 лв.	-4,7569%
Aug 31, 2021	109,84 лв.	-3,8511%	Aug 31, 2021	4 307,54 лв.	6,9144%
Sep 30, 2021	105,61 лв.	3,3709%	Sep 30, 2021	4 605,38 лв.	-0,8334%
Oct 31, 2021	109,17 лв.	7,1448%	Oct 31, 2021	4 567,00 лв.	4,3613%
Dec 01, 2021	116,97 лв.	-15,9443%	Dec 01, 2021	4 766,18 лв.	-5,2585%
Jan 01, 2022	98,32 лв.		Jan 01, 2022	4 515,55 лв.	



## Графики на получените резултати



Графика 1. Движението на цените в последните 5 години



Графика 2. Процентна норма на възвръщаемост за всеки месец

### Бета коефициент ( $\beta$ ) – измерител на пазарния риск

Бета коефициент на акции ( $\beta$ ) представлява мярка на пазарния риск на акцията и е показател за това, в каква степен доходът ѝ се изменя едновременно с пазарните доходи. Фирмата може да въздейства на своя пазарен риск чрез изменение на структурата на финансовите си активи (чрез бета) или чрез използване на кредитно финансиране. Бета на предприятията се променя под влиянието на усилена конкуренция в отрасъла, остаряване на технологиите, забавяне на иновациите и т.н. Тези обстоятелства могат да доведат до намаляване на нормата на печалба и оттук да се повлияе върху цената на акциите на фирмата. Коефициентът бета е критерий, който количествено характеризира промените на дадена акция спрямо промените на средните (пазарни) акции.

Пазарният риск на акциите се определя с бета коефициент на портфейла. В зависимост от равнището му се прави следната класификация[4]:

Акция с висок бета коефициент – тя е по-малко устойчива отколкото средната акция, като устойчивостта е по отношение на нормата на възвръщаемост и цената на акцията.

Акция с нисък бета коефициент – тези акции по норма на възвръщаемост и цена са по-устойчиви, отколкото средно за акциите (пазарния портфейл).

Акция със среден бета коефициент – тя проявява тенденция към повишаване или намаляване едновременно с общата динамика на пазара.

Пазарният риск за акции, определен с бета коефициент, който показва относителната неустойчивост може да бъде характеризирани за конкретни компании така:

$\beta = 1,0$  за дадена акция означава, че нейната възвръщаемост е равна на тази на пазарния портфейл, т.е. акциите на дадена компания имат средна степен на риска както на целия пазар.

$\beta > 1$  например  $\beta = 2$  – акцията има риск, който превишава два пъти средното равнище. Цената на такава акция средно ще нараства (намалжава) с 2% при съответна промяна на пазарната цена с 1%. Такава ценна книга е високорискова. Тя се нарича “агресивна инвестиция”.

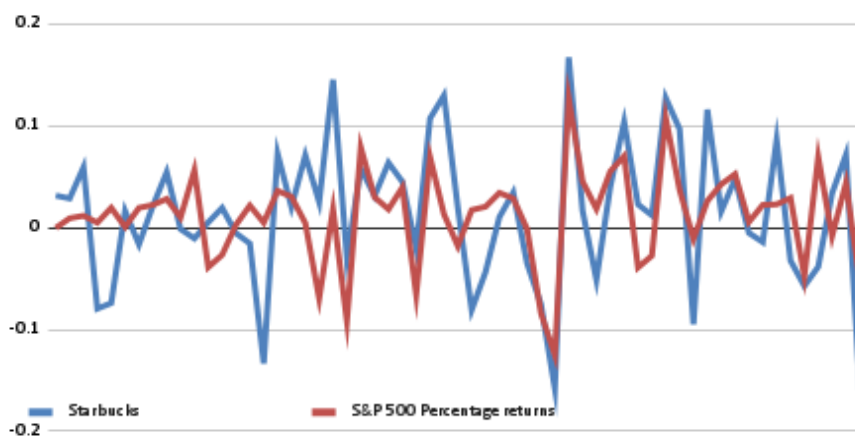
$\beta < 1$ , например  $\beta = 0,5$  – такава акция има по-малка чувствителност към пазарните промени. Тя е два пъти по-малко рискова отколкото средната. При  $\beta = 0,5$  цената на такава акция нараства (намалжава) с 0,5% при съответна промяна на пазарната цена с 1%. Такива акции се наричат “защитни”.

Бета измерва не само пазарния риск, но и чувствителността на доходите на ценните книжа към пазарните промени. С бета се установяват очакваните промени в цените на акциите за всяка промяна на пазарната им цена с 1%. Бета коефициентът на акцията определя степента на нейното влияние върху равнището на диверсифицирания портфейл. Този коефициент е оптимална мярка за риск на всяка акция.

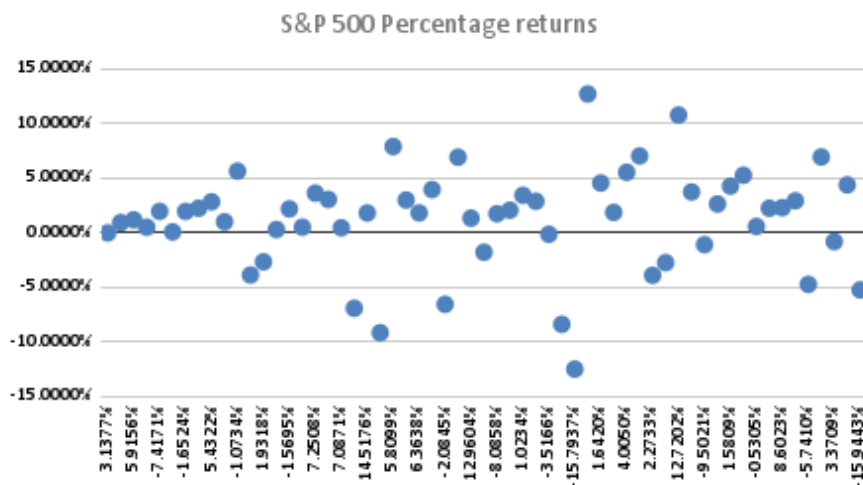
Бета коефициентът се пресмята, чрез следната формула:

$$\text{Beta} = \text{COVARIANCE.P}(r_m; r_{sp}) / \text{VAR.P}(r_m) \quad (2)$$

Използвайки (2), получаваме  $\beta = 0,37$ . Тъй като коефициентът е по-малък от 1, такава акция има по-малка чувствителност към пазарните промени. Тя е два пъти по-малко рискова отколкото средната.



Нека да разгледаме отношението между акциите на Starbucks и индексът S&P 500:



Използвайки линейна регресия, намираме правата:

$$y = 0,3728x + 0.0071$$

Наклонът на тази права е равен на бета коефициентът. Нека да пресметнем месечната норма на възвращаемост на индекса S&P 500.

Използваме:

$$E(R') = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}$$

Получаваме 0,75%. Умножавайки тази стойност с 12, ще получим 9%, което е очакваната норма на възвръщаемост на пазара.

Възвръщаемостта на пет годишни американски ДЦК, е 2,74%.

Използвайки (1), за очакваната норма на възвръщаемост за акциите на Starbucks спрямо индексът S&P 500, получаваме:

$$E(R_i) = 0,0274 + 0,3728(0,09 - 0,0274) = 0,050737 = 5,073\%$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статията се прави критичен преглед на приложението на Модела за оценка на капиталовите активи при оценяване на активи. Извеждат се някои проблеми и се предлагат решения. Разгледани бяха два бизнес казуса, свързани с определянето на изискуемата норма на възвръщаемост от страна на два типа инвеститори. При решаването им е застъпено мнението, че трябва да се отчита спецификата на възложителя, т.е. какъв тип инвеститор е той. При локален инвеститор, който оперира на пазар, който не е интегриран към глобалния финансов пазар и не е диверсифициран, то следва да се използва класическия Модел за оценка на капиталовите активи. В случай, че възложителят е чуждестранен инвеститор и е напълно или частично диверсифициран, то следва да се приложи Глобалния Модел за оценка на капиталовите активи.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zukin, James, H., 1990. Financial Valuation: Businesses and Business Interests, WGL
- [2] Sharpe, William F., Guy M. Cooper. 1972. Risk- Return Classes of New York Stock Exchange Common Stocks: 1931-1967, Financial Analysts Journal, March-April, 1972, pp. 46-54.
- [3] Nenkov, D., 2012. Dynamics of capital markets and its impact on the cost of equity, Verslo ir teisės aktualijos / Current Issues of Business and Law, ISSN 1822-9530 print / ISSN 2029-574X online, 2012, p. 370.
- [4] Damodaran, Aswath, 2008. What is the riskfree rate? A search for the Basic Building Block, Stern School of Business, New York University.
- [5] <https://finance.yahoo.com/>
- [6] <https://www.starbucks.com/>
- [7] <https://www.investopedia.com/terms/m/marketriskpremium.asp>
- [8] <https://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp>
- [9] [https://www.youtube.com/watch?v=fv0\\_3wnw6h8](https://www.youtube.com/watch?v=fv0_3wnw6h8)

FRI-1.407.1-SSS-I-01

---

## GAME ENGINE AND ENGINE COMPONENTS DESIGN AND DEVELOPMENT<sup>9</sup>

---

### **Serkan Sadulov – Student**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Tel.: +359 87 892 5635  
E-mail: Serkansadulov@gmail.com

### **Mustafa Mustafafov – Student**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Tel.: +359 89 056 9310  
E-mail: MustafaSunayev607@gmail.com

### **Pr. Assist. Kamelia Shoilekova, PhD**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Tel.: +359 88 785 9224  
E-mail: kshoilekova@uni-ruse.bg

***Abstract:** The paper reviews the process of developing a game engine, supported by a launcher, which is used for starting projects in the engine. In the report is shown the methods and the practices that are used for developing the software, there will be examples of code and assets used in the development process. This paper shows the creation of genuine software. There will be explanation behind the thought process of developing the game engine and the launcher.*

***Keywords:** Game engine, Game engine launcher.*

### **REFERENCES**

- VULKAN, <https://www.vulkan.org/>  
<https://github.com/ocornut/imgui>  
MINIAUDIO, <https://miniaud.io/>  
Box2D – A 2D Physics Engine for Games, <https://box2d.org/>  
<https://github.com/mde/ejs>  
jQuery write less, do more, <https://jquery.com/>  
Black Lives Matter, <https://sass-lang.com/>  
Electron, <https://www.electronjs.org/>  
Advances in Real-Time Rendering in 3D Graphics and Games,  
<https://www.advances.realtimerendering.com/>  
GDC Vault, <https://www.gdcvault.com/>  
<https://github.com/skypjack/entt>  
Cross platform, open source .NET framework, <https://www.mono-project.com/>

---

<sup>9</sup> This Report is presented on a Student Scientific Session on 3 May 2023 in the “Informatics” section and nominated for publication in Compiled edition of Reports Awarded with “Best Paper“ Cristal Prize’23, as a hard copy (ISBN 978-954-712-826-2) and on-line on the Conference Website (<http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=bestPapers>). This publication reflects research from the scientific project "Investigation of effective knowledge management mechanisms applied in software engineering when creating projects with Agile methodologies" – of the "Scientific Research" fund of Ruse University "Angel Kanchev", 2023.

## THE GAME DOMINA<sup>10</sup>

---

### **Petar Mishev – Student**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Tel.: +359 82 888 326  
E-mail: s206252@stud.uni-ruse.bg

### **Assoc. Prof. Galina Atanasova, PhD**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Phone: +359 82 888 326  
E-mail: gatanasova@uni-ruse.bg

### **Assoc. Prof. Bagryana Ilieva, PhD**

Department of Natural Sciences and Education,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Phone: +359 82 888 326  
E-mail: bilieva@uni-ruse.bg

***Abstract:** This article presents the benefits of playing puzzle games and especially their function as a mental health improvement tool. Computer games are seen as tools for improving the brains health, by challenging it with simple to learn, but hard to master challenges. The presented game by the author is an example of how such games work and help improve one’s skills in special awareness tasks. Additionally, the author’s game is also a way to test the capabilities of the Godot engine, a free and open source game engine.*

***Keywords:** Gamification, Puzzle Games, Godot, GDScript*

## **INTRODUCTION**

Everyone wants to be happy, healthy and smart. Many believe that a healthy body will be able to lead them to this state. Dr. Daniel G. Amen, a neuroscientist and prominent associate of the American Psychiatric Association, says that a healthy body is not enough (Amen, Daniel G., 2013). He argues that a healthy mind is the most direct route to a productive and happy life. He adds that learning new things breaks the routine and keeps the brain alive.

The human brain is divided into areas responsible for sensation, movement, spatial perception, self-organization, attention control, and analytical skills. This division is loosely defined, however the main point is still clear - if a zone isn't maintained, the neurons in it would undergo atrophy over time. This means that the persons’ ability to think critically, the memory capacity, intelligence and attention span are on the decline. Over the past 20 years, scientists have discovered that every time a person learns a new skill or takes on a new challenge, the brain's neuroscience builds new connections. The more often these connections are used, the stronger they become. This gives enough reason to assume that brain games are not only entertainment, but also a means of improving the functions of the mind. The best thing is that, depending on their complexity, they are suitable for all ages.

Gaming has been a popular form of entertainment throughout the centuries of human history, and with the advent of new technologies, the world of gaming has expanded exponentially. From simple games with black backgrounds and white lines like Asteroids to large worlds that fool even our senses for their existence like Hogwarts Legacy. But the most interesting thing is that the most loved and iconic games are not among the most complex, but on the contrary, they are straightforward tasks that excite people of different ages and cultures.

---

<sup>10</sup> The report was presented at the Student Scientific Session on 3 May 2023 in the “Informatics” section.

These are "puzzle" type games. Their idea is to present the player with a problem and let them solve it. The special part is that, although the presented problem is simplistic, and the tools provided have a constant logical functionality, the initial start of every game is always different, and from this the player undertakes a unique sequence of actions, trying to find a solution to the problem. These types of games are versatile and can entertain players of all ages and skill levels. They are also available on a wide variety of platforms, including mobile phones, computers and game consoles.

This paper outlines a student project that focuses on the design and development of a puzzle game with two main objectives. Firstly, it aims to explore the practical uses of the Godot engine, an alternative to the more established engines such as Unity and Unreal, which are commonly used by both independent creators and big companies in the video game industry. Secondly, the use of the GDScript programming language. The introductory section presents the motivation for this work, including the origins, advantages, and beneficial effects of logic games for mental and long-term health maintenance. The puzzle game project Domina is then described in detail. The authors argue for their choice of toolkit for the project's development. The article concludes by summarizing the benefits of the current project and outlining future directions for work. Overall, this paper provides an insightful and comprehensive analysis of the development process for the puzzle game, Domina, and highlights the potential of the Godot engine and GDScript for independent creators and big companies in the video game industry.

## EXPOSITION

### The origins of the puzzle

The game was first created in China and the oldest examples date back to the first half of the 19th century. One of the earliest published descriptions of a puzzle appeared in 1826 in the collection "Continuation to infinite amusement", which contained 400 different experiments in various fields of science (Janakieva, V., 2022).

The puzzle became especially popular in the early 20th century when hundreds of different companies used it as a gift to promote their business or product. The pieces were made of paper or cardboard with an advertisement printed on them. They usually come in an envelope with instructions and an invitation to write or call the company or local dealer for its solution.

Featured in many printed publications - monthly magazine for teachers "Primary Education" 1904, magazine "Our Young People" 1905.

### Benefits of logic and puzzle games

Logical games provide an opportunity through entertainment to break away from reality and improve many of your abilities (Logicbg, A., 2019). Here are some of them:

**Improve concentration** - Puzzle games require attention. Therefore, they help to increase the level of concentration in children and adults. In cases where the level becomes easy, you can always increase the difficulty of the game, which will require the brain to think more deeply.

**Improve IQ** - Each game contributes to the development of the speed of thinking, which is so necessary in real life. Logical games successfully solve all problems related to erudition, reaction speed and volume of information perception.

**Improve memory** - the most obvious, but no less important advantage of logic games. Nothing improves the ability to remember like systematically increasing one's efficiency in logic games. The positive effect can be seen already in the first month, as the benefit is especially clear in people who initially had a weak memory. Here everything is like in sports - progress comes with training!

**Improve planning skills** - In the process of playing it is necessary to count or think several moves ahead. This helps improve decisiveness and organizational skills, as well as how to break down a complex problem into smaller, solvable parts. The problem of procrastination, which is typical for quite a few people, will completely or partially disappear. Games also help build confidence to take on bigger challenges.

**Improve social skills** - The most important factor that can significantly change a person's life is the ability to communicate with people. Logical games are one of the main ways to overcome complexes and improve interpersonal relationships. Group games promote communication and teamwork.

**Improves cognitive abilities** - Logic tasks are reduced to finding a solution to a given problem. The use of critical thinking is required to find a solution, as the possibility of cheating is not available.

**Improve motor skills** - games, in addition to developing attention, also improve fine motor skills, hand-eye coordination. Mobility is especially important, both for children and for adults.

### THE DOMINA PROJECT

Inspired by the above facts, the authors created the Domina project. It is a type of logic game where the player has to fill a board with tiles. The boards can be any of the pre-set sizes 5x5, 7x7, 10x10, or any size the player wants. Tiles are fed as combinations made in a 3x3 area (Fig. 1). In the centre of these combinations there is always a blue tile that is surrounded by one or more red tiles. These combinations are 16 in total, but the player gets a limited set of randomly selected combinations. If using the pre-set board sizes, the player gets a number of combinations corresponding to the size of the board (5 if 5x5, etc.), but if he wishes, he can choose his own value from 1 to 16.



Fig. 1. Combinations of tiles

The challenge comes when placing the blue tiles, the incoming red tiles must not overlap the previously placed blue tiles. Of course, there are some exceptions to tiling. The first is that there can be a red tile on top of another red tile. The second exception is when placing tiles along the contours of the board. If any red tile from the placement combinations leaves the board, that tile will be removed without any penalties.

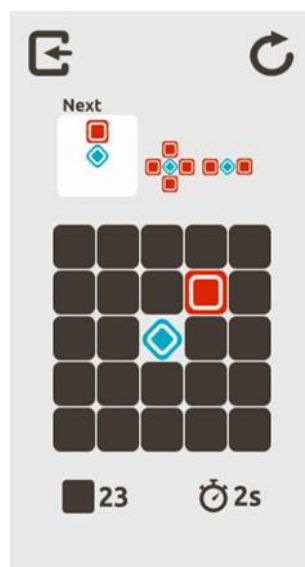


Fig. 2. New game with the first turn made



The idea of these two exceptions is to keep the game moving quickly, but also to help the player remove some tiles in case the game gives a sequence of combinations that will quickly fill the board.

On Fig. 2 a new 5x5 board game is introduced. The player in this case wished to place the blue tile in the centre, which is followed by a red tile in the upper right corner. The next blue tile will come with a red tile above it, and the next two will have more complex combinations.

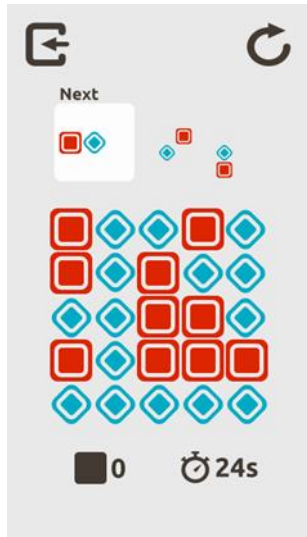


Fig. 3. A game won in Domina

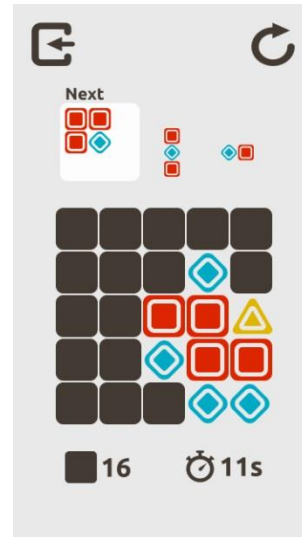


Fig. 4. A lost game in Domina

Fig. 3 presents a standard example of winning the game. The board is filled and no red tile overlaps with a blue tile. In Fig. 4. loss of the game or failure with the task is seen. The player placed a blue tile that had a red tile taped to it in the lower right corner. The red tile has replaced the previously placed blue tile.

The project has been realized with the Godot engine. Godot Engine is a free, cross-platform game engine that allows users to create 2D and 3D games using a set of common tools provided by the engine. It offers a unified interface and can export games to various platforms, including desktop, mobile, and web-based platforms. The engine is open-source under the MIT license, and users own their games completely. Godot's development is community-driven, allowing users to contribute to the engine's development.

Godot is easy to develop for small and medium projects. Everything in Godot is a "scene", which can contain elements of any type (textures, models, logic, etc.) that can be inserted into larger scenes. In this way, the whole game is made up of parts that can be reused in a wide variety of situations. Another advantage of Godot is that it comes with its programming language called GDScript. It's a scripting language that is much easier compared to C# for Unity and C++ for Unreal. GDScript is a high-level, object-oriented, imperative, and gradually typed programming language built for Godot. GDScript is a high-level, dynamically typed programming language used to create content. It uses an indentation-based syntax similar to languages like Python. Its goal is to be optimized for and tightly integrated with Godot Engine, allowing great flexibility for content creation and integration (Godot Docs contributors, 2023). Finally, Godot is free with an open source license. This allows the developer to customize the environment to their liking without the need to pay for licenses.

## CONCLUSION

Puzzle games have great advantages that set them apart from others. They are preferred because of their interesting and complex levels, the need to create a strategy to win and the fact that by relaxing one develops one's brain activity. They are the key to a successful life and make people smarter, more attentive, more focused. As a bonus, one retains mental health well into old age. Driven by the idea to enrich the world of entertainment, we started work on the Domina project. The implementation is based on new tools that have enriched our knowledge and capabilities. It is

planned to develop some more functionalities, such as multi-user game mode, profile creation, progress tracking, ranking lists. There are also plans to create a Desktop version, and the final versions will be available on the Google Play Store and Steam.

#### REFERENCES

Amen, Daniel G. (2013). *Personel Site*, URL: <https://danielamenmd.com> (Accessed on 16.04.2023).

Godot Docs contributors. (2023). *GDScript Basics*, URL: [https://docs.godotengine.org/en/stable/tutorials/scripting/gdscript/gdscript\\_basics.html](https://docs.godotengine.org/en/stable/tutorials/scripting/gdscript/gdscript_basics.html) (Accessed on 16.04.2023).

Janakieva, V. (2022). *Puzzels' History and etymology*, URL: <https://nastola.bg/interesno/istoria-proizhod-na-puzelite/> (Accessed on 16.04.2023).

Logicbg, A. (2019). *How do the logical games improve our brain?*, URL: <https://logicbg.com/2019/12/12/kak-logicheskite-igri-vliayat-na-mozaka-ni/> (Accessed on 16.04.2023).

FRI-1.407.1-SSS-I-03

---

## SYSTEM FOR CENTRALIZED CONTROL OF SMART DEVICES<sup>11</sup>

---

### **Nikola Kirilov – Student**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Phone: 0882 489 145  
E-mail: nikolakirilov145@gmail.com

### **Pr. Assist. Kamelia Shoilekova, PhD**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Phone: 0887 859 224  
E-mail: kshoilekova@uni-ruse.bg

***Abstract:** This document includes data collected from different sources all explaining different aspects of the concept of smart homes, buildings and gadgets. Also it proposes an idea for a system which can be used to ease the operations and control over different smart utensils which can be present or needed in our homes or in different types of professional spaces including: offices, warehouses, homes, etc. Also it is explained why we may have the need for such software product and what are its competitors on the market and what may be irrelevant to pursue as functionalities or realisation of ideas during the development of the said software product. At the end of the document there is a suggested lifeline of the development process which will be followed to showcase when the system may be operational.*

***Keywords:** Smart devices, Smart facilities, Software engineering.*

### **ВЪВЕДЕНИЕ**

В магазините все по-често се случва да виждате уреди, които непременно имат някакъв начин да се свържат с останалите електроники в помещенията, в които ще бъдат употребявани. Например лаптопи могат да се свързват с озвучителни системи чрез Bluetooth, хладилници да се свързват с безжичния интернет, за да извеждат актуален час на дисплея на вратата си, чрез телефоните си можете да се свържете с робота прахосмукачка чрез приложението на производителя. Удобно, но хаотично и децентрализирано. В документа е предложена идея за създаване на софтуер, който да успява да събере всички тези операции на едно място и да предостави на потребителя по-опростен контрол над устройствата си в домакинството, офиса или склада.

### **ИЗЛОЖЕНИЕ**

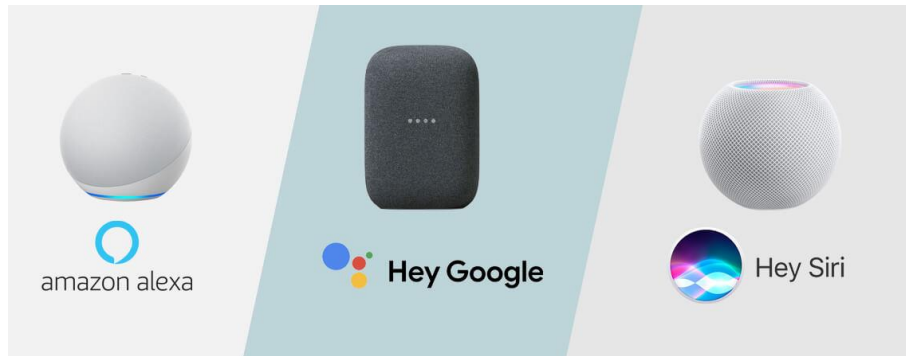
Идеята за такава система не е нищо ново. Вече съществуват такива системи разработвани от различни софтуерни компании като Google, Apple и други. Техните асистенти Alexa и Siri имат възможността да се свързват с всички устройства, които имат достъп до интернет и са със съответния регистриран клиентски акаунт. Чрез гласови команди можете да ги помолите да включат лампите, ако имате смарт крушки, да пуснат климатика или телевизора. Но поради политиките на компаниите производители тези системи имат някои ограничения: бавен отговор или резултат, ограничен контрол на/до устройства поддържащи същия софтуер, възможните опции за устройства са само Plug-in (Фиг. 1).

Главната цел на системата, която предстои да бъде разработена е да минимализира необходимостта от различни приложения на телефона или компютъра, или разнообразието от сигнали, които се налага да излизат от едно устройство, за да осъществява контрол над

---

<sup>11</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 3 май 2023 в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: СИСТЕМА ЗА ЦЕНТРАЛИЗИРАНО УПРАВЛЕНИЕ НА СМАРТ УСТРОЙСТВА.

останалите. Системата ще бъде предназначена, както за обикновения потребител в домакинството, който просто желае да отключи вратата си само като си доближи телефона, така и за собственика на фирмата, който желае да ограничи достъпа на определени служители, които преминават през вратата, а също и за началника на склада, който желае да провери колко палета са влезли през склада и кога трябва да излязат.



Фиг. 1. Plug-in смарт хоум асистенти

Системата ще се разделя на три части Home, Office, Warehouse и ще може да работи и комуникира с вградени в самата сграда или Plug-in устройства.

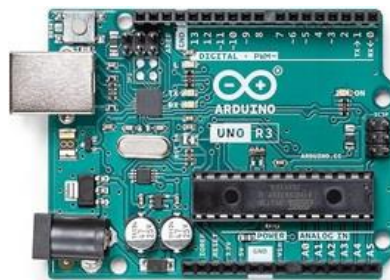
Home версията ще има функционалности за контрол над всички Plug-in устройства в дома, които поддържат съответния стандарт за връзка, също така и други, които работят на по-ниско ниво като електрически ключалки, завеси, душеве и др. Потребителят ще има достъп до мобилно приложение, интернет страница и компютърна програма, чрез които да изпълнява желаните операции.

Office версията ще включва гореспоменатите възможности, също така ще има и достъп до подробна информация от база данни, в която се събират данни, необходими за осъществяване на по-добър контрол над работната дейност в офиса.

Warehouse версията ще има възможност за проследяване на потока на продукти преминаващи през склад и възможност да бъде съчетана със самостоятелна система за контрол на роботизирана апаратура в складовото пространство.

Необходими ресурси за реализация на проекта:

- хардуер за провеждане на тестове (дребна електроника, предаватели, приемници, ключове, проводници и т.н.) и микро компютър:
  - Arduino – предпочетен е, защото дори начинаещи кодировчици работят лесно и има възможност да се свързва с устройства чрез многото си различни портове (Фиг. 2).



Фиг. 2. Arduino микро контролер

- ESP32 – предпочетен е, защото има способността да намалня режимни комуникационни стекове на основния процесор, също така може да взаимодейства с други системи, за да осигури Wi-Fi и Bluetooth функционалност (Фиг. 3).



Фиг. 3. ESP32 микро контролер

- ESP8266 – предпочетен е поради неговата компактност и енергоспестяващи възможности и мощ на Tensilica L106 32-bit RISC процесор (Фиг. 4).



Фиг. 4. ESP2866 микро контролер

- NODEMCU – може да бъде избрана като резервен вариант поради нейната ниска цена, близост на средата за програмиране до тази на Node.js, и възможност да се разработва в същите условия като Arduino (Фиг. 5).



Фиг. 5. NODEMCU микро контролер

- бази данни:
  - за потребители – нерелационна (MongoDB);
  - за продукти (Warehouse версия) – релационна (SQL).
- сайт (клиентска страна) – за разработката на web сайта ще бъдат използвани модерни похвати и най-новите технологии като: JS, EJS, HTML, SCSS, CSS, Node.js, React;
- мобилно приложение;
- компютърна програма.

По време на процеса на разработка ще се съобразяваме с различните приети стандарти, като Wi-Fi, Z-Wave, Zigbee, Bluetooth Low Energy (BLE), Thread, X10, Insteon, Universal Powerline Bus (UPB) или Matter, за установяване на връзка с приетите от световните лидери в производството на смарт устройства. Matter, приет от Google, Apple, Amazon, Huawei, Zigbee Alliance, IKEA, Schneider е стандарт, който цели да обедини всички произведени устройства участващи в изграждането на умните сгради под един протокол за установяване на междинната им комуникация. За изпълнението на тази си цел Matter използва физическа част (кабели/проводници), Wi-Fi, Ethernet за поток на данни и Bluetooth LE за изпълнение (Фиг. 6).



Фиг. 6. Лого на стандарта Matter

Процесът за реализация ще започне с разработката на мобилно приложение, което ще позволява да бъдат изпращани сигнали към програмиран микрокомпютър, който да изпълнява зададената операция (пускане на робот прахосмукачка, включване на лампа) и ще връща желан сигнал или отговор (дали прахосмукачката е приключила работа или дали е настъпила грешка) или по-точно това е разработката на Home версията. През целия процес това приложение ще бъде подобрявано, с цел извършване на необходимите функционалности и добавяне на нови. След успешно тестване на продукта ще се премине към създаване на система за регистрация в приложението и изграждане на клиентска база данни, разработване на сайт, който да използва същата тази система и база от данни и ще започне разработка на Office версията. По-нататък в изграждането на проекта ще бъде разработена и компютърна програма за установяване на контрол над по-сложни системи например, конвейери, складови работи и проследяване на движение на стоки и др. Настъпва етап за работката на Warehouse версията.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системата за централизиран контрол на смарт устройства няма да е само програма за контрол на обикновени домакински електроники, тя ще събира всички „смарт“ аспекти на човешкия начин на живот и изпълнение на служебните задължения на едно място. Ще позволява контрол на всички устройства, без значение дали е просто отключване на ключалката на входната врата на дома, пускане на кафе машината в офиса или контролиране на роботизирано скеле за пренос на товари.

## БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект „Изследване на ефективни механизми за управление на знания, прилагани в софтуерното инженерство при създаване на проекти с гъвкави методологии“, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

## REFERENCES

- NORDIC SEMICONDUCTOR, <https://www.nordicsemi.com>  
 MINEWSEMI, <https://en.minewsemi.com/>  
 SAFEWISE, <https://www.safewise.com/>  
 ARDUINO, <https://www.arduino.cc/>  
 MDPI, <https://www.mdpi.com/>  
 ORACLE, <https://www.oracle.com/>  
 New voice assistants for smart home, <https://www.bticino.com/news/smart-home/new-voice-assistants-for-smart-home/>  
 Az-delivery, <https://www.azdelivery.de/en/products/esp32-developmentboard>  
<https://www.emag.bg/modul-arduino-nuamcu-lua-wifi-v3-esp8266-esp-12e-cp2102-ai035-s187/pd/D35S75BBM/>  
 ERELEMENT electronics & robotics, <https://erelement.com/wireless/nodemcu>  
 WIKIMEDIA COMMONS ,  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Logo\\_of\\_Matter\\_connectivity\\_standard.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Logo_of_Matter_connectivity_standard.svg)

FRI-1.407.1-SSS-I-04

---

## MEMSTEGO – AN APPROACH FOR HIDING INFORMATION<sup>12</sup>

---

### **Vladislav Nikolov – Student**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Tel.: +359 82 888 326  
E-mail: s206253@stud.uni-ruse.bg

### **Assoc. Prof. Galina Atanasova, PhD**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Tel.: +359 82 888 326  
E-mail: gatanasova@uni-ruse.bg

### **Assoc. Prof. Bagryana Ilieva, PhD**

Department of Natural Sciences and Education,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Tel.: +359 82 888 326  
E-mail: bilieva@uni-ruse.bg

***Abstract:** The paper examines the potential use of stenography in daily communication by a particular target group, as well as others. It proposes the use of funny images and memes that are frequently shared in daily communication. The paper introduces a new solution called MemStego, which is an amalgamation of steganography, cryptography, and memes. While there are already existing solutions, MemStego was created as a side project motivated by the authors' interest in cybersecurity and communication. Unlike other software products that use images provided by the user, MemStego uses memes as well that are obtained from the Memegen API.*

***Keywords:** Stenography, Memes, Cryptography, Hiding Information.*

## INTRODUCTION

Our online presence is an extension of our personal lives, as we share a vast amount of information, both explicit and implicit, that reflects who we are and what we do. While many people may feel that sharing some of their personal lives is harmless, the reality is that the information we share online can be used against us by others. This is especially true for people who express opinions that are not popular with certain groups. Journalists, researchers, and other truth-seekers are particularly vulnerable to monitoring and persecution.

The solution to this problem lies in using steganography, which is the art of hiding information within other information. By using steganography, individuals can communicate and share information without attracting unwanted attention. This technique has been used since ancient times, and it can be used effectively today to exchange messages without drawing attention to them.

One of the possible solutions to the problem we are going through in this article is the project “MemStego”. It is a Steganography tool that uses as base images, that could possibly be memes - those funny images shared throughout the Internet. Using them, with the combination of Cryptography and Steganography (Subramanian, N., O. Elharrouss, S. Al-Maadeed & Bouridane, A., 2021), could make the perfect almost undetectable solution. The project itself solves not the root of the silencing problem, but protects the intermediate steps of every authority that could possibly be punished not lawfully.

The presentation is organised into several sections, beginning with an introduction, followed by a brief overview of shorthand and memes as their essence and benefits. The designed and implemented application for encrypting textual content in an arbitrary image is then described

---

<sup>12</sup> The report was presented at the Student Scientific Session on 3 May 2023 in the “Informatics” section.



through a Use Case Diagram, with step-by-step instructions provided for both the encoding and decoding processes. The concluding section summarises the key points covered in the presentation.

## EXHIBITION

### Old Fashioned Steganography

In ancient times, when emperors and rulers held power across the world, messages were delivered from one location to another using human messengers. Unfortunately, these messengers were often intercepted, and their private messages read by unintended individuals. To address this issue, steganography was born. In this method, a secret message was tattooed onto the head of a person, and the person's hair was allowed to grow to cover the message. Once the message was hidden, the messenger was sent to deliver it, and their head was shaved at the endpoint to reveal the message.

### Modern Steganography

As mentioned earlier, steganography is a technique used to conceal one type of information within another type, such as images, videos, or sounds. Typically, steganography involves hiding data within binary files, which are larger in size and contain encoded data that represents visual, auditory, or other sensory information. By embedding information within these files, steganography allows for covert communication. In the case of images, for example, the data is encoded in the pixels themselves. This means that the hidden information is embedded within the actual image data.

### Memes

Nowadays, the term "meme" has already acquired an almost universal meaning for more and more people. For all of us, it is the funny collages and humorous pictures posted on the internet, for example Fig. 1. In a more global sense, it is assumed that they can also be popular phrases or actions with an ironic purpose, which subsequently became a massive social trend.



Fig. 1. Meme not a meme until a meme

The origin of memes dates back to 1976, when social networks were just a mirage. In his book "The Selfish gene" (The Selfish gene), the biologist Richard Dawkins introduces the concept of "meme" as a unit of measure, accounting for the exchange of cultural information in a society. There, genetics is seen in a more modern guise and provides interesting explanations for how humans act (often consciously and self-centered) with the sole purpose of reproducing themselves, both biologically and ideologically, be it in an impure way. The ability of a society to transmit its traditions and cultural heritage between generations finds expression in memetics - a new, but no less important, scientific current. Memes (because if "gene" is "gene" then "meme" is "meme") are the transmitters and witness of all cultural and spiritual changes in a given group of people and are our processable visible genes (Dawkins, R., 2016).



Several indisputable facts about human nature can be noted in this theory. Embedded in the mind of a person is the frantic desire that his existence should not be in vain, and hence the urge to create, explore and pursue his ideals. People's self-centred nature drives them to constantly seal every slice of their lives into time capsules and dream of a legacy that will make them immortal in someone's anthology. Another DNA that expresses itself in long-standing traditions, customs and historical sources from forgotten periods. In this sense, memes are extremely valuable, because they are most often a version of already familiar images and can evolve over time, passing from one creative mind to a more creative mind, until they lose their current value, i.e. their qualities of sustainability. They can be used to track what is influential fashion and what is a fleeting trend and to measure trends around a given historical period.

### MEMSTEGO

Memstego is a steganography tool that utilises memes and images, and is developed as a GUI application in Python. The application makes use of the Tkinter Framework for the graphical user interface, the PyCryptodome package for cryptography (PyCryptodome's documentation, 2023), and the Pillow package for image manipulation (Pillow 9.4.0 documentation, 2023). This software offers users three main types of operations.

The 'Crypt' operation/tab allows users to embed secret textual data into an image of their choice. The 'DeCrypt' operation/tab decrypts an image with embedded secret information, requiring a password for decryption. The 'MemeCrypt' tab is a variation of the 'Crypt' tab that uses a randomly generated meme from the Memegen API for the next steps of the procedure. Below is a Use case diagram combined with images from the interface.

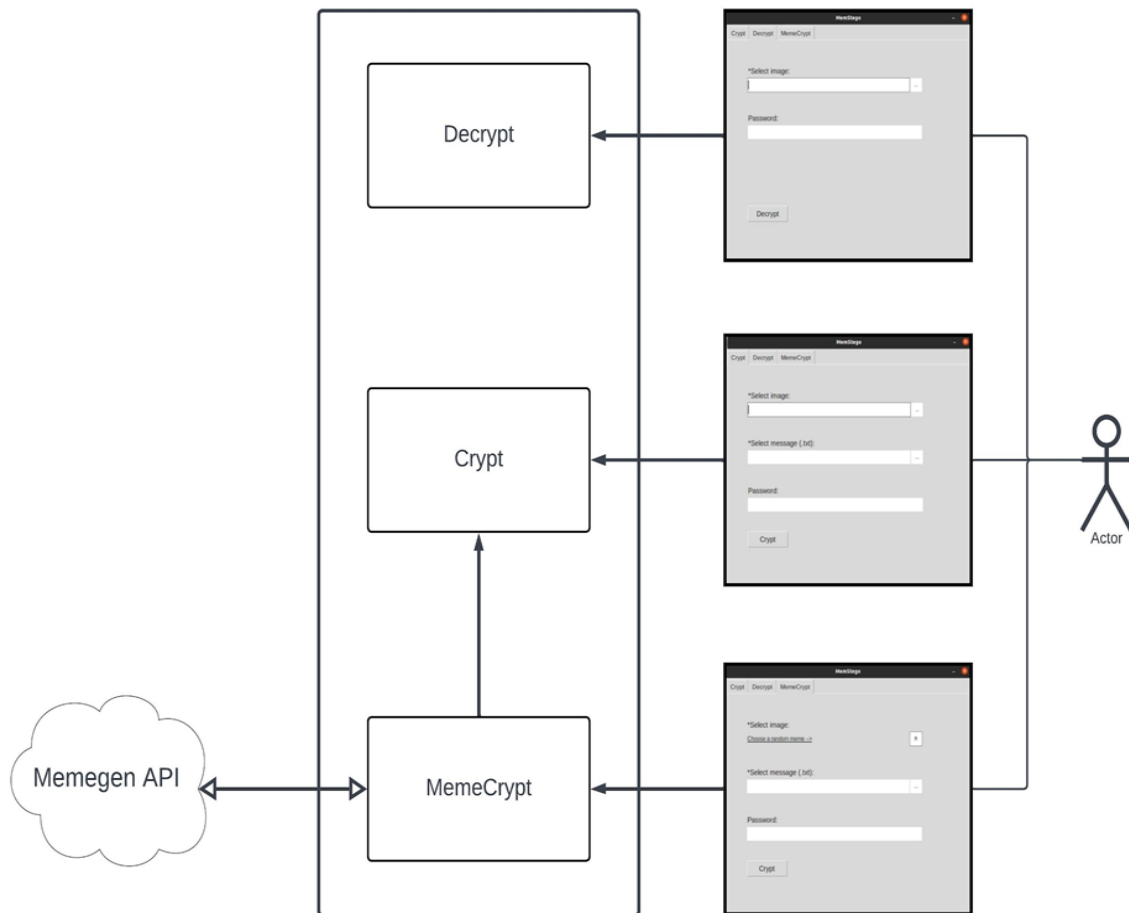


Fig. 2. Diagram of the solution

To help visualise the embedding process, imagine a snake, where the head represents metadata about the embedded data and the tail represents the actual data.

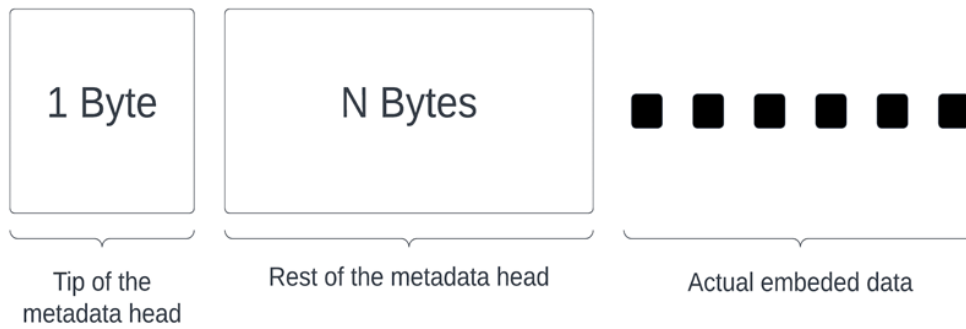


Fig. 3. Data format (Metadata + actual data)

In Memstego, the metadata about the embedded data is split into two parts: the "Tip" and the "Rest". The "Tip" section consists of 1 byte and is responsible for counting the number of bytes that contain the actual metadata. The "Rest" section is used to describe the number of characters embedded and takes up N bytes, where N is defined in the "Tip" section. It specifies the number of characters that have been embedded in the image. It's important to note that each character is embedded in exactly 2 pixels. Currently, Memstego only supports PNG images. Figure 3 provides a visual representation of how the metadata and embedded characters are encoded within the image. An image could contain maximum the following number of bytes:

$$\text{NumberOfBytes} = \text{Width of the image in pixels} * \text{Height of the image in pixels} / 2 \quad (1)$$

#### MemStego Demo



Fig. 4. Before manipulation



Fig. 5. After manipulation

Fig. 4 and Fig. 5 show that an image before and after the manipulation is the same. After the manipulation, it's difficult to notice any difference between the original image and the modified one, as we have only altered the Least Significant Byte. This change is not easily perceptible to the naked eye, but it can be detected using specialised software designed to detect image manipulation.

#### Embedding data in image

Figure 6 depicts the following processes. The User begins by selecting a message file, an image, and a password. The message is then encoded using the proper encoding scheme to account for the possibility of any UTF-8 symbols being present. Once encoded, the resulting character sequence is encrypted. The length of the encrypted message is then evaluated, and a binary sequence representing it is generated.

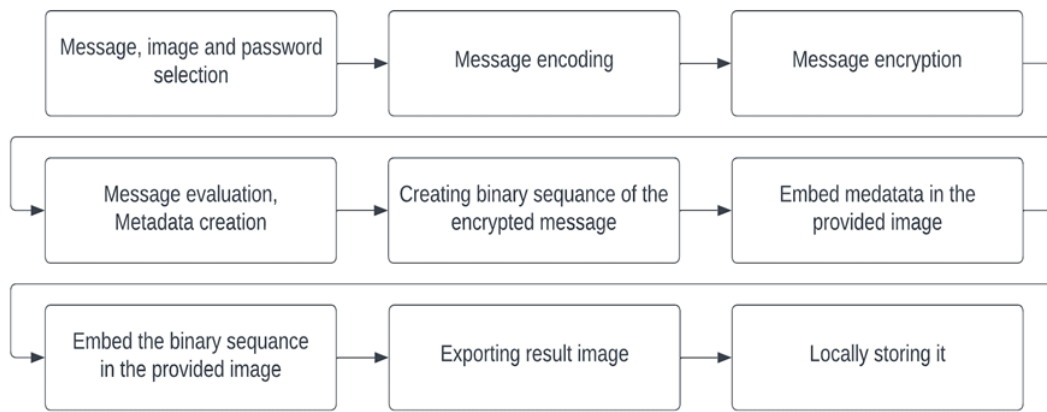


Fig. 6. Embedding data

Next, the first byte of the metadata header is written, followed by the corresponding number of bytes for the actual number of embedded characters. Then, the encrypted message is embedded into the image. Finally, the resulting image is exported and saved to local storage.

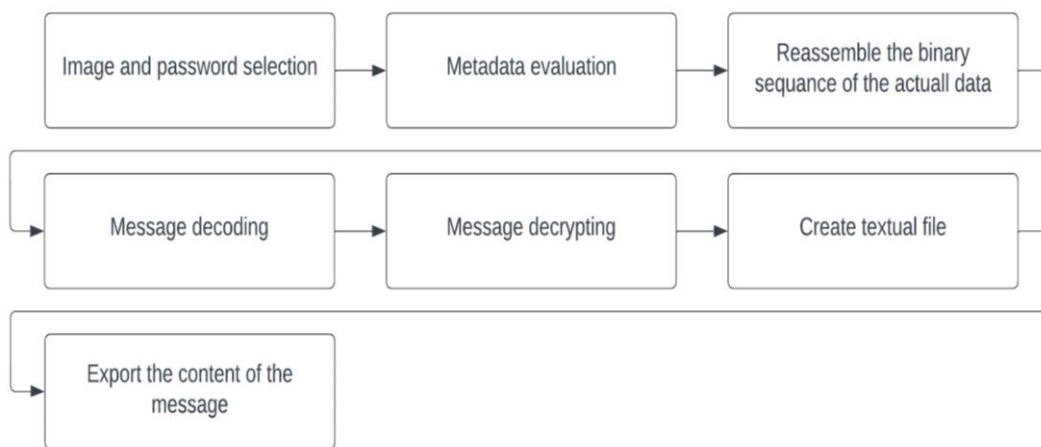


Fig. 7. Uprooting data

### Uprooting data from image

Uprooting, the process shown in Fig. 7, data refers to the process of extracting embedded data from an image. To do this, we begin by selecting the image and inputting the password. Next, we retrieve the metadata from the image, followed by the encrypted embedded data. We then decode the binary sequence into characters and decrypt it before exporting the content to a text file.

### CONCLUSIONS

To align with the latest communication technology trends and address the need for secure text transmission over networks, we have developed and implemented an application that enables users to conceal any text within PNG images. The source code of the project is uploaded in GitHub <https://github.com/cloudvlad/Memstego>.

There are instructions available for installing and using the program, as well as a video demonstrating how to use the solution and the results obtained from its usage.

Planned for future development is adding more image formats, more media formats and GUI customizations.

Actual Video demonstration could be found on:

<https://www.youtube.com/watch?v=O9hoZCktR8g>.

### REFERENCES

Dawkins, R. (2016). *The-Selfish-Gene*, Oxford-Landmark-Science.

PyCryptodome's documentation. (2023), URL: <https://pycryptodome.readthedocs.io/en/latest/> (Accessed on 16.04.2023).

Pillow 9.4.0 documentation. (2023). URL: <https://pillow.readthedocs.io/en/stable/handbook/overview.html> (Accessed on 16.04.2023).

Research Group Electronic Literature. (2022), University of Bergen, URL: <https://www.uib.no/en/rg/electronicliterature/124720/meme-not-meme-until-it-meme> (Accessed on 16.04.2023).

Subramanian, N., O. Elharrouss, S. Al-Maadeed & Bouridane, A. (2021), *Image Steganography: A Review of the Recent Advances*, IEEE Access, vol. 9, pp. 23409-23423, doi: 10.1109/ACCESS.2021.3053998.

FRI-1.407.1-SSS-I-05

---

## ONLINE CALCULATOR FOR DETERMINING THE OPTIMAL SEEDING RATE FOR ANNUAL AND PERENNIAL CEREALS AND LEGUMINOUS FORAGE CROPS <sup>13</sup>

---

### **Bozhidar Atanasov – Student**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Phone: 0876 647 771  
E-mail: s216271@stud.uni-ruse.bg

### **Pr. Assist. Kamelia Shoilekova, PhD**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse “Angel Kanchev”  
Phone: 0887 859 224  
E-mail: kshoilekova@uni-ruse.bg

***Abstract:** The article presents an online calculator for determining the optimal seeding rate for annual and perennial cereals and leguminous forage crops. The purpose of this calculator is to optimize the amount of seeding material when creating optimally topped single crops of annual and perennial cereal and legume forage crops.*

***Keywords:** Cereal and legume forage crops, online calculator, Sowing rate, Svelte, Vite, Vercel, NPM, Node.js, HTML, Javascript, Typescript, CSS, Git, Github.*

### **ВЪВЕДЕНИЕ**

През последните 54 години е регистриран ръст в животновъдния сектор, с приблизително 200%, като най-голям принос за това има непрекъснато увеличаващото се население на Земята, което до 2050 г. се очаква да надмине 9 милиарда души. При такъв сценарий, за постигането на баланс между отглеждането на зърнени и фуражни култури за храна на животните е предизвикателство в съвременните научни изследвания, което е предпоставка за разработване на високоефективни и екологосъобразни технологични решения при отглеждане на земеделските култури.

На съвременния етап в земеделската практика важно условие за успешно и икономическо оправдано земеделие е получаването на високи добиви на разумна цена, където сеитбената норма има ключова роля, поради относително високата цена на семената предлагани на пазара. Сеитбената норма на редица селскостопански култури варира в широк диапазон в зависимост от интегралното въздействие на множество фактори включващо местоположение, климат, почвен тип, обработка на почвата и др. Широко приложение в земеделската практиката намира използването на по-високи сеитбени норми от определената оптимална агротехническа гъстота на растенията при редица селскостопански култури, което от една страна влошава фитосанитерното състояние на посевите, засилват се вътрешвидовите конкурентни взаимоотношения в агрофитоценозите, с което оказват депресираш ефект върху първоначалното развитие на културите, а от друга се увеличават разходите на земеделските производители.

За улеснение на земеделските производители в достъпното интернет пространство са налични множество калкулатори за изчисляване на сеитбените норми при основни селскостопански зърнено-житни и зърнено-бобови култури (<https://www.agrocalculator.bg/>;

---

<sup>13</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 3 май 2023 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: ONLINE КАЛКУЛАТОР ЗА ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА ОПТИМАЛНА СЕИТБЕНА НОРМА ПРИ ЕДНОГОДИШНИ И МНОГОГОДИШНИ ЖИТНИ И БОБОВИ ФУРАЖНИ КУЛТУРИ.

<https://digital.rekolta.bg/planove/>; <https://www.agrii.co.uk/calculator-tools/seed-rate-calculator/>), но липсват такива за определяне сеитбената норма при едногодишни и многогодишни житни и бобови фуражни култури.

Определянето на оптимална гъстота на сеитба при едногодишните и многогодишни житни и бобови фуражни култури е от съществено значение, от една страна за намаляване необходимите вложения при създаване на посевете и от друга, за оптимална и икономически изгодна гарнираност на тревостоя в годината на създаване, и дълготрайността му на използване.

За постигане на качествена механизирана сеитба при едногодишните и многогодишни житни и бобови фуражни култури ключов елемент от технологичните решения е осигуряване на оптималния брой растения на единица площ и равномерното им разпределение вътре в реда, спрямо биологичните изисквания на културите в зависимост от качеството на семената и прогнозния коефициент на поникването им при полски условия. За реализирането на това условие е необходимо или всеки път човек на ръка да направи нужните пресмятания, което ще му отнеме известно количество време, или да се създаде online калкулатор, който да определя оптималната сеитбена норма при многогодишни житни и бобови фуражни култури.

## ИЗЛОЖЕНИЕ

### 1. Online калкулатор, който определя оптималната сеитбена норма при многогодишни житни и бобови фуражни култури

#### а. Материал и методи

Гъстотата на посевете при производството на фураж е важен фактор за получаване на оптимален добив от фуражните култури. За постигане на желаната гъстота е необходимо не само засяването на качествени семена, но и максимално точно изчисляване на сеитбените норми.

За да се гарантира желания оптимален брой жизнеспособни растения на квадратен метър, се използват няколко променливи съгласно формулата:

$$SR_{ua}(\text{seeds}/\text{m}^2) = \frac{TPD \cdot 100}{SLG\% \cdot EC_{0.80 \div 0.99}} \quad (1)$$

```
CalculateSowingRateSafeSeedsPerMeterSquared(): number {
  return (
    (this.wantedPlantsPerMeterSquared * 100) /
    (this.germination * this.coefficientSecurity)
  );
}
```

Фиг. 1. Функция за пресмятане на сеитбена норма за брой семена/ m<sup>2</sup>

където:

SR<sub>UA</sub> (seed rate per unit area) – сеитбена норма, брой семена/m<sup>2</sup>;

TPD (target plant density) – желана гъстота след поникване, брой растения/m<sup>2</sup>;

SLG% (seed lab germination) – лабораторна кълняемост на семената, %.

EC – прогнозен коефициент на осигуреност (варира в диапазона от 0,80% до 0,99%), отчитащ благоприятността на условията на сеитба. Определя се окомерно в зависимост от наличието на растителни остатъци от прешественика, почвени агрегати (буци) над 3-5 cm в диаметър, дълбочината на сеитба, оптимален агротехнически период на сеитба, почвената влага (преовлажняване) и температура на почвата (0 - 10 cm) в повърхностния почвен слой в зависимост от биологичните изисквания на културите, наличие на почвени неприятели, заплевеляване и др., т.е. - 0,80% се определя при наличие на растителни остатъци, наличие на

почвени агрегати, недобре оформено легло на семената, 0,99% - спазени са агротехническите срокове на сеитба, почвата е доведена до градинско състояние.

За определяне на сеитбена норма (SD), т.е. оптималното количество семена (kg/da) необходими за засяване на един декар, се използва адаптираната формула на Matthews, P., & Holding, D., за да се гарантира желаня оптимален брой жизнеспособни растения на декар:

$$SR (kg/da) = \frac{SR_{ua} \cdot S_{wt} \cdot 10}{SP \cdot SLG\%} \quad (2)$$

```

CalculateUsedSeedsKgPerDa(): number {
  return (
    (this.CalculateSowingRateSafeSeedsPerMeterSquared() *
      this.massPer1000g *
      10) /
    (this.purity * this.germination)
  );
}

```

Фиг. 2 Функция, която изчислява количеството семена (kg/da)

*SR* (sowing rate) – количество семена (kg/da)

*SR<sub>UA</sub>* (seed per unit area) – сеитбена норма, брой семена/m<sup>2</sup>;

*S<sub>wt</sub>* (seed weight) – маса на 1000 бр. семена, g;

*SP* (seed purity) – чистота на семената, %

*SLG%* (seed lab germination) – лабораторна кълняемост на семената, %.

Междуредовото разстояние (cm) на засяване на фуражните култури при производство на фураж е 10.0 – 15.0 cm (обикновено 12.5 cm). Въртередовото разстояние е производна величина на междуредовото разстояние и желаната гъстота на растенията след поникване.

$$Intra\ row\ spacing = \frac{1000 / Inter\ row\ spacing}{TPD} \quad (3)$$

```

CalculateInternalRowHeightCm(): number {
  return (
    this.MetersToCm(
      1000 / //from formula
      (this.CmToMeters(this.rowSpacingCm)) // input is in cm, but formula needs meters, so convert it
    ) // according to the formula we need to turn it back to cm
    /
    this.CalculateSowingRatePlantsDa()
  )
}

```

Фиг. 3. Функция за пресмятане на въртередово разстояние

За да бъде улеснен потребителят, междуредовото разстояние се въвежда в сантиметри, но формулата изисква да се въведе в метри. Това води до няколко превръщания от една мерна единица в друга, където:

*Intra row spacing* (the space within a row) – въртередово разстояние (разстояние между растенията в реда)

*Inter row spacing* (the space between two rows) – междуредово разстояние (разстоянието между два реда)

TPD (target plant density) – желана гъстота след поникване, брой растения/m<sup>2</sup>.

## в. Използване

На фигура 4 е представена началната страница на калкулатора (<https://farming-calculator-app.vercel.app/>). В ляво е менюто за смяняне на езика, избор на опции и калкулатори в процес на разработка. На страницата на калкулатора се визуализира избраната култура; поле за нов избор на култура; полета за въвеждане на входни данни, бутон за изчисляване и полете за изходните данни.

Култура - Царевица (*Zea mays*)

Царевица - *Zea mays*

Коефициент на оспуреност (0.9-0.99) 0.90 0.93 0.95 0.97 0.99 0.9

Желана гъстота, растения на m<sup>2</sup> (7 plants/m<sup>2</sup> - 7.5 plants/m<sup>2</sup>) 7 plants/m<sup>2</sup>

Маса 1000, g (200 g - 300 g) 200 g

Чистота, % 99 %

Кълняемост, % (75 % - 100 %) 75 %

Междуредово разстояние, cm 70 cm

**Изчисли**

Сеитбена норма, брой семена на m<sup>2</sup> 0 plants/m<sup>2</sup>

Сеитбена норма, растения на da 0 sowing rate/da

Количество/разход семена, kg/da 0.0 kg/da

Фиг. 4. Начална страница на калкулатора за определяне на сеитбена норма при фуражни култури

В началото на калкулатора има възможност за избор на фуражна култура, като е посочено наименованието на вида на български и латински език. В калкулатора са заложили едногодишни и многогодишни житни и бобови фуражни култури, които могат да се изберат от падащо меню (Фиг. 5). За всяка една от избраните фуражни култури са налични ориентировъчни агрономически данни (минимални и максимални стойности) в полетата за въвеждане.

При избор на култура, в калкулатора се обновяват автоматично минималните и максимални стойности под изискуемите за въвеждане показатели. В полетата на слайдерите се попълват автоматично минималните стойности, което улеснява ползвателя за избиране или въвеждане на конкретна стойност.

Царевица - *Zea mays*

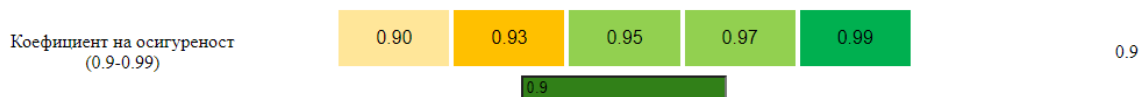
- Люцерна - *Medicago sativa*
- Звездан - *Lotus corniculatus*
- Бяла детелина - *Trifolium repens*
- Червена детелина - *Trifolium pratense*
- Соя - *Glycine max*
- Грах - *Pisum sativum*
- Сорго-Судански хибриди - *Sorghum bicolor x Sorghum sudanense*
- Суданска - *Sorghum sudanense*
- Техническо сорго - *Sorghum vulgare var. tehnicum*
- Царевица - *Zea mays*
- Пасищен райграс - *Lolium perenne*
- Тръстиковидна власатка - *Festuca arundinacea Schreb.*
- Червена власатка - *Festuca rubra*
- Ливадна власатка - *Festuca pratensis Huds*
- Ежова главица - *Dactylis glomerata*
- Пустинен житняк - *Agropyron cristatum Gaertn*
- undefined - *Agropyron desertorum (Fisch.) Schultes.*

Фиг. 5. Поле за избиране на култури

Програмата приема входните данни, чрез няколко начина за въвеждане.

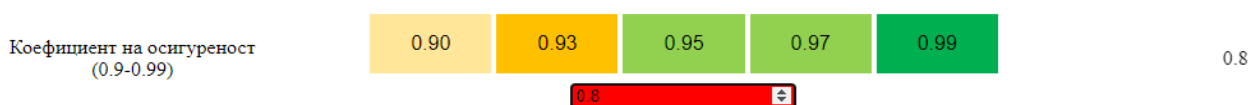


Чрез бутони. В ляво се изписва името на променливата, като са фиксирани минимални и максимални стойности (Фиг. 6). Променливата има и няколко фиксирани променливи стойности, които могат да бъдат избрани, чрез бутони. Калкулаторът позволява на потребителя да въведе и друга междинна стойност. Ако въведената стойност е във фиксираните (минимални и максимални) граници на показателя, полето за въвеждане на стойността се оцветява в зелено. В дясно се изписва въведената стойност.



Фиг. 6. Въвеждане чрез бутони

Фигура 7 демонстрира въвеждане на данни извън препоръчителните фиксирани минимални и максимални стойности на показателя, като полето за въвеждане се оцветява в червено.



Фиг. 7. Поле със стойност извън препоръчителните фиксирани минимални и максимални стойности на показателя

Чрез слайдер. В ляво се изписва името на променливата и препоръчителните фиксирани минимални и максимални стойности на показателя. За улесняване на потребителя е поставен слайдер, с който може да се промени стойността от долна към горна граница, чрез приплъзване. В полето потребителят може да въведе ръчно избрана стойност. Ако въведената стойност е във фиксираните граници, показани под наименованието на променливата, то мястото за въвеждане ще бъде оцветено в зелено (Фиг. 8), в противен случай в червено (Фиг. 9). В дясно се изписва въведената стойност.



Фиг. 8. Коректно въвеждане на стойности в калкулатора, чрез слайдер



Фиг. 9. Въведени стойности извън препоръчителния диапазон

След въвеждане на изискуемите входни данни се натиска бутон „Изчисли“. Под него следват изходните данни, където се намират обновените стойности на сеитбена норма в ( $m^2$ ) и сеитбена норма в (da), както и количеството семена (kg/da) и вътрередово разстояние (cm) при съответната култура (Фиг. 10).

Изчисли

Сеитбена норма, брой семена на $m^2$	12 plants/ $m^2$
Сеитбена норма, растения на da	11667 sowing rate/da
Количество/разход семена, kg/da	3.1 kg/da
Вътрередово разстояние, cm	12.2 cm

Фиг. 10. Бутон за пресмятане и визуализиране на изходни данни

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Този проект беше създаден по молба на фермер и поради необходимостта от безплатен онлайн калкулатор за изчисляване на сеитбени норми при едногодишни и многогодишни фуражни култури. Съществуващите и свободно достъпни такива, за изчисляване на сеитбени норми са ограничени до приложение при отделни окопни или със слята повърхност култури.

## БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от научноизследователски проект ПОЗМ 12 „Оптимизиране подхода за контрол на заплевеляването при основни земеделски култури“, финансиран от Селскостопанска академия – София.

## REFERENCES

Chel, K. (2011). Renewable energy for sustainable agriculture. *Agronomy for sustainable development*, 31 (1), pp. 91-118. [ff10.1051/agro/2010029](https://doi.org/10.1051/agro/2010029). [ffhal-00930477f](https://doi.org/10.1051/agro/2010029).

Fulkerson, W.J., & Donaghy, D.J. (2001). Plant soluble carbohydrate reserve and senescence – key criteria for developing an effective grazing management system for ryegrass-based pasture: a review. *Australian Journal of Experimental Agriculture*, 41, 266 – 275.

Hakl, J., Fuksa, P., Santrucek, J., & Maskova, K. (2011). The development of lucerne root morphology traits under high initial stand density within a seven year period. *Plant, Soil and Environment*, 57(2), 81–87.

Harris, W. (1990). *Pasture as an ecosystem. Pastures: their ecology and management*. Langer, R.H.M. (ed.).- Auckland (New Zealand): pp. 75-131 Oxford University Press. ISBN 0-195-58174-1. p. 75-131.

Lee, J., Thom, E., Chapman, D., Wynn, K., Waugh, C., & Rossi, L. (2013). *Ryegrass seeding rate alters plant morphology and size-possible implications for pasture persistence*. Proceedings of the 22nd International Grassland Congress. New South Wales Department of Primary Industry, Kite St., Orange New South Wales, Australia. Available at <https://uknowledge.uky.edu/igc/22/1-3/13>.

Lee, J., Thom, E., Chapman, D., Wynn, K., Waugh, D., Rossi, L., Faville, M., Bell, N., & McNeill, M. (2018). High perennial ryegrass seeding rates do not negatively impact pasture sward persistence. *Grass and Forage Science*, 73(2), 456-472. <https://doi.org/10.1111/gfs.12335>.

Matthews, P., & Holding, D. (2005). *Germination testing and seed rate calculation*. State of New South Wales Department of Primary Industries, 20, ISSN 1441-2233. Available at [https://www.dpi.nsw.gov.au/\\_\\_data/assets/pdf\\_file/0005/157442/pulse-point-20.pdf](https://www.dpi.nsw.gov.au/__data/assets/pdf_file/0005/157442/pulse-point-20.pdf).

Salama, H., & Nawar, A. (2021). Does manipulating harvest regime of single-cut 'Fahl' berseem clover compensate for reduced seeding rate? *Grassland Science*, 67(3), 207-214.

Tufail, M., Krebs, G., Southwell, A., Piltz, J., & Wynn, P. (2019). Seeding rate effects on yield components and forage quality of Agaitti Berseem-2002 – an improved variety of berseem clover. *Journal of Crop Improvement*, 33(4), 522-535. <https://doi.org/10.1080/15427528.2019.1625837>.

Šarauskis, E., Kazlauskas, M., Naujokienė, V., Bručienė, I., Steponavičius, D., Romanekas, K., & Jasinskas, A. (2022). Variable rate seeding in precision agriculture: Recent advances and future perspectives. *Agriculture*, 12(2), 305. <https://doi.org/10.3390/agriculture12020305>.

<https://svelte.dev/>

<https://github.com/mefechoel/svelte-navigator>

<https://stackoverflow.com/questions/56488202/how-to-persist-svelte-store>

FRI-1.407.1-SSS-I-06

---

## RECURSION AND THE "DIVIDE AND CONQUER" METHOD AS TECHNIQUES FOR SOLVING PROBLEMS IN COMPUTER SCIENCE EDUCATION<sup>14</sup>

---

**Stanaila Neykova-Karagaeva, PhD Student**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse "Angel Kanchev"  
Tel.: 0877 544 182  
E-mail: sneykova@uni-ruse.bg

**Assoc. Prof. Svetlozar Tsankov, PhD - Supervisor**

Department of Informatics and Information Technologies,  
University of Ruse "Angel Kanchev"  
Tel.: 0888 926 749  
E-mail: stsankov@uni-ruse.bg

***Abstract:** The document presents the significance of recursion and the "divide and conquer" method in teaching computer science to students. These concepts develop skills in creating algorithms and solving complex problems. Recursion is a fundamental concept that involves repetitive self-invocation of a function, while the "divide and conquer" method breaks down large problems into smaller subproblems. The educational approach based on these concepts provides long-term benefits by fostering abstract and logical thinking and preparing students to tackle challenges in computer science.*

***Keywords:** recursion, "divide and conquer" method, memoization, concepts, algorithms, education.*

### ВЪВЕДЕНИЕ

Разбирането и прилагането на рекурсия и метода "разделяй и владей" представлява изключително важен етап в обучението по информатика. Тези концепции предоставят на учащите мощни инструменти за анализ и решаване на сложни проблеми. Чрез систематично обучение в тези области, учениците развиват умения за създаване на алгоритми, като прилагат ефективни стратегии и техники, които се явяват неизмеримо полезни при решаването на проблеми, изискващи разделяне на проблема на по-малки подзадачи и използване на рекурсия. Това обучение не само спомага за развитието на техния абстрактен и логически мисловен процес, но и разширява уменията и възможности им в създаването на програмни решения на проблеми. Освен това, придобиването на опит в решаването на задачи с рекурсия и метода "разделяй и владей" подготвя учениците за по-сложни алгоритми и им осигурява здрава основа за оптимизиране на решенията. Образователният подход, базиран на тези концепции, има дългосрочен ефект, като ги предпазва от ограничаването само до повърхностни технически умения и ги поставя в по-изгодно положение за успешно справяне с предизвикателствата на съвременната компютърна наука.

### ИЗЛОЖЕНИЕ

#### Рекурсия и мемоизация

Рекурсията представлява основна концепция в областта на компютърните науки и е ключова техника за програмиране. Тя се основава на принципа на повтарящо се самоизвикване на функция (метод), който се използва при решаването на специфични проблеми. Рекурсията се състои от два основни принципа: базов случай и рекурсивен стъпков механизъм. Базовият случай, наричан още "дъно на рекурсията", служи за приключване на рекурсията. Стъпковият механизъм представлява условието, при което

---

<sup>14</sup> Докладът е представен на студентската научна сесия на 3 май 2023 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: РЕКУРСИЯ И МЕТОДЪТ "РАЗДЕЛЯЙ И ВЛАДЕЙ" КАТО ТЕХНИКИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО ИНФОРМАТИКА.

рекурсивната функция се самоизвиква с по-малки аргументи, приближавайки се към своя край с всяко последващо извикване.

Рекурсията е мощен инструмент за решаване на сложни задачи и откриване на елегантни решения. Тя допринася и за повишаване на четимостта на програмния код. Въпреки това, рекурсията може да прояви някои недостатъци, като по-голямо използване на памет и по-бавно изпълнение в определени ситуации. При рекурсивни функции с голяма дълбочина, т.е. много вложени самоизвиквания, може да възникнат проблеми с препълване на стека, което в свой ред може да доведе до логически грешки и забавяне изпълнението на програмата.

Важно е да се има предвид, че използването на рекурсия не е винаги най-подходящият подход за решаване на даден проблем. В някои случаи итеративните алгоритми могат да бъдат по-ефективни и ефикасни. Необходимо е да се отбележи също, че рекурсивна функция, оптимизирана с мемоизация, може да постигне по-добра ефективност от итеративна функция.

Мемоизацията е техника за оптимизиране на изпълнението на рекурсивни функции, чрез запазване и кеширане на резултатите от предишните им извиквания, които се съхраняват в паметта. Този подход позволява избягването на повтарящи се изчисления при последващи самоизвиквания на функцията със същите аргументи, като резултатът се извлича директно от кеша. Това съществено подобрява ефективността на рекурсивната функция, като се намалява броят на извикванията и времето за изпълнение.

### **Методът "разделяй и владей"**

Методът "разделяй и владей" е стратегия за решаване на проблеми, която включва разделянето на един голям проблем на множество по-малки подпроблеми, които се решават по-лесно поотделно и чието решаване позволява лесно конструиране на решение на изходния проблем. Прилагането на метода протича на три стъпки:

1. Извършва се разбиване на изходната задача на няколко подзадачи, т.е. „разделяй“.
2. Решава се всяка от подзадачите поотделно.
3. Въз основа на решенията на подзадачите, се конструира решение на изходната задача, т.е. „владей“.

Този алгоритмичен подход има множество предимства, включително ефективност, лесно поддържане и многократна употреба. Въпреки това, методът има и някои недостатъци, като необходимост от опит в избора на правилното място за разделяне на задачата на подзадачи и проблеми с паметта, особено при работа с големи данни.

### **Методика**

Предложеният сценарий на урок е предназначен за ученици от 9-ти или 10-ти клас, които изучават разширена подготовка информатика. Урокът има за цел да насочи учениците към прилагането на по-сложни техники и концепции в програмирането, чрез решаване на проблема с генерирането на редицата от Каталановите числа.

В рамките на урока, учениците използват различни техники като итерация, рекурсия, мемоизация и методът "разделяй и владей" за решаване на проблема. Така учащите развиват своите алгоритмични умения, логическо мислене и умения за програмиране чрез анализ на различните подходи. Етапите на предлагания урок, включват следните дейности:

- Въведение в проблема – учениците се запознават с целите на урока и проблема за генериране на редицата от Каталановите числа.
- Прилагане на итеративен и рекурсивен подход – учениците използват итеративни и рекурсивни техники за генериране на редицата и анализират различните подходи.
- Мемоизация на рекурсивното решение – учениците придобиват знания за мемоизацията и я прилагат върху рекурсивното решение за оптимизация.
- Използване на метода "разделяй и владей" – учениците прилагат метода "разделяй и владей", като разделят задачата на подзадачи и комбинират резултатите от тях.

- Мемоизация на решението, базирано на "разделяй и владей" – учениците прилагат мемоизация върху решението базирано на метода "разделяй и владей", за подобряване на ефективността.

Етапите предоставят систематична и структурирана методика за генериране на Каталанови числа чрез комбиниране на различни подходи и техники. Методиката помага на учениците да приложат теоретични концепции, да изградят логическо мислене и да развият уменията си в програмирането и анализа на алгоритми. Тя предоставя средства за решаване на сложни проблеми и разширяване на програмистките умения в програмирането. Използва се програмният език (C#) препоръчан от Министерството на образованието и науката на Република България.

### Сценарий на урок по информатика

Предполага се, че учениците вече са запознати с основните принципи на рекурсията, чрез различни задачи, спомагащи въвеждането на тази концепция в програмирането. Пред учащите е предизвикателството за усъвършенстване на умения им за решаване на по-сложни проблеми, същевременно и развитието на креативното им мислене.

Задача 1: Да се създаде функция (метод), която приема параметър цяло число N (индекс) и генерира редица от първите N числа на Каталан.

На учениците, първоначално трябва да бъде разяснено какво представляват числата на Каталан – безкрайна редица от цели числа, която започва с цифрата едно, а всяко следващо число се определя, посредством следната рекурентна зависимост:

$$C_n = C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + \dots + C_1C_{n-2} + C_0C_{n-1}.$$

Учениците трябва да бъдат насърчени да реализират рекурсивно решение на проблема, като спазват и прилагат основните принципи на рекурсията. Използвайки представения итеративен метод (фиг. 1) и рекурентната зависимост, от учащите се изисква да определят базовия случай (дъното на рекурсията) и стъпковия механизъм на рекурсивното решение. Това ще им позволи да усъвършенстват уменията си за проследяване на итеративни алгоритми, да разбират и прилагат рекурсия при реализацията на програмни решения на проблеми. При обучение на ученици, с по-добре развити умения за проектиране на рекурсивни функции, може да бъде възложена обратната задача, т.е. разполагайки с рекурсивния метод за генериране на първите N числата на Каталан (фиг. 2), да го трансформират в итеративен метод (фиг. 1). Това ще изисква от тях да приложат основни програмни конструкции и да вникнат в математическия запис, чрез който се образуват елементите в редицата. Учениците ще трябва да изчисляват математически изрази, използвайки програмен код, както и да приложат итерацията като техника, използвайки цикли за генериране на поредицата от Каталанови числа. Това ще доразвие уменията им в програмирането, също така и математическите им познания.

```
public static int GetCatalanNumber(int index)
{
    if (index < 0) return -1;
    var catalan = new int[index + 1];
    catalan[0] = 1;
    for (int i = 1; i <= index; i++) {
        catalan[i] = 0;
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            catalan[i] += catalan[j] * catalan[i - j - 1];
        }
    }
    return catalan[index];
}
```

Фигура 1.

```
public static int GetCatalanNumber(int index)
{
    if (index <= 1) return 1;
    int number = 0;
    for (int i = 0; i < index; i++)
    {
        number += GetCatalanNumber(i) *
            GetCatalanNumber(index - i - 1);
    }
    return number;
}
```

Фигура 2.

На учениците трябва да бъде зададено предизвикателството да сравнят двата метода за решаване на проблема, също така и да определят кой е по-ефективен. Първия метод (фиг. 1) е по-ефективен, тъй като използва итеративен алгоритъм и има линейна сложност, докато втория метод (фиг. 2) е по-малко ефективен, тъй като използва рекурсивен алгоритъм и има експоненциална сложност. Въпреки, че представените методи са правилни и връщат

коректни резултати, те могат да бъдат неефективни при големи стойности на входните данни (индекс) поради многократно повторение на едни и същи изчисления.

Важно е да се подчертае пред учащите, че прилагането на техниката на мемоизацията може значително да оптимизира рекурсивни функции. Мемоизацията намалява риска от препълване на стека, като запазва резултатите от вече извиканите рекурсивни функции в паметта, вместо да ги изчислява отново при последващи извиквания. От голяма важност е учениците да бъдат насочени към прилагане на мемоизация, върху реализираните от тях рекурсивни методи, за да постигнат оптимална ефективност. Очакваният резултат от прилагането на мемоизация върху рекурсивното решение е представен по-долу (фиг. 3).

```
public static int GetCatalanNumber(int index)
{
    if (index <= 1) return 1;
    var memo = new int[index + 1];
    memo[0] = 1;
    memo[1] = 1;
    return GetCatalanNumberMemo(index, memo);
}

private static int GetCatalanNumberMemo(int index, int[] memo)
{
    if (memo[index] != 0) return memo[index];
    int number = 0;
    for (int i = 0; i < index; i++) {
        number += GetCatalanNumberMemo(i, memo) *
            GetCatalanNumberMemo(index - i - 1, memo);
    }
    memo[index] = number;
    return number;
}
```

Фигура 3.

Методът "разделяй и владей" е често прилагана стратегия при решаване на проблеми, които могат да бъдат разделени на по-малки подзадачи, решени рекурсивно и след това обединени в един краен резултат. В обсъждания проблем, методът може да бъде приложен различно, в зависимост от подхода при разделянето на проблема. Авторът, предлага следния алгоритъм: 1) разделяне на целият интервал [0; N] на по-малки интервали; 2) обработване на подинтервалите с рекурсивна функция, която определя каталановото число за този интервал; 3) обединяване на всички върнати от 2) резултати, чрез запазването им в един масив.

На фигурата по-долу (фиг. 5), е представено едно примерно решение на задачата, основано на метода "разделяй и владей", същото решение с приложена мемоизация (фиг. 6).

```
public static int[] GetCatalanNumber(int index)
{
    if (index < 0) throw new ArgumentException("error");
    var catalan = new int[index + 1];
    for (int i = 0; i < index + 1; i++) {
        catalan[i] = -1;
    }
    catalan[0] = 1;
    for (int i = 1; i <= index; i++) {
        catalan[i] = CatalanRecursive(0, i);
    }
    return catalan;
}

private static int CatalanRecursive(int start, int end)
{
    if (start >= end) return 1;
    int result = 0;
    for (int i = start; i < end; i++) {
        result += CatalanRecursive(start, i) *
            CatalanRecursive(i + 1, end);
    }
    return result;
}
```

Фигура 5.

```
public static int[] GetCatalanNumber(int index)
{
    if (index < 0) throw new ArgumentException("error");
    var catalan = new int[index + 1];
    for (int i = 0; i < index + 1; i++) {
        catalan[i] = -1;
    }
    catalan[0] = 1;
    for (int i = 1; i <= index; i++) {
        catalan[i] = CatalanRecursive(0, i, catalan);
    }
    return catalan;
}

private static int CatalanRecursive(int start, int end, int[] catalan)
{
    if (start >= end) return 1;
    if (catalan[end - start] != -1) return catalan[end - start];
    int result = 0;
    for (int i = start; i < end; i++) {
        result += CatalanRecursive(start, i, catalan) *
            CatalanRecursive(i + 1, end, catalan);
    }
    catalan[end - start] = result;
    return result;
}
```

Фигура 6.

За самостоятелна работа по време на час или за домашна работа, на учениците може да бъде възложена програмната реализация на проблема (задача 1), като се допълни със

следните указания: да се използва друг подход за прилагане на метода "разделяй и владей" и при реализацията на решението да се използва следната рекурентна зависимост:

- $C(n) = (2n)! / ((n+1)! * n!).$

При индивидуалното решаване на зададената задача, учениците ще се фокусират по-специално върху уменията си за анализ на проблеми, решаване на подпроблеми и креативно мислене. От тях се изисква да разберат структурата на проблема и да бъдат способни да идентифицират различните подзадачи, което ще допринесе за развитието на техните алгоритмични умения чрез намиране на решения на проблема. В резултат, учениците ще бъдат в състояние да прилагат различни техники и методи за преодоляване на предизвикателствата, свързани с откриването на нови подходи за решаване на проблеми.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучаването на рекурсия и метода "разделяй и владей" е от изключително значение в обучението по информатика. Тези концепции предоставят мощни инструменти за решаване на сложни проблеми и създаване на ефективни алгоритми. Прилагането на рекурсия и "разделяй и владей" развива абстрактното и логическото мислене на учениците, подготвяйки ги за по-сложни предизвикателства в компютърната наука, включително и профилираното обучение.

Освен това, в обучението по разширена подготовка информатика е от съществено значение да се прилагат различни подходи за решаване на задачи. Това помага на учениците да развият умения за творческо мислене, анализ на проблеми и адаптация към нови ситуации. Взаимодействието с различни методи и стратегии им дава възможност да се справят по-ефективно с разнообразни предизвикателства и да намерят иновативни решения. Такова разнообразие от подходи е от особена важност в рамките на разширената подготовка по информатика, като предоставя на учениците допълнителни инструменти и умения, които са необходими за успешната им подготовка в тази област.

### ЛИТЕРАТУРА

Davis T., 2016. Catalan Numbers. <http://www.geometer.org/mathcircles/catalan.pdf>

Canapathi P., 2016. Automatic Discovery of Efficient Divide-&Conquer Algorithms for Dynamic Programming Problems <https://www3.cs.stonybrook.edu/~rezaul/papers/pganapathi-dissertation.pdf>

Manley M., Divide and Conquer Paradigm, ACM Transactions on Computational Logic, Vol. V, No. N, Month 20YY. <http://www.csun.edu/~mam78887/MAMANLEY.pdf>

Pak I., 2014. History of Catalan numbers. arXiv: History and Overview. <https://www.math.ucla.edu/~pak/papers/cathist4.pdf>

Sulov V. (2016) Iteration vs Recursion in Introduction to Programming Classes: An Empirical Study. Cybernetics and Information Technologies, Vol.16 (Issue 4), pp. 63-72. <https://doi.org/10.1515/cait-2016-0068>

Thomas H. Cormen T., Leiserson C., Rivest R., Stein C., (2022) Introduction to Algorithms, Fourth Edition. The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England

Наков П., Добриков П., 2015. Програмиране = ++ Алгоритми. (Nakov Preslav, Dobrikov Panayot, Programming = ++Algorithms. 2015)

Официален сайт на Министерството на образованието и науката, последно посетен на 28.04.2023 г. <https://web.mon.bg/bg/100598>

**UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV“**

**UNION OF SCIENTISTS - RUSE**



**63-RD ANNUAL SCIENTIFIC CONFERENCE  
OF UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV“  
AND UNION OF SCIENTISTS – RUSE**

**OCTOBER 2024**

**INVITATION**

**Ruse, 8 Studentska str.  
University of Ruse  
Bulgaria**



**PROCEEDINGS**  
**Volume 62, Series 6.5**

**Financial Mathematics**  
**&**  
**Informatics**

**Under the general editing of:**  
**Assoc. Prof. Svetlozar Tsankov, PhD**

**Editor of Volume 62:**  
**Prof. Diana Antonova, DSc**

**Bulgarian Nationality**  
**First Edition**

**Printing format: A5**  
**Number of copies: on-line**

**ISSN 1311-3321 (print)**  
**ISSN 2535-1028 (CD-ROM)**  
**ISSN 2603-4123 (on-line)**

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.  
The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access



**PUBLISHING HOUSE**  
**University of Ruse "Angel Kanchev"**