

ISSN 1311-3321 (print)
ISSN 2535-1028 (CD-ROM)
ISSN 2603-4123 (on-line)

UNIVERSITY OF RUSE “Angel Kanchev”
РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ “Ангел Кънчев”

BSc, MSc and PhD Students & Young Scientists
Студенти, докторанти и млади учени

PROCEEDINGS

Volume 65, book 6.7.
Financial Mathematics
&
Informatics

НАУЧНИ ТРУДОВЕ

Том 65, серия 6.7.
Финансова математика
&
Информатика

Ruse
Русе
2026

Volume 65 of PROCEEDINGS includes the papers presented at the scientific conference RU & SU'26, organized and conducted by University of Ruse "Angel Kanchev" and the Union of Scientists - Ruse. Series 6.7. contains papers reported in the Financial Mathematics and Informatics section.

Book	Code	Faculty and Section
Agrarian and Industrial Faculty		
1.1.	FRI-8.303b-1-AMT&ASVM	Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Science and Veterinary Medicine
	FRI-1.202-1-MR	Maintenance and Reliability
	FRI-9.2-1-THPE	Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment
	FRI-19.206-1-EC	Ecology and Conservation
	FRI-16.203-1-ID	Industrial Design
1.2.	THU-SSS-AMT&ASVM	Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Science and Veterinary Medicine
	THU-SSS-MR	Maintenance and Reliability
	THU-SSS-THPE	Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment
	THU-SSS-EC	Ecology and Conservation
	THU-SSS-ID	Industrial Design
Faculty of Mechanical and Manufacturing Engineering		
2.1.	FRI-1.317-1-MEMBT	Mechanical Engineering and Machine-Building Technologies
2.2.	TUE-1.417-SSS-MEMBT	Mechanical Engineering and Machine-Building Technologies
Faculty of Electrical Engineering Electronics and Automation		
3.1.	FRI-10.326-1-EEEE	Electrical Engineering, Electronics and Automation
3.2.	FRI-2G.303-1-CCT	Communication and Computer Technologies
3.3.	THU-10.326-SSS-EEEE	Electrical Engineering, Electronics and Automation
	THU-2G.303-SSS-CCT	Communication and Computer Technologies
Faculty of Transport		
4.1.	FRI-KC.H2-1-TMS	Transport and Machine Science
4.2.	FRI-20.21-2-SITSTL	Sustainable and Intelligent Transport Systems, Technologies and Logistics
4.3.	MON-5.21-SSS-TMS	Transport and Machine Science
Faculty of Business and Management		
5.1.	FRI-2B.412-1-EM	Economics and Management
5.3.	THU-2G.404-SSS-EM	Economics and Management
5.4.	FRI-2G.510-1-ESIS	European Studies and International Security
8.2.	FRI-1.322-1-SW	Social Work
Faculty of Natural Sciences and Education		
6.1.	FRI-1.414-MIP	Mathematics, Informatics and Physics
6.2.	FRI-2G.305-1-PP	Pedagogy and Psychology
6.3.	FRI-2G.309-1-LL	Linguistics and Literature
	FRI-12.23-1-AS	Art Studies
6.4.	FRI-2G.307-1-ERI	Education - Research and Innovations
6.5.	FRI-1.219-SSS-PP	Pedagogy and Psychology
6.6.	FRI-2G.405-SSS-LLA	Linguistics, Literature and Art Science & History, Ethnology and Folklore
6.7.	FRI-2.203-SSS-FM	Financial Mathematics
	FRI-1.407.1-SSS-I	Informatics

Faculty of Law		
7.1.	FRI-2B.313-1-L	Law Studies
7.2.	FRI-2B.312-1-NS	National Security
7.3.	WED-2B313-SSS-L	Law Studies
Faculty of Public Health and Health Care		
8.1.	FRI-2K.201-1-HP	Health Promotion
8.3.	FRI-2G.104-1-HC	Health Care
8.4.	FRI-2G.309-1-MCDA	Medical and Clinical Diagnostic Activities
8.5.	THU-K.101-SSS-HP	Health Promotion
	SAT-SSS-SMHPA	Sports Medicine and Health Prevention of the Athlete
8.6.	FRI-2.101-SSS-HC	Health Care
8.7.	THU-2Г.105-SSS-MCDA	Medical and Clinical Diagnostic Activities
Quality of Education Directorate		
9.1.	FRI-2.104-1-QHE	Quality of Higher Education
Razgrad Branch of the University of Ruse		
10.1.	FRI-LCR-1-CT(R)	Chemical Technologies
10.2.	FRI-LCR-1-BFT(R)	Biotechnologies and Food Technologies
10.3.	TUE-SSS-BFT(R)	Biotechnologies and Food Technologies
	TUE-SSS-CT(R)	Chemical Technologies
Silistra Branch of the University of Ruse		
11.1.	FRI-110-1-MT(S)	Methodology of Training in...
	FRI-229-1-P(S)	Philology
	FRI-216-1-TS(S)	Technical Sciences
11.2.	FRI-239-I-PMT(S)	Methodology of Training in...
	FRI-229-I-H(S)	Humanities
	FRI-216-I-TS(S)	Technical Sciences
Taraclia Branch (Moldova) of the University of Ruse		
12.1	FRI-22-1-BCHH(T)	Bulgarian Cultural and Historical Heritage
	FRI-7-1-IR(T)	Interdisciplinary Research
	FRI-8-1-MC(T)	Modern Challenges
12.2	MON-SSS-BCHH(T)	Bulgarian Cultural and Historical Heritage
	MON-SSS-IR(T)	Interdisciplinary Research
	MON-SSS-MC(T)	Modern Challenges

The papers have been reviewed.

ISSN 1311-3321 (print)

ISSN 2535-1028 (CD-ROM)

ISSN 2603-4123 (on-line) Copyright © authors

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.
The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access



PROGRAMME COMMITTEE

- **Prof. Amar Ramdane-Cherif**
University of Versailles, France
- **Assoc. Prof. Manolo Dulva HINA**
ECE Paris School of Engineering, France
- **Prof. Leon Rothkrantz**
Delft University of Technology, Netherlands
- **Assoc. Prof. Antonio Jose Mendes**
University of Coimbra, Portugal
- **Prof. Ville Leppanen**
University of Turku, Finland
- **Assoc. Prof. Marco Porta**
University of Pavia, Italy
- **Prof. Douglas Harms**
DePauw University, USA
- **Prof. Zhanat Nurbekova**
L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur Sultan, Kazakhstan
- **Prof. Mirlan Chynybaev**
Kyrgyz State Technical University, Bishkek, Kyrgyzstan
- **Prof. Ismo Hakala, PhD**
University of Jyväskylä, Finland
- **Prof. Artur Jutman, PhD**
Tallinn University of Technology, Estonia
- **Prof. RNDr. Vladimir Tvarozek, PhD**
Slovak University of Technology in Bratislava, Slovakia
- **Doc. Ing. Zuzana Palkova, PhD**
Slovak University of Agriculture in Nitra, Slovakia
- **Andrzej Tutaj, PhD**
AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland
- **Prof. Valentin NEDEFF Dr. eng. Dr.h.c.**
“Vasile Alecsandri” University of Bacău, Romania
- **Cătălin POPA, PhD**
“Mircea cel Bătrân” Naval Academy, Constantza, Romania
- **Prof. dr Larisa Jovanović**
Alfa University, Belgrade, Serbia
- **Prof. dr hab. Edmund LORENCOWICZ**
University of Life Sciences in Lublin, Poland
- **Assoc. Prof. Ion MIERLUS - MAZILU, PhD**
Technical University of Civil Engineering, Bucharest, Romania
- **Prof. Dojčil Vojvodić PhD**
Faculty of Philosophy, University of Novi Sad, Serbia
- **Assoc. Prof. Alexandrache Carmen, PhD**
Department of Teacher Training, “Dunarea de Jos”, Galati University, Romania
- **Prof. Alberto Cabada**
University of Santiago de Compostela, Faculty of Mathematics, Spain

- **Kamen Rikey, PhD**
Institute of Slavic Philology, Maria Curie-Skłodowska University in Lublin, Poland
- **Anna Klimentova, PhD**
Constantine the Philosopher University of Nitra, Slovakia
- **Prof. Ricardo Gobato, PhD**
Secretariat of State of Parana Education and Sport, Laboratory of Biophysics and Molecular Modeling Genesis, Brazil
- **Prof. Fatima Rahim Abdul Hussein, PhD**
University of Misan, College of Basic Education, Iraq
- **Prof. Liqaa Habeb Al-esedi, PhD**
English Department, College of Education for Human Science, University of Diyala, Iraq
- **Prof. Esengeldin Baurzhan Satybaldyuly, PhD**
Pavlodar Pedagogical University “Alkey Margulan”, Kazakhstan
- **Prof. Igor Kevorkovich Danilov, DSc**
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia
- **Prof. Aleksander Valentinov Sladkowski, DSc**
Silesian University of Technology, Poland
- **Prof. Vera Karadjova, PhD**
“St. Kliment Ohridski” University – Bitola, North Macedonia
- **Prof. Aleksandar Trajkov, PhD**
“St. Kliment Ohridski” University - Bitola, North Macedonia
- **Prof. Petar Pepur, PhD**
University of Split, Croatia
- **Prof. Korhan Arun, PhD**
Namik Kemal University, Tekirdağ, Turkey
- **Prof. Yuliya Yorgova, PhD**
Burgas Free University, Bulgaria
- **Jelena Stankovic, PhD**
University of Nis, Serbia
- **Prof. Dr. Diana E. Woolfolk Ruiz**
CETYS University, Mexico
- **Prof. Gerhard Fiolka, PhD**
University of Fribourg, Switzerland
- **Prof. Haluk Kabaalioglu, PhD**
Yeditepe University, Turkey
- **Prof. Silva Alves, PhD**
University of Lisbon, Portugal
- **Prof. Elena Torina**
Tula State Pedagogical University "L. N. Tolstoy", Russia
- **Prof. Violeta Jotova**
St. Marina University Hospital - Varna, Bulgaria
- **Prof. Tanya Timeva, MD, PhD**
Obstetrics and Gynecology Hospital "Dr. Shterev", Sofia, Bulgaria
- **Prof. Kiril Stoychev, PhD**
Institute of Metal Science, BAS, Bulgaria
- **Assoc. Prof. Mark Shamtsyan, PhD**
Technical University, Saint Petersburg, Russia

- **Assoc. Prof. Oleksii Gubenia, PhD**
National University of Food Technology, Ukraine
- **Prof. Eugene Stefanski, DSc**
Samara University, Russia
- **Assoc. Prof. Ivan Antonov Lukanov, PhD**
University of Botswana
- **Prof. Gabriel Negreanu, PhD**
University Politehnica of Bucharest, Romania
- **Prof. Radosław Wrobel, DSc**
Wrocław University of Science and Technology, Poland
- **Assoc. Prof. Darina Dimitrova PhD**
University of Economics - Varna

ORGANISING COMMITTEE

◆ ORGANIZED BY: UNIVERSITY OF RUSE (UR) AND UNION OF SCIENTISTS (US) - RUSE

◆ ORGANISING COMMITTEE:

▪ Chairperson:

Prof. Desislava Atanasova, PhD – Rector of University of Ruse

Acad. DTSc. Hristo Beloev, DHC mult., Academician of Bulgarian Academy of Sciences –
Chairperson of US - Ruse

▪ Scientific Secretary:

Prof. Daniel Bratanov, PhD

dmbatanov@uni-ruse.bg, +359 82 888-377

▪ THEMATIC FIELDS:

- **Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Sciences and Veterinary Medicine**
Assoc. Prof. Atanas Atanasov, PhD, aatanasov@uni-ruse.bg, +359 885 497 406
- **Maintenance and Reliability**
Prof. Mitko Nikolov, DcS, mnikolov@uni-ruse.bg, +359 82 888 458
- **Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment**
Prof. Gencho Popov, PhD, gspopov@uni-ruse.bg, +359 82 888 441
- **Ecology and Conservation**
Assoc. Prof. Plamen Manev, PhD, pmanev@uni-ruse.bg, +359 82 888 485
- **Industrial Design**
Assoc. Prof. Yordan Doichinov, PhD, doichinov@uni-ruse.bg, +359 887 273 040
- **Pedagogy, Didactics and Methodology of training in... (18.10., Silistra)**
Assoc. Prof. Diana Zhelezova-Mindizova, PhD, dmindizova@uni-ruse.bg,
- **Philology (18.10., Silistra)**
Assoc. Prof. Rumyana Lebedova, PhD, rlebedova@uni-ruse.bg,
- **Technical Sciences (18.10., Silistra)**
Assoc. Prof. Evgenia Goranova, PhD, egoranova@uni-ruse.bg,
Assoc. Prof. Galina (Lina) Lecheva, PhD, glecheva@uni-ruse.bg, +359 88 540 0647
- **Chemical Technologies (07-07.11., Razgrad)**
Prof. Tsvetan Dimitrov, PhD, conf_rz@abv.bg, +359 887 631 645
- **Biotechnologies and Food Technologies (08-09.11., Razgrad)**
Prof. Tzvetan Dimitrov, PhD, conf_rz@abv.bg, +359 887 631 645
- **Mechanical Engineering and Machine-building Technologies**
Prof. Rosen Radev, PhD, rradev@uni-ruse.bg, +359 82 888 778
- **Electrical Engineering, Electronics and Automation**
Prof. Boris Evstatiev, DSc, bevstatiev@uni-ruse.bg, +359 82 888 371
Assoc. Prof. Kiril Sirakov, PhD, csirakov@uni-ruse.bg, +359 82 888 364
- **Communication and Computer Technologies**
Assoc. Prof. Yordan Kalmukov, PhD, jkalmukov@uni-ruse.bg, +359 82 888 681
Assoc. Prof. Adriana Borodzhieva, PhD, aborodzhieva@uni-ruse.bg, +359 82 888 734
- **Transport and Machine Science**
Assoc. Prof. Toncho Balbuzanov, PhD, tbalbuzanov@uni-ruse.bg, +359 82 888 608

- **Sustainable and Intelligent Transport Systems, Technologies and Logistics**
Assoc. Prof. Toncho Balbuzanov, PhD, tbalbuzanov@uni-ruse.bg, +359 82 888 608
- **Economics and Management**
Pr. Assist. Miroslava Boneva, PhD, mboneva@uni-ruse.bg, +359 82 888 776
Pr. Assist. Elizar Stanev, PhD, eastanev@uni-ruse.bg, +359 82 888 557
- **European studies and International Security**
Prof. Vladimir Chukov, DSc, vlachu1@gmail.com, +359 82 825 667
Pr. Assist. Eva Parvanova, PhD, eparvanova@uni-ruse.bg, +359 82 888 703
- **Mathematics, Informatics and Physics**
Prof. Tsvetomir Vasilev, PhD, tvasilev@uni-ruse.bg, +359 82 888 475
- **Education - Research and Innovations**
Pr. Assist. Ralitsa Vasileva-Ivanova, PhD, rivanova@uni-ruse.bg, +359 884 109 719
- **Pedagogy and Psychology**
Assoc. Prof. Valentina Vasileva, PhD, vvasileva@uni-ruse.bg, +359 898 407 577
Assoc. Prof. Galina Georgieva, PhD, gggeorgieva@uni-ruse.bg, +359 889 951 920
- **History, Ethnology and Folklore**
Assist. Veselka Radeva, PhD, vradeva@uni-ruse.bg, +359 899 776 368
- **Linguistics, Literature and Art Science**
Assoc. Prof. Velislava Doneva, PhD, doneva_v@uni-ruse.bg, +359 886 060 299
- **Health Promotion**
Assoc. Prof. Stefka Mindova, PhD, smindova@uni-ruse.bg, +359 887 796 910
Assoc. Prof. Irina Karaganova, PhD, ikaraganova@uni-ruse.bg, +359 884 203 004
- **Social Work**
Pr. Assist. Ana Popova, PhD, apopova@uni-ruse.bg, +359 889 874 219
- **Medical and Clinical Diagnostic Activities**
Pr. Assist. Denitsa Trancheva, PhD, dtrancheva@uni-ruse.bg, +359 82 888 410
- **Health care**
Assoc. Prof. Tsveta Hristova, PhD, tshristova@uni-ruse.bg, +359 878 389 793
- **Law**
Assoc. Prof. Elitsa Kumanova, PhD, ekumanova@uni-ruse.bg, +359 884 980 050
- **National Security**
Assoc. Prof. Milen Ivanov, DSc, poligon@abv.bg, +359 82 888 736
- **Quality of Higher Education**
Prof. Ivanichka Serbezova, PhD, iserbezova@uni-ruse.bg,
Daniela Todorova, dtodorova@uni-ruse.bg, +359 82 888 378
- **Bulgarian Cultural and Historical Heritage (Taraclia)**
Pr. Assist. Prof. Nadezhda Gaidarzhi, PhD, ngaydarzhi@uni-ruse.bg, +37369731504
Assist. Prof. Nikolay Mostovoy, nmostovoy@uni-ruse.bg, +37379022215
Assist. Prof. Inna Garanovskaya, igaranovskaya@uni-ruse.bg, +37376739747
- **Interdisciplinary Research (Taraclia)**
Assos. Prof. Valentina Nevzorova, PhD, vnevzorova@uni-ruse.bg, +37379755958
Assos.Prof. Veronika Veliksar, PhD, vveliksar@uni-ruse.bg, +37378045900
Assist. Prof. Vitaly Terzi, vterzi@uni-ruse.bg, +37378525675
- **Modern Challenges (Taraclia)**
Pr. Assist. Prof. Maria Kolar, PhD, mkolar@uni-ruse.bg, +37379884367
Assos. Prof. Vitaly Todorov, PhD, vntodorov@uni-ruse.bg, +37379349335
Assist. Prof. Fedora Terzi, fterzi@uni-ruse.bg, +3739852723

▪ **REVIEWERS:**

FINANCIAL MATHEMATICS

- Prof. Angela Slavova, DSc
- Assoc. Prof. Iliya Brayanov, PhD
- Assoc. Prof. Evelina Veleva, PhD

INFORMATICS

- Prof. Valentina Voinohovska, DSc
- Assoc. Prof. Desislava Baeva, PhD

Financial Mathematics

Content

1. FRI-2.203-SSS-FM-01	12
Bulgarian Insurance Company Classification According to the Policy Premiums	
<i>Alexandra Papazova, Elitsa Raeva</i>	
2. FRI-2.203-SSS-FM-02	21
Claude and Application of Large Language Models in Scientific Research and Mathematical Modeling	
<i>Nikita Nikitov, Ivan Georgiev</i>	
3. FRI-2.203-SSS-FM-03	29
Comparison of Different Economic Sectors using a Capital Asset Pricing Model	
<i>Simona Ivanova, Elitsa Raeva</i>	
4. FRI-2.203-SSS-FM-04	37
Labour Efficiency by Sectors in Bulgaria	
<i>Kaloyan Sabev, Vesela Mihova</i>	
5. FRI-2.203-SSS-FM-05	38
A Study of the Relationship between Production Resource Prices and Agricultural Costs in Bulgaria	
<i>Melisa Emin, Vesela Mihova</i>	
6. FRI-2.203-SSS-FM-06	44
Statistical Analysis and Trend investigation of Drinking Water Consumption in Bulgaria	
<i>Monika Simeonova, Vesela Mihova</i>	
7. FRI-2.203-SSS-FM-07	49
Comparison between Efficiency of Forecasting Using Arima Models and Artificial Intelligence	
<i>Tsvetomira Dimitrova, Elitsa Raeva</i>	

Informatics

Content

1. FRI-1.407.1-SSS-I-01	58
HEXAGONAL SOFTWARE ARCHITECTURE IN AUTHORITATIVE SERVER GAMES	
<i>Hristo Hristov, Galina Atanasova</i>	
2. FRI-1.407.1-SSS-I-02	64
Design of a Multimodal Mixed Reality System Integrating Mrtk and Multimodal Language Models for Context-Aware Interaction	
<i>Teodora Daskalova, Boyana Ivanova</i>	
3. FRI-1.407.1-SSS-I-03	70
Adaptive Strategy Learning in Multi-Agent Imperfect-Information Games: From Equilibrium Computation to Safe Opponent Exploitation	
<i>Alexander Andreev, Tzvetomir Vassilev</i>	
4. FRI-1.407.1-SSS-I-04	75
Evento Puls: An Intelligent Event Discovery Platform with Natural Language Search and Automated Content Generation	
<i>Velislav Haygarov, Aykan Nedzhibov, Nikolay Todorov, Teodora Daskalova</i>	
5. FRI-1.407.1-SSS-I-05	77
Development and Implementation of the 2d Game “Pixel Courier”, Written in C++ and SFML (Simple and Fast Multimedia Library)	
<i>Nikolay Todorov, Vasil Kozov</i>	

FRI-2.203-SSS-FM-01

BULGARIAN INSURANCE COMPANY CLASSIFICATION ACCORDING TO THE POLICY PREMIUMS¹

Alexandra Papazova

Financial Mathematics Student,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: alex.papazova2003@gmail.com

Chief Assist. Prof. Elitsa Raeva, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

Abstract: *This paper develops a probabilistic framework for classifying insurance companies operating on the Bulgarian market by transforming reported premium income into estimates of issued policies and applying Bayes' formula to analyze customer preferences across insurance products. The approach enables comparison of companies based on estimated policy distribution and provides insights into market structure and customer behaviour. The obtained results can support both insurers and clients in evaluating market positions and making informed decisions when selecting insurance providers.*

Key words: *Bayes' formula, insurance classification, premium income, policy distribution, customer preferences.*

ВЪВЕДЕНИЕ

През последните десетилетия застрахователният сектор се развива динамично, като това развитие е съпроводено с нарастваща конкуренция между компаниите. Разширяването на продуктовите портфейли и въвеждането на нови застрахователни продукти се превръщат в ключов елемент от стратегиите за растеж на застрахователните дружества. Също толкова важно е задържането на съществуващите клиенти и поддържането на дългосрочно доверие.

В такава конкурентна среда застрахователните компании трябва да оценяват не само представянето на своите продукти, но и позицията си на пазара спрямо останалите участници. Анализът на премиения приход и поведението на клиентите е съществен за по-точното сегментиране на пазара и за подпомагане на стратегическите решения.

Настоящото изследване представя метод за класифициране на застрахователните компании въз основа на клиентските предпочитания към определени застрахователни продукти. Предложената методология използва формулата на Бейс, като предоставя гъвкав и математически обоснован инструмент, който не изисква налагането на строги ограничения върху данните. Анализът е проведен за две последователни години – 2023 и 2024, което позволява не само да се опише състоянието на пазара, но и да се проследи тенденция в клиентските предпочитания към отделните застрахователни компании.

ПОСТАНОВКА НА МОДЕЛА С ФОРМУЛА НА БЕЙС

В настоящото изследване се разработва модел за класифициране на застрахователните компании, опериращи на българския пазар, въз основа на поведението на клиентите спрямо два основни застрахователни продукта, а именно задължителната застраховка „Гражданска отговорност“ и имуществена застраховка.

За построяване на вероятностния модел се използва формулата на Бейс [1] в следния вид:

¹ Докладът е представен на студентската научна сесия на 21.05.2026 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: КЛАСИФИЦИРАНЕ НА БЪЛГАРСКИ ЗАСТРАХОВАТЕЛНИ КОМПАНИИ СПОРЕД ЗАСТРАХОВАТЕЛНИТЕ ПРЕМИИ.

$$P(X = K_i | Y = j) = \frac{P(Y = j | X = K_i) \cdot P(X = K_i)}{P(Y = j)}. \quad (1)$$

Където $P(X = K_i)$ е вероятността клиент да избере компания K_i ; $P(Y = j)$ е общата вероятност да се наблюдават j нови полици, независимо от компанията; $P(Y = j | X = K_i)$ е вероятността да се наблюдават j нови полици при условие, че е избрана компания K_i ; $P(X = K_i | Y = j)$ е вероятността клиентът да избере компания K_i , при условие че се наблюдават j нови полици.

Формула (1) представлява основата на използвания модел, чрез който се извежда вероятностна класификация на застрахователните компании въз основа на клиентските предпочитания при избора на застраховка „Гражданска отговорност“ и имуществена застраховка.

ДАННИ И МЕТОДИКА НА ИЗСЛЕДВАНЕТО

За целите на изследването се използват официални данни, предоставени от Комисията за финансов надзор, за brutния премиен приход на 13 застрахователни компании, опериращи на българския пазар, сред които Allianz България, DZI – Застрахователно дружество, Лев Инс, Булстрад Виена Иншурънс Груп и други. Анализът обхваща премиения приход по застраховки „Гражданска отговорност“ и имуществена застраховка, както и общия brutен премиен приход на всяка компания към края на 2023 и 2024 година [2].

За прилагане на формула (1) е необходимо да бъде известен броят на издадените застрахователни полици, тъй като именно той участва в изчисляването на вероятността $P(X = K_i)$, която в модела представя относителния дял на съответната компания. В наличните официални данни обаче броят на полиците не се публикува директно, поради което той следва да бъде оценен косвено чрез информацията за brutния премиен приход.

В конкретния случай оценката се основава на средната цена на една полица. Ако е известен brutният премиен приход на дадена компания по застраховки „Гражданска отговорност“ и имуществена застраховка, и се оцени средната цена на една полица, то приблизителният брой сключени полици може да бъде изчислен чрез съотношението между следните величини:

$$\text{Среден брой полици на компания } K_i \text{ (СБП}_i\text{)} = \frac{\text{Брутна премия на компания } K_i \text{ (БП}_i\text{)}}{\text{Средна цена на една полица (СЦ}_i\text{)}}. \quad (2)$$

Общият приблизителен брой полици за всички компании се получава чрез:

$$\text{Общ брой полици (ОП)} = \sum_{i=1}^{13} \text{СБП}_i. \quad (3)$$

Следователно вероятността дадена полица да принадлежи на компания K_i се определя като:

$$P(X = K_i) = \frac{\text{СБП}_i}{\text{ОП}}. \quad (4)$$

Вероятността по формула (4) може да се интерпретира като относителен дял на компанията в модела или като приближена мярка за клиентско предпочитание към нея по отношение на двата разглеждани вида застраховки.

В конкретния случай оценката на броя полици се извършва чрез приближен модел, основан на средната цена на продукта. Логиката е следната: ако е известен brutният премиен приход на дадена компания по съответния вид застраховка и се оцени средната цена на една полица, то приблизителният брой полици може да бъде изчислен чрез отношението между тези две величини. Именно по този начин в изследването се достига до оценка за броя сключени полици, която след това се използва в вероятностния модел. Този подход е приближен, тъй като в реалната практика застрахователната премия зависи от редица индивидуални характеристики и не е еднаква за всички клиенти, но е напълно подходящ за конструиране на сравнителен математически модел.

Разгледани са следните данни, предоставени от Комисията за финансов надзор (КФН) за 13-те застрахователни компании за 2023 и 2024 година:

Таблица 1. Брутен премиен приход по „Гражданска отговорност“ и „Имуществена застраховка“, 2023 г. и 2024 г.

Застрахователна компания K_i	БП _i - „ГО“ (в млн. BGN)		БП _i - „Им.3-ка“ (в млн. BGN)		ОБП _i за компания K_i (в млн. BGN)	
	2023	2024	2023	2024	2023	2024
1. Allianz България	6.3	7.5	32.8	35.3	202.1	223.8
2. DZI – Застрахователно дружество	5.4	4	56.7	59.6	354.3	405.5
3. Generali България	3.6	4.3	35.5	37.6	222.9	258.5
4. Unika България	4.3	4.9	53.7	54.9	102.1	105.8
5. Булстрад Виена Иншурънс Груп	6.4	7.6	75.4	82.8	382.9	427.7
6. Лев Инс	20.9	11.7	43.7	17.2	500.9	402.4
7. Евроинс	6.4	6.4	19.2	19.2	441.9	436.7
8. Армеец	2.5	1.8	21.2	22.9	279.6	326.9
9. Групама Застраховане	0.6	0.8	16.7	21.8	68	108.1
10. ОЗК Застраховане	4.4	4.6	43.5	45.5	225.5	221.1
11. ДаллБогг: Живот и Здраве	1.2	1.4	0.9	1.1	324.3	527.1
12. България Иншурънс	0.1	0.2	3.5	4	20.4	25.9
13. Бул Инс	1.2	1.4	2.6	3	205.7	229.2

^aИзточник: КФН, 2023 - 2024.

За определяне на средния брой сключени полици от формула (1) на всяка компания е необходимо да бъде определено съотношението между брутната премия и цена на продукт на отделните компании. За тази цел биват използвани данните, предоставени в таблица 1, като е необходимо да бъде изчислено приближено средно на годишната премия за двата вида застраховки.

ЗАСТРАХОВКА „ГРАЖДАНСКА ОТГОВОРНОСТ“

В общия случай ценообразуването при застрахователния продукт зависи от множество фактори. При застраховка „Гражданска отговорност“ това са възраст на клиента, шофьорски стаж, характеристики на превозното средство и други рискови параметри, а при имуществената застраховка - стойността на имота, неговото предназначение, местоположението, степен на риск (например пожар, наводнение, кражба) и обхватът на застрахователното покритие. Това прави крайната премия силно индивидуализирана и води до липса на публично достъпни точни стойности за средните цени.

За оценка на средната годишна премия за застраховка „Гражданска отговорност“, предлагана например от компания ДЗИ, е използван онлайн калкулатор [3]. При определяне на примерните стойности се приема, че среднестатистическият български водач управлява автомобил, произведен средно около 2010 г., с мощност под 100 конски сили и умерен обем на двигателя 1600 см³, като опитът на водача също е съществен фактор при формиране на цената. За целта са проведени три примерни симулации с различни профили на водачи:

- водач на 20 години с 1 година шофьорски опит – 608.43 лв;
- водач на 35 години с 8 години шофьорски опит – 271.38 лв;
- водач на 55 години с над 10 години шофьорски опит – 270.22 лв.

На база на получените резултати от тези симулации се изчислява средна стойност на годишната премия за съответния застрахователен продукт:

$$\frac{(608.43 + 271.38 + 270.22)}{3} = 383.34 \text{ лв} \approx 383 \text{ лв.}$$

Тази стойност е използвана като ценова оценка за ДЗИ в анализа за 2023 г. Аналогичен подход е приложен и за останалите компании, като за всяка от тях е използвана съответна приблизителна средна цена.

С оглед на това, че използваните цени в модела са оценъчни и служат за построяване на сравнителен вероятностен модел, за 2024 г. ценовите оценки могат да бъдат определени чрез индексирание на цените от 2023 г. с официалния инфлационен темп. По този начин се запазва една и съща методологична основа и се осигурява съпоставимост между двете години. Ако се приеме годишна инфлация от r процента, тогава ценовата оценка за 2024 г. се получава чрез:

$$C\Pi_{i,2024} = C\Pi_{i,2023} \cdot (1 + r) . \quad (5)$$

Например за цена 383.34 лв. при инфлационен темп $r = 2.2\%$ и прилагане на формула (5) се получава: $383.34 \cdot 1.022 = 391.77$ лв [4]. Така за 2024 г. се получават индексирани ценови оценки, които се използват по формула (2) за изчисляване на приблизителния брой полици. Резултатите биват представени в таблица 2.

За оценяване на вероятността $P(Y = j \mid X = K_i)$, която описва вероятността при избрана компания да се наблюдават j нови полици или клиенти, се извършва проверка за съответствие на данните с различни вероятностни разпределения.

Проверката е приложена върху получените стойности за среден брой сключени полици за застраховка „Гражданска отговорност“ за 2023 година за всяка компания, тъй като именно тези данни отразяват разпределението на клиентската активност между застрахователните компании и служат като основа за моделиране на вероятността за наблюдение на нови полици. Проверката се реализира чрез теста на Колмогоров–Смирнов, използвайки софтуера SPSS, при стандартно за актюерските анализи, ниво на значимост $\alpha = 0.05$ [5]. Резултатите от теста показват, че за част от разглежданите разпределения стойността на *Asymp. Sig. (2-tailed)* е по-голяма от зададеното ниво на значимост. Сред тях най-добро съответствие с данните показва експоненциалното разпределение, поради което то се избира като основа за моделиране. Аналогичен резултат е получен и за данните за 2024 година. Следователно се приема, че вероятността може да бъде описана чрез формула (6):

$$P(Y = j \mid X = K_i) = 1 - e^{-\lambda_i} , \quad \text{където } \lambda_i = \frac{\text{БП}_i}{\text{ОБП}_i} \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, 13; \quad j = 1, 2, \dots, 20 .$$

След определяне на всички необходими вероятности се прилага формула (1), чрез която се изчислява $P(X = K_i \mid Y = j)$, която представлява вероятността дадена компания да бъде избрана при наблюдение на j нови полици или клиенти. Получените резултати биват представени в таблица 3.

Таблица 2. Изчисления - застраховка „Гражданска отговорност“, 2023 г. и 2024 г.

K_i	$Ц_i$ (BGN)		$СБП_i = \frac{БП_i}{Ц_i}$		$P(X = K_i) = \frac{СБП_i}{ОП}$		Дял на застраховката в компанията = $\frac{БП_i}{ОБП_i} \rightarrow \lambda_i$	
	2023	2024	2023	2024	2023	2024	2023	2024
1. Allianz България	350	358	17982	20861	0.092	0.126	0.031	0.033
2. DZI – ЗД	383	392	14181	10214	0.073	0.062	0.015	0.01
3. Generali България	341	349	10678	12399	0.055	0.075	0.016	0.017
4. Unika България	253	258	17103	18812	0.088	0.114	0.042	0.046
5. Булстрад Виена Иншурънс Груп	471	482	13610	15671	0.07	0.095	0.017	0.018
6. Лев Инс	288	294	72747	39771	0.374	0.24	0.042	0.029
7. Евроинс	379	387	17003	16519	0.087	0.1	0.015	0.015
8. Армеец	334	341	7453	5357	0.038	0.032	0.009	0.006
9. Групама Застраховане	601	614	1017	1352	0.005	0.008	0.009	0.008
10. ОЗК Застраховане	303	309	14508	14969	0.074	0.09	0.019	0.021
11. ДаллБогг: Живот и Здраве	324	331	3800	4106	0.02	0.025	0.004	0.003
12. България Иншурънс	250	256	431	885	0.002	0.005	0.005	0.009
13. Бул Инс	293	299	4257	4544	0.022	0.027	0.006	0.006
ОБЩО			194771 (ОП)	165462 (ОП)	1	1	0.231	0.219

Таблица 3. Класификация на застрахователните компании на българския пазар въз основа на клиентското поведение – вероятности за определен брой нови полици при застраховка „Гражданска отговорност“
 $P(X = K_i | Y = j)$

$Y = j$	K1		K2		K3			K13	
	2023	2024	2023	2024	2023	2024		2023	2024
1	0.021	0.042	0.037	0.037	0.021	0.054		0.004	0.008
2	0.027	0.047	0.046	0.041	0.027	0.058		0.005	0.009
3	0.034	0.053	0.055	0.044	0.033	0.063		0.006	0.010

18	0.140	0.166	0.122	0.090	0.096	0.105		0.028	0.033
19	0.145	0.175	0.121	0.092	0.097	0.106		0.029	0.035
20	0.150	0.183	0.120	0.094	0.098	0.106		0.030	0.037

ИМУЩЕСТВЕНА ЗАСТРАХОВКА

По аналогичен начин се пристъпва към оценка на средната годишна премия при имуществена застраховка. За целта е разгледан конкретен пример с компания Allianz България, като при изчисленията са използвани фиксирани параметри на имота с цел осигуряване на съпоставимост между резултатите [6].

Приет е жилищен имот (апартамент) с площ 65 m², стойност на недвижимото имущество 100 000 лв. и стойност на движимото имущество 20 000 лв., като са включени стандартни рискове в застрахователното покритие. Средната годишна премия е определена въз основа на предлаганите от застрахователя пакети COMFORT, EXTRA и MAX, разгледани при три различни рискови зони – ниска, средна и висока. За всяка от зоните е изчислена средна стойност на премията, получена като средноаритметична от стойностите на трите пакета. Получените стойности са съответно: 210,16 лв. за нискорискова зона, 262,37 лв. за среднорискова зона и 282,27 лв. за високорискова зона.

На база на тези резултати е изчислена обща средна годишна премия за имуществена застраховка при застрахователна компания Allianz България:

$$\frac{(210.16 + 262.37 + 282.27)}{3} = 251.60 \text{ лв} \approx 252 \text{ лв.}$$

Получената стойност се използва като ценова оценка в рамките на модела и участва в последващото определяне на вероятностните характеристики. Средните цени на премиите за 2024 г. са изчислени аналогично, като в рамките на изследването е използван отчетеният инфлационен темп $r = 2.2\%$ като ориентировъчен показател, поради липсата на официални данни.

Таблица 4. Изчисления – имуществена застраховка, 2023 г. и 2024 г.

K_i	СЦ _i (BGN)		СБП _i = $\frac{БП_i}{СЦ_i}$		$P(X = K_i)$ = $\frac{СБП_i}{ОП}$		Дял на застраховката в компанията = $\frac{БП_i}{ОБП_i} \rightarrow \lambda_i$	
	2023	2024	2023	2024	2023	2024	2023	2024
1. Allianz България	252	257	130370	137238	0.051	0.055	0.162	0.158
2. DZI – Застрахователно дружество	137	140	413173	425346	0.162	0.171	0.160	0.147
3. Generali България	174	178	204214	211756	0.080	0.085	0.159	0.145
4. Unika България	172	176	311269	311503	0.122	0.125	0.526	0.518
5. Булстрад Виена Иншурънс Груп	165	168	457672	491938	0.179	0.198	0.197	0.194
6. Лев Инс	150	153	291172	112470	0.114	0.045	0.087	0.043
7. Евроинс	165	169	116314	113915	0.046	0.046	0.043	0.044
8. Армеец	150	153	141196	149399	0.055	0.060	0.076	0.070

9. Групама Застраховане	152	155	109856	140712	0.043	0.057	0.245	0.202
10. ОЗК Застраховане	134	137	324680	332331	0.127	0.134	0.193	0.206
11. ДаллБогг: Живот и Здраве	126	128	7124	8434	0.003	0.003	0.003	0.002
12. България Иншурънс	147	151	23920	26851	0.009	0.011	0.173	0.156
13. Бул Инс	119	122	22089	24296	0.009	0.010	0.013	0.013
ОБЩО			2553049 (ОП)	2486190 (ОП)	1	1	2.038	1.898

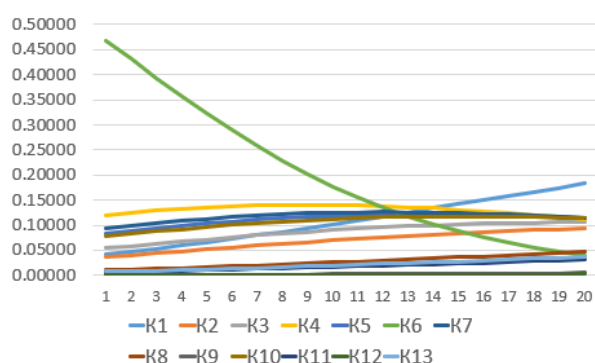
Таблица 5. Класификация на застрахователните компании на българския пазар въз основа на клиентското поведение – вероятности за определен брой нови полици при имуществена застраховка

$$P(X = K_i | Y = j)$$

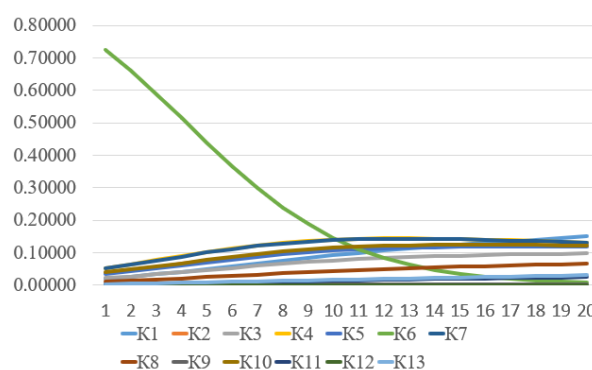
$Y = j$	K1		K2		K3			K13	
	2023	2024	2023	2024	2023	2024		2023	2024
1	0.046	0.049	0.145	0.144	0.072	0.071		0.001	0.001
2	0.051	0.054	0.159	0.159	0.078	0.079		0.001	0.001
3	0.054	0.058	0.170	0.172	0.084	0.085		0.001	0.001
.....									
18	0.051	0.060	0.166	0.208	0.083	0.106		0.001	0.001
19	0.049	0.058	0.161	0.204	0.080	0.103		0.001	0.001
20	0.047	0.056	0.155	0.198	0.077	0.101		0.001	0.001

СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ ЗА ПЕРИОД 2023-2024

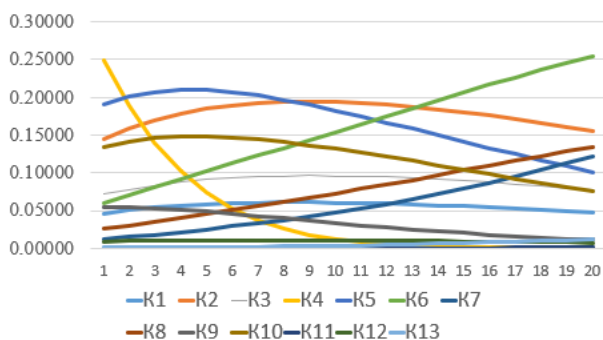
Получените резултати, изобразени графично на фигури 1-4, позволяват детайлен анализ на вероятността всяка компания да привлича нови клиенти при различни стойности на j .



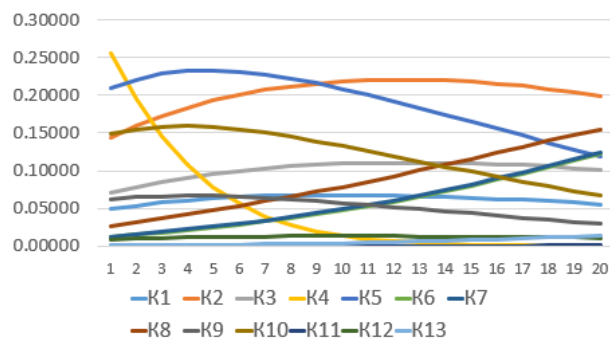
Фигура 1. Вероятности за застраховка „Гражданска отговорност“, 2023



Фигура 2. Вероятности за застраховка „Гражданска отговорност“, 2024



Фигура 3. Вероятности за имуществена застраховка, 2023



Фигура 4. Вероятности за имуществена застраховка, 2024

Сравнението на вероятностите $P(X = K_i | Y = j)$ за 2023 и 2024 г. позволява да се проследи как се разпределя клиентският избор между застрахователните компании при фиксиран брой нови полици j . Тук j не представлява реален брой полици за дадена компания, а хипотетичен брой нови полици на пазара, при който се изследва как те биха се разпределили между отделните компании.

При застраховка „Гражданска отговорност“ за $j = 1$ през 2023 г. разпределението е силно концентрирано, като Лев Инс заема доминираща позиция с вероятност 0.72, което означава, че при единична нова полица изборът е насочен предимно към тази компания. През 2024 г. тази концентрация отслабва, намалявайки вероятността до 0.47, а разпределението се разширява към други компании, сред които Уника България (0.119) и ОЗК Застраховане (0.077), което показва по-балансирано разпределение на клиентските предпочитания. При $j = 20$, което съответства на сценарий с по-голям брой нови полици, разпределението е значително по-равномерно. През 2023 г. вероятностите са близки между водещите компании – Allianz България (0.150), Уника България (0.130) и DZI (0.120). През 2024 г. има пренареждане, при което Allianz България увеличава относителното си участие до 0.183, докато Уника България и DZI намаляват съответно до приблизително 0.113 и 0.094, което показва пренасочване на клиентския избор към Allianz България при по-голям обем полици.

При имуществената застраховка за $j = 1$ и през двете години се наблюдава стабилна концентрация на предпочитанията към Уника България (0.25), следвана от DZI (0.14–0.15), показвайки устойчиво разпределение на клиентския избор при единична полица. При $j = 20$ структурата на разпределението се изменя съществено. През 2023 г. DZI има водеща позиция с вероятност приблизително 0.155, докато Уника България практически губи относителна тежест. През 2024 г. тази тенденция се засилва, като DZI увеличава вероятността си до 0.198. Това показва, че при по-голям брой полици разпределението на клиентския избор се измества към компании с по-устойчиво присъствие.

Получените резултати имат практическа стойност, тъй като позволяват анализ на пазарното представяне на застрахователните компании и на клиентските предпочитания. При наличие на по-подробни и актуални данни подобен подход може да подпомогне вземането на решения, насочени към повишаване на конкурентоспособността. Следва да се отчете, че използваните данни имат ориентировъчен характер поради липсата на официално публикувана информация за броя на издадените полици, като част от стойностите са определени чрез приближени оценки. Независимо от това, моделът позволява извеждането на надеждни сравнителни изводи и проследяване на тенденции във времето.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В резултат на проведеното изследване могат да се направят следните изводи:

1. Разработен е вероятностен модел за класификация на застрахователните компании, базиран на формулата на Бейс, който позволява анализ на клиентските предпочитания;
2. Извършена е оценка на приблизителния брой полици чрез използване на brutния премиен приход и средни ценови оценки;

3. Установено е, че експоненциалното разпределение най-добре описва разглежданите данни;
4. Проведен е сравнителен анализ за периода 2023–2024 г., при който се наблюдават изменения в разпределението на клиентските предпочитания;
5. При застраховка „Гражданска отговорност“ се отчита намаляване на концентрацията, а при имуществената застраховка – пренареждане на водещите позиции;
6. Предложеният модел позволява проследяване на тенденции в клиентското поведение и сравнителен анализ на пазарните позиции на застрахователните компании;
7. Получените резултати имат приложен характер, като следва да се отчете, че използваните данни са приближени.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2026 – ФПНО – 02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

- [1] Hart, D., Buchanan, R., Howe, B., Actuarial Practice in General Insurance, Institute of Actuaries of Australia, Sydney, 1996.
- [2] Financial Supervision Commission (FSC) 2023-2024 data: <https://www.fsc.bg/zastrahovatelna-deynost/statistika/obshto-zastrahovane/2023-2/>; <https://www.fsc.bg/zastrahovatelna-deynost/statistika/obshto-zastrahovane/2024-2/>.
- [3] <https://www.sdi.bg/onlineinsurance/showQuestionnaire.php>.
- [4] https://www.nsi.bg/en/file/25633/Inflation2024-12_en_VECD87X.pdf.
- [5] Raeva E., V. Mihova, I. Nikolaev, Using SPSS for Solving Engineering Problems, 2019. 29th Annual Conference of the European Association for Education in Electrical and Information Engineering (EAEIE), (2019): 1-6.
- [6] https://www.allianz.bg/bg_BG/q-b-property.html/start.

FRI-2.203-SSS-FM-02

CLAUDE AND APPLICATION OF LARGE LANGUAGE MODELS IN SCIENTIFIC RESEARCH AND MATHEMATICAL MODELING²

Nikita Nikitov, PhD Student,
Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse
E-mail: nnikitov@uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Ivan Georgiev, PhD
Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse
E-mail: irgeorgiev@uni-ruse.bg

Abstract: *The present paper examines Large Language Models (LLMs) as a new class of computational tools applicable in scientific research, mathematical modeling, and optimization tasks. The focus is placed on the mathematical foundations of language models, including their parametric representation, probabilistic nature of text generation, Transformer architecture, and the role of the attention mechanism. The study analyzes the optimization methods used in training modern neural networks, including Gradient Descent, Stochastic Gradient Descent (SGD), and the Adam optimization algorithm. Claude AI is presented as an example of a contemporary large language model that applies principles focused on reliability, safety, and controllability; however, the analysis addresses the broader class of LLM technologies rather than evaluating or promoting a specific system. Special attention is given to the application of LLM systems in the scientific research process, including literature analysis, mathematical model formulation, programming support, hypothesis generation, and data interpretation. The paper also discusses the limitations of such models, including the probabilistic nature of generated outputs and the need for expert validation. The main conclusion is that large language models do not replace researchers but extend their capabilities by accelerating information processing, supporting analytical tasks, assisting in software development, and improving the structuring of scientific arguments. Future integration of LLMs with mathematical software environments, optimization algorithms, and AI agents may create new opportunities for more efficient scientific and engineering workflows.*

Key words: *Large Language Models, Artificial Intelligence, Mathematical Modeling, Optimization Methods, Transformer Architecture, Attention Mechanism, Gradient Descent, Adam Optimizer.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Големите езикови модели са една от най-съществените технологични промени в областта на изкуствения интелект през последните години. Те позволяват автоматична обработка на текст, програмен код, таблици, научни статии, изображения и в някои случаи мултимодални входове. За разлика от класическите софтуерни инструменти, които изпълняват предварително дефинирани операции, LLM системите работят като вероятностни модели, които генерират резултат на базата на контекст, параметри и научени зависимости.

В научноизследователската дейност това създава нова ситуация. Изследователят вече може да използва AI система не само като търсачка или текстов редактор, а като интерактивен помощник при формулиране на проблем, структуриране на модел, писане на код, проверка на аргументация и сравнение на подходи. Това е особено важно в области като математическо моделиране и оптимизация, където задачата често започва с неформално описание на реален проблем и преминава през поредица от формални стъпки.

Целта на настоящия доклад е да представи математическата и методологичната основа на големите езикови модели, като специално внимание се отделя на шест ключови компонента: математическа формализация, вероятностен модел, Transformer архитектура, attention механизъм, оптимизационна постановка и числени методи за обучение.

² Докладът е представен на студентската научна сесия на 21.05.2026 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: КЛЮД И ПРИЛОЖЕНИЕ НА ГОЛЕМИ ЕЗИКОВИ МОДЕЛИ В НАУЧНИТЕ ИЗСЛЕДВАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОТО МОДЕЛИРАНЕ.

ИСТОРИЧЕСКО РАЗВИТИЕ НА ГОЛЕМИТЕ ЕЗИКОВИ МОДЕЛИ

Първите системи за обработка на естествен език се базират предимно на правила, речници и статистически зависимости. При тях възможностите са ограничени, защото системата не „разбира“ контекст в съвременния смисъл, а следва предварително зададени шаблони. С навлизането на машинното обучение и по-късно на дълбоките невронни мрежи се появява възможност моделите да извличат зависимости автоматично от големи масиви данни.

Ключов момент е публикацията „Attention Is All You Need“ от 2017 г., в която е предложена Transformer архитектурата. Тя заменя необходимостта от рекурентна обработка с механизъм за внимание и позволява паралелна обработка на последователности. След това се развиват модели като BERT, GPT, Claude, Gemini, Llama и други. Част от тях са затворени комерсиални системи, други са отворени или open-weight модели, което позволява по-широка академична употреба.

За настоящия доклад е важно не просто историческото изброяване на системи, а фактът, че развитието на LLM е резултат от съчетание между математически модели, оптимизационни алгоритми, големи данни и изчислителна инфраструктура.



МАТЕМАТИЧЕСКА ФОРМАЛИЗАЦИЯ НА ЕЗИКОВИЯ МОДЕЛ

От математическа гледна точка големият езиков модел може да бъде разглеждан като параметрична функция, която преобразува входна последователност в изходна последователност. Входът може да бъде текстов prompt, част от научна статия, задача по програмиране или описание на реален проблем. Изходът е генериран текст, код, таблица, обяснение или друга структурирана форма.

Най-общо моделът може да се представи чрез функцията:

$$y = f(x, \theta) \quad (1)$$

където x е входната информация, θ е векторът от параметри на модела, а y е генерираният резултат. При съвременните LLM параметрите θ могат да бъдат милиарди на брой. Те не представляват ръчно зададени правила, а числови стойности, получени чрез обучение върху големи корпуси от данни.

Тази формализация е важна, защото показва, че LLM не е база данни в класически смисъл. Моделът не търси готов отговор в таблица, а изчислява вероятностно съгласуван изход според входа и параметрите си. Следователно качеството на резултата зависи от три основни фактора: съдържанието на входа, качеството на обучението и начина, по който моделът е допълнително настроен за следване на инструкции.

В контекста на математическото моделиране това означава, че prompt-ът може да се разглежда като задаване на начални условия, ограничения и цел на задача. Ако входът е неясен, моделът работи при висока неопределеност и вероятността за некоректен или твърде общ резултат нараства. Ако входът съдържа ясна цел, дефинирани променливи и очакван формат, моделът може да генерира значително по-полезен резултат.

ВЕРОЯТНОСТЕН МОДЕЛ ПРИ ГЕНЕРИРАНЕ НА ТЕКСТ

Езиковите модели работят върху последователности от токени. Токенът може да бъде дума, част от дума, символ или комбинация от символи. Вместо да генерира цял текст наведнъж, моделът оценява вероятността за следващ токен при даден предходен контекст.

$$P(x_t | x_1, x_2, \dots, x_{t-1}) \quad (2)$$

Формула (2) изразява условната вероятност следващият елемент x_t да се появи при условие, че предходните елементи $x_1, x_2, \dots, x_{t-1}$ вече са налични. При генериране на отговор процесът се повтаря многократно: моделът избира следващ токен, добавя го към контекста, след което изчислява вероятностите за следващия токен.

За цяла последователност вероятността може да се представи като произведение на условните вероятности:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{t=1}^n P(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}) \quad (3)$$

Тази постановка обяснява защо LLM системите понякога дават различни отговори на сходни въпроси. Генерирането е вероятностен процес, който може да бъде управляван чрез параметри като температура, top-k и top-p sampling. При по-ниска температура моделът избира по-консервативни и вероятни изходи, а при по-висока температура допуска по-голямо разнообразие.

От гледна точка на научната работа това има две последици. Първо, LLM може да бъде полезен при генериране на алтернативни хипотези и обяснения. Второ, резултатът не трябва да се приема като формално доказателство. Той е вероятно генерирано предложение, което трябва да бъде валидирано чрез математически аргумент, експеримент или надежден източник.

Например, когато моделът предлага математически модел за реален процес, той може да формулира променливи, ограничения и целева функция. Но правилността на тези елементи зависи от предметната област и трябва да бъде проверена от специалист.

TRANSFORMER АРХИТЕКТУРА

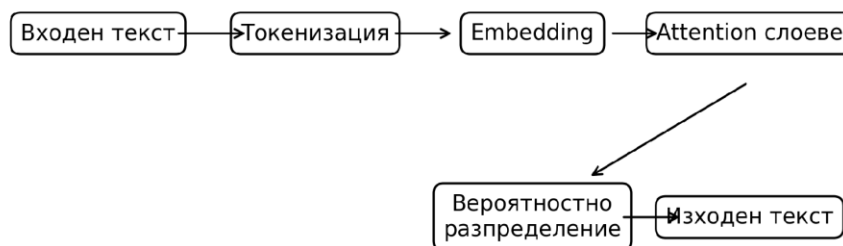
Transformer архитектурата е основата на повечето съвременни големи езикови модели. Тя е въведена като алтернатива на рекурентните невронни мрежи, които обработват последователността стъпка по стъпка. Основното предимство на Transformer е, че позволява паралелна обработка на входа и по-добро улавяне на дългосрочни зависимости.

Входният текст първо се преобразува в токени. Всеки токен се представя като числов вектор в embedding пространство. Тъй като Transformer сам по себе си не съдържа естествен ред на елементите, към векторите се добавя позиционна информация. Така моделът може да различава не само кои токени присъстват, но и къде се намират в последователността.

След това информацията преминава през поредица от attention слоеве и feed-forward невронни мрежи. Всеки слой трансформира представянето на входа и извлича по-абстрактни зависимости. При големите модели този процес се повтаря десетки или стотици пъти, което позволява представяне на сложни езикови, логически и семантични отношения.

В контекста на математическото моделиране Transformer архитектурата може да се разглежда като сложна композиция от функции, в която всяка стъпка преобразува данните в по-информативно представяне. Това е сходно с идеята за търсене на подходящо представяне на сложен проблем в пространство, където зависимостите стават по-лесни за моделиране.

Фиг. 2. Обобщена схема на Transformer-базиран езиков модел



ATTENTION МЕХАНИЗЪМ

Attention механизъмът е централният елемент на Transformer архитектурата. Неговата функция е да определи кои части от входната последователност са най-значими при обработката на даден токен. Вместо всички елементи да имат еднаква тежест, моделът изчислява различни степени на внимание между тях.

Класическата формула за scaled dot-product attention е:

$$Attention(Q, K, V) = softmax((QK^T) / \sqrt{d_k}) V \quad (4)$$

В тази формула Q означава queries, K означава keys, а V означава values. Интуитивно query представя въпрос или търсена характеристика, key представя признаците, по които се сравнява, а value носи информацията, която се комбинира в резултата. Изразът QK^T измерва сходството между queries и keys, а делението на $\sqrt{d_k}$ стабилизира числените стойности при по-голяма размерност.

Функцията softmax преобразува тези стойности в тегла, които сумират до единица. Така attention механизъмът формира претеглена комбинация от value векторите. Резултатът е ново представяне, което съдържа информация от различни части на контекста, но с различна значимост.

Практически това позволява на модела да свързва далечни части от текста. Например при анализ на научен доклад моделът може да свърже дефиниция от началото на текста с формула или заключение в края. При програмиране може да свърже функция, дефинирана по-рано, с нейното извикване по-късно. При математическо моделиране може да проследи връзка между променливи, ограничения и целева функция.

Съвременните модели използват multi-head attention. Това означава, че attention се изчислява паралелно в няколко различни подпространства. Всеки „head“ може да улавя различен тип зависимост: синтактична, семантична, логическа или структурна. След това резултатите се комбинират в общо представяне.

ОПТИМИЗАЦИОННА ПОСТАНОВКА ПРИ ОБУЧЕНИЕ НА LLM

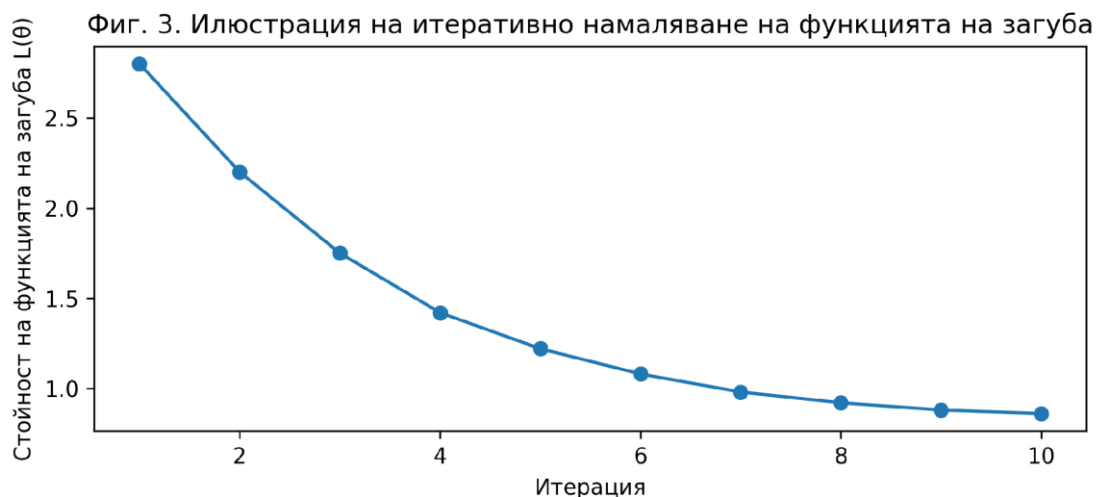
Обучението на голям езиков модел е оптимизационна задача в пространство с много голяма размерност. Целта е да се намери вектор от параметри θ , при който моделът минимизира грешката между предсказанията си и наблюдаваните данни. Общата постановка може да се запише като:

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} L(\theta) \quad (5)$$

където $L(\theta)$ е функцията на загуба, а θ^* е оптималният или приближено оптималният набор от параметри. При езиковите модели често се използва функция на загуба, свързана с отрицателната логаритмична вероятност на правилния следващ токен. Ако моделът задава висока вероятност на правилния токен, загубата е ниска. Ако задава ниска вероятност, загубата е висока.

В реални LLM системи оптимизацията е изключително сложна поради няколко причини. Първо, броят на параметрите е огромен. Второ, функцията на загуба не е изпъкнала, което означава, че няма гаранция за намиране на глобален минимум чрез стандартни методи. Трето, данните са хетерогенни и съдържат естествен език, код, таблици, различни стилове и домейни.

Поради това обучението се извършва чрез числени методи, които търсят достатъчно добро решение, а не аналитично точно решение. Това е типичен пример за приложна оптимизация: вместо затворена формула за решението се използва итеративен процес, който постепенно подобрява параметрите.



GRADIENT DESCENT, SGD И ADAM

Gradient Descent е основен числен метод за минимизация на диференцируема функция. Идеята е параметрите да се променят в посока, обратна на градиента на функцията на загуба. Градиентът показва посоката на най-бързо нарастване, следователно отрицателният градиент показва посока на намаляване.

$$\vartheta_{t+1} = \vartheta_t - \eta \nabla L(\vartheta_t) \quad (6)$$

Във формула (6) η е learning rate – коефициент, който определя размера на стъпката. Ако η е твърде малко, обучението е бавно. Ако η е твърде голямо, процесът може да стане нестабилен и да прескача добри решения.

При големи набори от данни изчисляването на градиента върху всички примери е твърде скъпо. Затова се използва Stochastic Gradient Descent (SGD), при който градиентът се оценява върху един пример или малка партида от примери. Това прави обучението по-бързо, но въвежда шум в оценката на градиента. Въпреки това шумът често помага за избягване на лоши локални области в пространството на параметрите.

Мини-партидният вариант е практически най-използван: параметрите се актуализират след обработка на малка група примери. Това позволява баланс между изчислителна ефективност и стабилност на обучението.

Adam optimizer е адаптивен метод, който използва оценки на първия и втория момент на градиента. На практика това означава, че методът адаптира стъпките за различните параметри според поведението на градиента. Adam е широко използван при обучение на дълбоки невронни мрежи, защото обикновено осигурява по-бърза и стабилна конвергенция спрямо базовия SGD.

Важно е да се подчертае, че тези методи не гарантират абсолютна математическа оптималност в строг смисъл. Те дават практически ефективни решения за много големи, нелинейни и неизпъкнали задачи. Именно това ги прави приложими при обучение на LLM системи.

СЪВРЕМЕННИ LLM СИСТЕМИ: СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ

Съвременните големи езикови модели се различават по архитектурни решения, достъпност, интеграции и основни приложения. Claude се свързва с подхода Constitutional AI и силна работа с

дълги документи. ChatGPT се отличава с широка екосистема от инструменти и мултимодални функции. Gemini поставя акцент върху мултимодалност и интеграция с Google средата. Llama е важен за академични и локални разработки поради отворения си характер. Copilot е специализиран към програмиране и интеграция в среда за разработка.

Таблица 1 представя обобщено сравнение без претенции за абсолютна класация. Целта е да се покаже, че изборът на модел трябва да зависи от задачата.

Таблица 1. Обобщено сравнение на съвременни LLM системи

Система	Организация	Основна насоченост	Предимства	Ограничения
Claude	Anthropic	Дълги документи, анализ, безопасност	Constitutional AI, структурирани отговори	Нужда от проверка; инструментите зависят от средата
ChatGPT	OpenAI	Универсален AI асистент	Инструменти, код, мултимодалност	Резултатите зависят от модела и настройките
Gemini	Google DeepMind	Мултимодалност и Google интеграция	Текст, изображения, видео, Workspace	Ограничения според версия и достъп
Llama	Meta	Open-weight модели	Локална употреба, изследвания, контрол	Изисква инфраструктура и експертиза
Copilot	Microsoft/GitHub	Програмиране	IDE интеграция, code completion	По-тясна специализация

CLAUDE AI И CONSTITUTIONAL AI КАТО ПРИМЕР

Claude AI е разглеждан в този доклад не като рекламен обект, а като пример за инженерно решение, при което безопасността и управляемостта са поставени в центъра на дизайна. Подходът Constitutional AI използва набор от принципи, които насочват модела при оценка и корекция на отговорите.

В научен контекст това е важно, защото изследователската работа изисква не само генериране на текст, но и дисциплина при формулиране на твърдения, признаване на несигурност и избягване на подвеждащи заключения. Въпреки това Constitutional AI не премахва необходимостта от проверка. Моделът остава вероятностна система и може да греши.

Практическата стойност на Claude и сходни модели е особено видима при анализ на дълги документи, синтез на литература, структуриране на доклади, обяснение на код и генериране на методологични варианти. Тези функции са помощни, а не заместващи научната експертиза.

PROMPT ENGINEERING КАТО ФОРМАЛИЗИРАНЕ НА ЗАДАЧАТА

Prompt engineering може да бъде разглеждан като процес на формално задаване на задача към вероятностен модел. Входът трябва да съдържа цел, контекст, ограничения, очакван формат и критерии за качество. Това наподобява формулирането на математически модел, при което неясното описание на реален проблем се превръща в система от променливи, параметри и зависимости.

Например слаб prompt би бил: „Обясни оптимизация“. По-добър prompt би бил: „Обясни стохастичния градиентен метод на ниво докторант по математическо моделиране, с формула, интуиция, ограничения и пример за обучение на невронна мрежа“. Във втория случай входът намалява неопределеността и насочва модела към конкретна дълбочина и структура.

Така prompt engineering може да се тълкува като интерфейс между човешката експертиза и параметричния AI модел. Колкото по-добре е формулиран проблемът, толкова по-полезен е резултатът.

ПРИЛОЖЕНИЕ В НАУЧНОИЗСЛЕДОВАТЕЛСКИЯ ПРОЦЕС

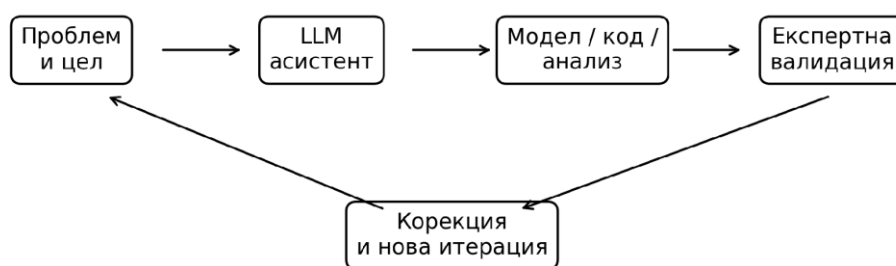
В научноизследователската дейност LLM системите могат да бъдат включени на различни етапи. В началния етап те подпомагат обзор на литература, извличане на ключови понятия и

формулиране на изследователски въпрос. В етапа на моделиране могат да предложат възможни променливи, ограничения и целеви функции. При реализация могат да генерират код на Python, MATLAB, R или друг език.

При анализа на резултати моделите могат да помогнат за интерпретация, формулиране на изводи и проверка на логическата последователност на текста. Но във всички случаи човекът изследовател остава отговорен за валидността на резултата.

Особено полезен е итеративният процес: изследователят задава задача, AI предлага решение, човекът проверява, коригира и задава нова задача. По този начин AI системата се превръща в ускорител на мисловния процес, а не в негов заместител.

Фиг. 4. Цикъл на AI-подпомогнат научноизследователски процес



ОГРАНИЧЕНИЯ И РИСКОВЕ

Основният риск при големите езикови модели е генерирането на убедително звучаща, но невярна информация. Това често се нарича *hallucination*. Причината е, че моделът оптимизира вероятностна последователност, а не извършва автоматично проверка на истинността в строг научен смисъл.

Друг риск е пристрастие, произтичащо от обучаващите данни. Ако данните съдържат систематични изкривявания, моделът може да ги възпроизведе. Освен това моделите могат да пропускат контекст, да смесват източници или да дават прекалено уверени отговори при несигурност.

Поради това използването им в академична среда трябва да бъде съпроводено с ясни правила: проверка на източници, проверка на формули, повторно изчисление на числени резултати и ясно разграничаване между генерирано предложение и доказан резултат.

БЪДЕЩО РАЗВИТИЕ

Вероятното развитие на LLM системите ще бъде свързано с AI агенти, които могат да изпълняват последователни задачи, да използват външни инструменти, да стартират код и да проверяват резултати. Особено перспективна е интеграцията със специализирани математически системи, системи за доказателства, симулатори и бази данни.

За математическото моделиране това означава нова изследователска среда, в която AI може да подпомага целия цикъл: от формулиране на проблема до числено решение, визуализация и писане на доклад. Въпреки това централна остава ролята на изследователя, който дефинира проблема и носи отговорност за научната коректност.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Големите езикови модели представляват значим етап в развитието на изкуствения интелект и изчислителните технологии. Тяхната работа може да бъде описана чрез математическа формализация, вероятно моделниране, Transformer архитектура, attention механизъм и оптимизационни методи за обучение.

Разглеждането на LLM през призмата на математическото моделиране показва, че тези системи са не просто текстови генератори, а сложни параметрични модели, обучени чрез мащабна числена оптимизация. Това ги прави особено релевантни за научни и инженерни задачи.

Най-подходящият подход е използването на AI като интелигентен асистент, който подпомага анализа и автоматизацията, но не замества експертната оценка. Именно съчетанието между човешко критично мислене и изчислителна мощ на AI системите може да доведе до по-ефективна научноизследователска работа.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2026 – ФПНО – 02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

- [1] Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., et al. Attention Is All You Need. Advances in Neural Information Processing Systems, 2017.
- [2] Brown, T., Mann, B., Ryder, N., et al. Language Models are Few-Shot Learners. NeurIPS, 2020.
- [3] Ouyang, L., Wu, J., Jiang, X., et al. Training Language Models to Follow Instructions with Human Feedback, 2022.
- [4] Bai, Y., Kadavath, S., Kundu, S., et al. Constitutional AI: Harmlessness from AI Feedback. Anthropic, 2022.
- [5] Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. Deep Learning. MIT Press, 2016.
- [6] Kingma, D. P., Ba, J. Adam: A Method for Stochastic Optimization, 2014.
- [7] Touvron, H., Martin, L., Stone, K., et al. Llama 2: Open Foundation and Fine-Tuned Chat Models, 2023.
- [8] Team Gemini. Gemini: A Family of Highly Capable Multimodal Models. Google DeepMind, 2023.
- [9] Anthropic. Claude and Constitutional AI Documentation.
- [10] OpenAI. GPT and ChatGPT Technical Reports.

FRI-2.203-SSS-FM-03

COMPARISON OF DIFFERENT ECONOMIC SECTORS USING A CAPITAL ASSET PRICING MODEL³

Simona Ivanova

Financial Mathematics Student,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: simona.ivanova10@abv.bg

Chief Assist. Prof. Elitsa Raeva, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

Abstract: This report analyzes the expected rate of return of companies from different economic sectors through the Capital Asset Pricing Model (CAPM). The research covers the period from 2015 to 2026 and examines several time intervals in order to compare changes in expected returns over time. The analysis includes companies from the technology, cosmetics, healthcare, fuel, and fashion sectors. The study considers the efficiency of the CAPM as a tool for evaluating the relationship between risk and expected return and for comparing investment opportunities across sectors.

Key words: Stock price, CAPM, economic sectors.

ВЪВЕДЕНИЕ

Настоящият доклад има за цел да анализира очакваната норма на възвръщаемост на различни компании от няколко икономически сектора чрез използването на Модела за оценка на капиталовите активи (МОКА), известен още като Capital Asset Pricing Model (CAPM). Изследването обхваща периода от 2015 г. до 2026 г., като са разгледани периодите от 2015 до 2020 г., от 2015 до 2022 г., от 2015 до 2026 г. и от 2022 до 2026 г. В анализа са включени компании от секторите технологии, козметика, медицина, горива и мода. Чрез сравнение на получените резултати се цели да се установи кои компании и икономически сектори показват по-висока очаквана възвръщаемост и как се променят стойностите в различните периоди.

За оценка на връзката между риска и очакваната доходност широко приложение намира Моделът за оценка на капиталовите активи. Чрез този модел може да се определи очакваната норма на възвръщаемост на дадена акция или инвестиция, като се отчита пазарният риск. Основната идея на МОКА е, че инвеститорите трябва да получат по-висока доходност при поемането на по-висок риск. Следователно колкото по-рискова е една акция, толкова по-висока възвръщаемост се очаква от нея.

Моделът се използва широко от инвеститори, финансови анализатори, банки, инвестиционни фондове и компании при оценка на инвестиционни проекти.

Формула на Модела за оценка на капиталовите активи (МОКА)

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f) \cdot \beta_i$$

Където:

$E(r_i)$ – очаквана норма на възвръщаемост на i -тия актив;

r_f – норма на възвръщаемост на безрисковия актив;

$E(r_m)$ – очаквана норма на възвръщаемост на пазара;

β_i – показател за системния (пазарния) риск; мярка за волатилност на акцията спрямо пазара;

$E(r_m) - r_f$ – очаквана възвръщаемост, която инвеститорът получава;

³ Докладът е представен на студентската научна сесия на 21.05.2026 г. в секция „Финансова математика” с оригинално заглавие на български език: СРАВНЕНИЕ НА РАЗЛИЧНИ ИКОНОМИЧЕСКИ СЕКТОРИ С ПОМОЩТА НА МОДЕЛ ЗА ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИТЕ АКТИВИ.

БЕТА КОЕФИЦИЕНТ

Бета коефициентът измерва чувствителността на дадена акция спрямо движението на пазара. Ако $\beta = 1$, акцията се движи заедно с пазара. При $\beta > 1$ акцията е по-рискова от пазара, а при $\beta < 1$ акцията е по-стабилна и по-малко рискова.

Числителят на коефициента β се явява измерител на систематичния (пазарния) риск на акцията. Следователно коефициентът β е отношението между систематичния риск на акциите и риска на пазарния портфейл.

За да се пресметне бета коефициентът, се използва формулата:

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_m)}{var(r_m)}$$

Таблица 1 представя изчислените стойности на бета коефициентите на разглежданите компании за отделни времеви периоди – 2015–2020 г., 2015–2022 г., 2022–2026 г., както и за целия анализиран период 2015–2026 г. Бета коефициентът е основен показател за измерване на систематичния риск, като чрез него се оценява чувствителността на дадена акция спрямо движенията на пазара. Получените резултати показват, че всички анализирани компании имат стойности на бета коефициента под единица, което означава, че техните акции са по-слабо волатилни в сравнение с пазара като цяло и се характеризират с относително по-нисък систематичен риск.

Таблица 1. Бета коефициенти изчислени по компании

	2015 - 2020	2015 - 2022	2022 – 2026	2015 - 2026
Microsoft	0.37	0.49	0.48	0.45
Apple	0.26	0.36	0.44	0.36
NVIDIA	0.16	0.19	0.23	0.19
Broadcom	0.17	0.31	0.19	0.23
Estée Lauder	0.28	0.39	0.17	0.24
Procter & Gamble	0.28	0.37	0.28	0.36
Coty	0.05	0.08	0.15	0.09
Ulta Beauty	0.17	0.26	0.21	0.23
EL&C	0.08	0.13	0.08	0.10
J&J	0.51	0.57	0.26	0.46
UnitedHealth Group	0.25	0.41	0.05	0.19
AbbVie	0.18	0.25	0.11	0.22
Exxon Mobil	0.44	0.31	0.13	0.27
Chevron	0.37	0.36	0.21	0.31
ConocoPhillips	0.20	0.21	0.11	0.19
Schlumberger	0.27	0.23	0.11	0.20
Nike	0.30	0.40	0.29	0.31
Tapestry	0.14	0.18	0.25	0.19
Ralph Lauren	0.13	0.22	0.27	0.24
VF Corporation	0.32	0.41	0.18	0.25

Най-високи стойности на бета коефициентите се наблюдават при компаниите от технологичния сектор. Microsoft отчита най-висока стойност за периода 2015–2022 г., което показва по-силна чувствителност към пазарните колебания и по-висока степен на риск в сравнение с останалите разглеждани дружества. Компаниите NVIDIA и Broadcom също демонстрират сравнително високи стойности, макар и по-умерени, което потвърждава характерната за технологичния сектор зависимост от динамиката на финансовите пазари и икономическата среда.

При компаниите от козметичния сектор се наблюдават по-ниски стойности на бета коефициентите, което свидетелства за по-стабилно пазарно поведение и по-ниска чувствителност към пазарните изменения. Най-ниски стойности са отчетени при Coty, докато Procter & Gamble и Estée Lauder демонстрират сравнително по-висока, но все пак умерена чувствителност спрямо пазара.

Компаниите от медицинския сектор също показват относително стабилни стойности на бета коефициентите. Johnson & Johnson се отличава с по-висока стойност за периода 2015–2022 г., което може да се обясни с повишената несигурност и динамика в здравния сектор през периода на пандемията. От друга страна, UnitedHealth Group и AbbVie поддържат по-ниски стойности, което показва по-ниско ниво на систематичен риск и по-стабилно представяне.

При компаниите от сектора на горивата се наблюдава тенденция към намаляване на стойностите на бета коефициентите след 2022 г. Например Exxon Mobil отчита значителен спад в стойността на показателя, което предполага понижаване на волатилността и стабилизиране на сектора в условията на променяща се енергийна и икономическа среда. Подобна тенденция се наблюдава и при останалите компании в сектора.

Компаниите от сектора на облеклото се характеризират с умерени стойности на бета коефициентите. Nike и VF Corporation демонстрират по-висока чувствителност към пазарните изменения, което вероятно се дължи на зависимостта на сектора от потребителското търсене и икономическата конюнктура. Независимо от това, стойностите остават под единица, което потвърждава сравнително умерено ниво на риск.

Таблица 2. Бета коефициенти изчислени по икономически сектори

	2015 - 2020	2015 - 2022	2022 - 2026	2015 - 2026
технологии	0.24	0.34	0.33	0.31
козметика	0.19	0.27	0.2	0.23
медицина	0.26	0.34	0.13	0.24
горива	0.32	0.28	0.14	0.24
дрехи	0.22	0.3	0.25	0.25

Таблица 2 представя средните стойности на бета коефициентите по икономически сектори, което позволява извършването на сравнителен анализ между различните индустрии. Данните показват, че технологичният сектор поддържа най-високи средни стойности на бета коефициентите през почти всички разглеждани периоди. Това потвърждава, че технологичните компании са по-чувствителни към пазарните колебания и се характеризират с по-висока степен на систематичен риск.

Медицинският сектор също отчита сравнително високи средни стойности в периода 2015–2022 г., като след 2022 г. се наблюдава известно понижение. Тази тенденция може да бъде свързана със стабилизирането на здравния сектор след периода на повишена несигурност, предизвикана от пандемията от COVID-19.

Секторът на горивата демонстрира ясно изразена тенденция към спад на средните стойности на бета коефициентите в периода след 2022 г., което предполага намаляване на пазарната волатилност и по-стабилно развитие на енергийните компании. Компаниите от сектора на облеклото запазват сравнително постоянни и умерени средни стойности, което показва относително стабилно равнище на риск.

Най-ниски средни стойности на бета коефициентите се наблюдават в козметичния сектор. Това показва, че компаниите в тази индустрия са най-слабо зависими от пазарните колебания и се характеризират с по-висока стабилност в сравнение с останалите разглеждани сектори.

МЕТОДИКА НА ИЗСЛЕДВАНЕТО

За целите на настоящото изследване е приложен моделът МОКА за определяне на очакваната норма на възвръщаемост на избрани компании от различни икономически сектори. Изследването е проведено върху компании от технологичния сектор като Microsoft, Apple, NVIDIA и Broadcom, компании от козметичния сектор като Estée Lauder, Procter & Gamble, Coty и Ulta Beauty, компании от медицинския сектор като Johnson & Johnson, UnitedHealth Group, AbbVie и EL&C, компании от сектора на горивата като Exxon Mobil, Chevron, ConocoPhillips и Schlumberger, както и компании от модния сектор като Nike, Tapestry, Ralph Lauren и VF Corporation.

Таблица 3. Очаквана норма на възвръщаемост по компании

	2015 – 2020	2015 - 2022	2022 - 2026	2015 - 2026
Microsoft	3.63%	3.17%	2.64%	3.25%
Apple	3.77%	3.52%	2.90%	3.52%
NVIDIA	4.47%	4.40%	4.52%	4.59%
Broadcom	4.02%	3.68%	4.31%	4.10%
Estée Lauder	3.65%	3.27%	3.38%	3.51%
Procter & Gamble	3.34%	3.00%	3.13%	3.00%
Coty	4.13%	4.11%	3.45%	4.00%
Ulta Beauty	3.91%	3.74%	3.74%	3.76%
EL&C	4.13%	4.06%	4.29%	4.19%
J&J	2.50%	2.27%	3.41%	2.71%
UnitedHealth Group	3.74%	3.38%	4.13%	3.75%
AbbVie	3.71%	3.60%	4.05%	3.69%
Exxon Mobil	2.26%	3.20%	4.08%	3.36%
Chevron	2.80%	3.12%	3.70%	3.22%
ConocoPhillips	3.51%	3.73%	4.02%	3.71%
Schlumberger	2.91%	3.45%	4.08%	3.55%
Nike	3.46%	3.12%	2.65%	3.18%
Tapestry	3.75%	3.75%	4.05%	3.87%
Ralph Lauren	3.75%	3.41%	3.95%	3.60%
VF Corporation	3.13%	2.36%	3.32%	3.21%

При анализа са разгледани четири отделни времеви периода – от 2015 до 2020 г., от 2015 до 2022 г., от 2015 до 2026 г. и от 2022 до 2026 г. За всяка компания е изчислена очакваната норма на възвръщаемост чрез модела МОКА, като са използвани съответните стойности на безрисковата норма на възвръщаемост, пазарната доходност и бета коефициента.

Получените резултати за очакваната норма на възвръщаемост по компании са представени в Таблица 3.

След изчисляването на очакваната норма на възвръщаемост е извършен сравнителен анализ както между отделните компании, така и между икономическите сектори. Освен индивидуалните резултати е изчислена и средната аритметична стойност на очакваната възвръщаемост за всеки икономически сектор, което позволява по-ясно сравнение между различните отрасли. Резултатите за средната очаквана възвръщаемост по икономически сектори са представени в Таблица 4.

Таблица 4. Средна очаквана възвръщаемост по икономически сектори

	2015 - 2020	2015 - 2022	2022 - 2026	2015 - 2026
технологии	3.97%	3.69%	3.59%	3.87%
козметика	3.76%	3.53%	3.43%	3.57%
медицина	3.52%	3.33%	3.97%	3.59%
горива	2.87%	3.38%	3.97%	3.46%
дрехи	3.52%	3.16%	3.49%	3.47%

За по-ясно визуализиране на динамиката на очакваната възвръщаемост са изготвени графики за всеки от анализирания период. Графиките представят стойностите на очакваната норма на възвръщаемост за всички разглеждани компании, което позволява по-лесно сравнение между отделните компании и икономически сектори във всеки времеви интервал.

АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Резултатите от изследването показват съществени различия както между отделните компании, така и между икономическите сектори. Най-високи стойности на очакваната възвръщаемост се наблюдават при компаниите от технологичния сектор, докато секторите медицина, козметика и мода показват по-умерени и стабилни резултати. Секторът на горивата се характеризира с най-значителна промяна между отделните периоди.

Период 2015–2020 г.

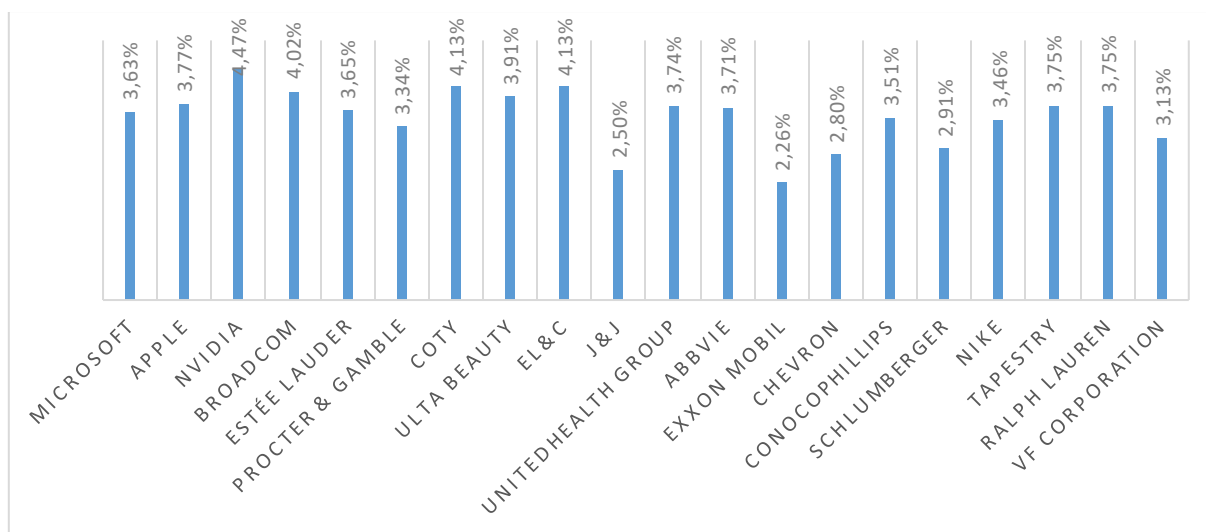
През периода 2015–2020 г. технологичният сектор показва най-високи резултати. Компанията NVIDIA достига 4,47%, което е една от най-високите стойности за периода. Broadcom, Apple и Microsoft също демонстрират стабилна възвръщаемост. В козметичния сектор Coty и EL&C показват високи резултати, докато в медицинския сектор UnitedHealth Group и AbbVie поддържат стабилни стойности.

Секторът на горивата отчита по-ниски резултати, като Exxon Mobil достига едва 2,26%, което е една от най-ниските стойности в изследването. В сектора на модата Tapestry и Ralph Lauren показват сравнително добри резултати, докато VF Corporation има по-ниска очаквана възвръщаемост. Резултатите за периода 2015–2020 г. са представени на Фигура 1.

Период 2015–2022 г.

През периода 2015–2022 г. отново се наблюдават високи стойности в технологичния сектор. NVIDIA запазва водеща позиция с 4,40%, а Coty и EL&C продължават да показват висока възвръщаемост в козметичния сектор.

Медицинският сектор демонстрира сравнително стабилни резултати, докато секторът на горивата започва постепенно да подобрява своите показатели. ConocoPhillips достига 3,73%, а Schlumberger и Exxon Mobil също отбелязват повишение спрямо предходния период. Резултатите за периода 2015–2022 г. са представени на Фигура 2.

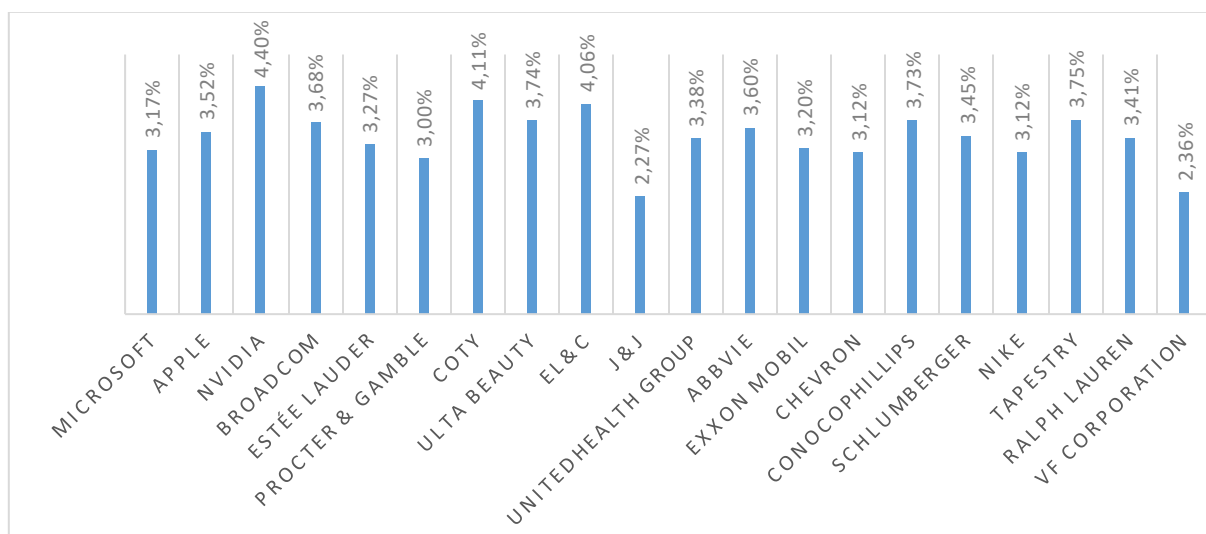


Фигура 1. Очаквана норма на възвръщаемост за периода 2015–2020 г.

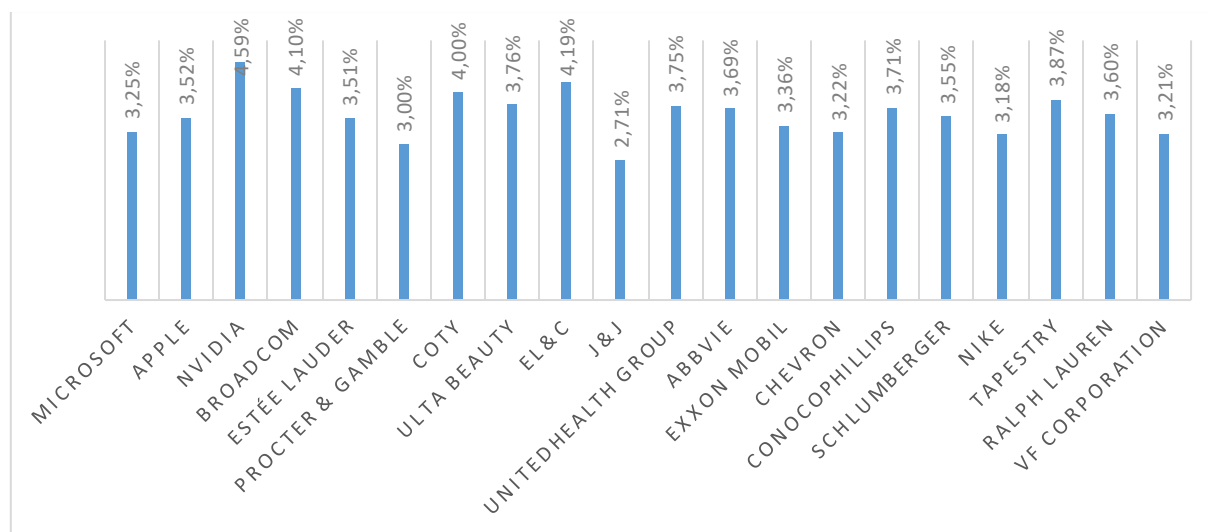
Период 2015–2026 г.

За периода 2015–2026 г. най-висока стойност отново показва NVIDIA с 4,59%, което е и най-високата стойност в цялото изследване. Broadcom и EL&C също демонстрират много добри резултати. Технологичният сектор продължава да бъде секторът с най-висока средна очаквана възвръщаемост.

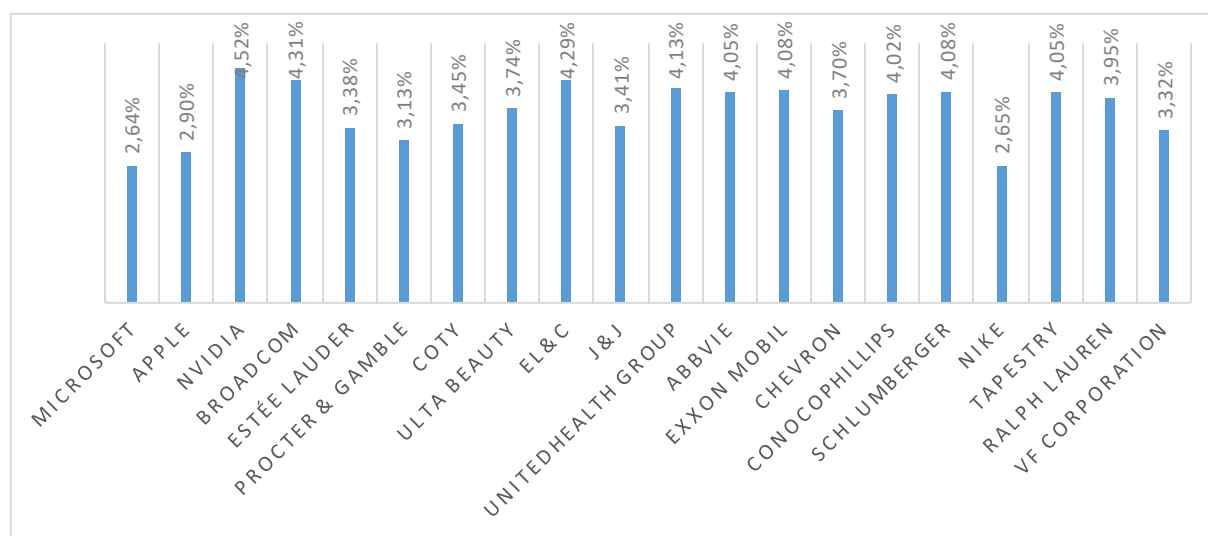
Секторът на горивата показва подобрене спрямо по-ранните периоди, а медицинският сектор запазва стабилни резултати. Компаниите от модния сектор показват по-умерена възвръщаемост в сравнение с останалите отрасли. Резултатите за периода 2015–2026 г. са представени на Фигура 3.



Фигура 2. Очаквана норма на възвръщаемост за периода 2015–2022 г.



Фигура 3. Очаквана норма на възвръщаемост за периода 2015–2026 г.



Фигура 4. Очаквана норма на възвръщаемост за периода 2022–2026 г.

Период 2022–2026 г.

През периода 2022–2026 г. се наблюдават значителни промени в някои икономически сектори. Компаниите от сектора на горивата показват сериозно подобрене, като Exxon Mobil и Schlumberger достигат над 4,00%. Това показва възстановяване на сектора и повишаване на инвеститорските очаквания.

Технологичният сектор продължава да поддържа високи резултати, като NVIDIA достига 4,52%, а Broadcom – 4,31%. В медицинския сектор UnitedHealth Group и AbbVie също демонстрират висока възвръщаемост. В сектора на модата Tapestry достига 4,05%, докато Nike отчита по-ниски стойности. Резултатите за периода 2022–2026 г. са представени на Фигура 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализът на очакваната норма на възвръщаемост по икономически сектори показва съществени различия в нивата на доходност и риск между отделните отрасли. Получените резултати потвърждават, че икономическите условия, пазарната среда и спецификите на всеки сектор оказват пряко влияние върху очакваната възвръщаемост на компаниите.

Технологичният сектор демонстрира най-високи средни стойности на очаквана възвръщаемост през почти всички анализирани периоди. Това се дължи на бързото развитие на технологиите, засиленото търсене на иновации и високия интерес от страна на инвеститорите.

Компании като NVIDIA и Broadcom се отличават с особено високи резултати, което показва значителен потенциал за растеж, но и по-високо ниво на риск.

Козметичният сектор се характеризира със сравнително стабилни резултати и по-малки колебания между отделните периоди. Това показва устойчиво развитие и постоянно потребителско търсене на козметични продукти. Независимо от икономическите промени секторът запазва относително балансиран ниво на възвръщаемост, което го прави по-устойчив в дългосрочен план.

Медицинският сектор демонстрира стабилност и постепенно нарастване на очакваната възвръщаемост, особено в периода след 2022 г. Засиленият интерес към здравеопазването, медицинските услуги и фармацевтичните компании води до подобряване на резултатите в сектора. Това показва, че здравеопазването продължава да бъде един от по-сигурните и устойчиви отрасли за инвестиции.

Секторът на горивата показва най-сериозна промяна между отделните периоди. В началния период стойностите на очакваната възвръщаемост са сравнително ниски, но след 2022 г. се наблюдава значително подобрение. Това показва възстановяване на сектора, повишаване на цените на енергийните ресурси и подобряване на инвеститорските очаквания. Въпреки това секторът остава силно зависим от глобалните икономически и политически фактори.

Секторът на модата показва по-умерени резултати в сравнение с останалите отрасли. Въпреки наличието на стабилни компании като Tapestry и Ralph Lauren, секторът се характеризира с по-ниска динамика и по-ограничен растеж. Това може да се обясни със силната конкуренция, променящите се потребителски предпочитания и зависимостта от икономическата среда.

В обобщение може да се заключи, че технологичният и медицинският сектор предлагат най-добри възможности за по-висока очаквана възвръщаемост, докато козметичният сектор се отличава със стабилност и устойчивост. Секторът на горивата показва значително възстановяване в по-късните периоди, а секторът на модата демонстрира по-умерено развитие. Получените резултати потвърждават значението на секторния анализ при оценката на инвестиционните възможности и управлението на риска.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2026 – ФПНО – 02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

ИЗТОЧНИЦИ

- [1] <https://www.investing.com/indices/us-spx-500-futures>
- [2] <https://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp>
- [3] <https://opac.uma.ac.id/repository/Fundamentals-Corporate-Finance-6th-Ross.pdf>
- [4] Qianye, H. (2024), Comparison of CAPM and DVM: Evidence from Costco and Walm, *Advances in Economics Management and Political Sciences*
- [5] Ivanova, Y. and E. Raeva (2023), An application of the ARIMA model in capital asset pricing model for forecasting of the stocks of index Standard & Poor's 500

FRI-2.203-SSS-FM-04

LABOUR EFFICIENCY BY SECTORS IN BULGARIA⁴

Kaloyan Sabev

Financial Mathematics Student
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: kaloyan.sabev04@gmail.com

Assoc. Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

Abstract: *This study investigates the relationship between man-hours and gross value added (GVA) across different economic sectors in Bulgaria. The aim is to assess the impact of labour, measured by worked hours, on the generation of GVA in each sector. The analysis is based on quarterly data for the period 2020-2025.*

Key words: *Man-hours, GVA, Labour efficiency, Statistical Analysis, Correlation Analysis*

REFERENCES

- [1] National Statistical Institute, <<https://www.nsi.bg/en>>
- [2] Gross Value Added (GVA). NSI methodology,
<https://www.nsi.bg/sites/default/files/files/metadata/GDP_1.2.1_Methodology_en.pdf>
- [3] Man-hours worked. NSI methodology,
<https://www.nsi.bg/sites/default/files/files/metadata/GDP_2.1.1_Methodology_en.pdf>
- [4] Gujarati, D., 2005. Basic Econometrics. Fourth edition, Mc – Graw – Hill, New York.
<Gujarati, D.: Basic Econometrics. Fourth edition, Mc – Graw – Hill, New York (2005)>

⁴ This Report is presented on a Student Scientific Session on 21 May 2026 in “Financial mathematics” section and nominated for publication in Compiled edition of Reports Awarded with “Best Paper” Cristal Prize’26, as a hard copy (ISBN 978-954-712-826-2) and on-line on the Conference Website (<http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=bestPapers>).

FRI-2.203-SSS-FM-05

A STUDY OF THE RELATIONSHIP BETWEEN PRODUCTION RESOURCE PRICES AND AGRICULTURAL COSTS IN BULGARIA⁵

Melisa Emin

Financial Mathematics Student,
University of Ruse
E-mail: melsi6@abv.bg

Assoc. Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

Abstract: This study examines the relationship between production resource prices and agricultural costs in Bulgaria during the period 2008–2025. Multiple linear regression is applied to determine the influence of diesel prices, urea fertilizer prices, and inflation on the Agricultural Input Cost Index.

Key words: Multiple Linear Regression, Statistical Analysis, Correlation Analysis, Agricultural Costs, Diesel Prices, Urea Fertilizer, Inflation.

ВЪВЕДЕНИЕ

През последните няколко години нестабилността на международните енергийни и суровинни пазари, възникнала вследствие на регионални и геополитически промени, оказва сериозен натиск в селскостопанският сектор в България. Като пряк резултат е значителното увеличение на индекса на цените на стоките и услугите за текущо потребление в селското стопанство [1]. Индексът за разходи в селското стопанство (ИРСС) представлява показател, който измерва изменението в цените на стоките и услугите, използвани като входящи ресурси в селскостопанското производство. Той отразява динамиката на разходите, които селскостопанските производители правят за текущо потребление, включително разходи за горива, минерални торове, фуражи, препарати за растителна защита, енергия и други производствени ресурси.

По данни на Национален статистически институт [1] през 2022 г. ИРСС нараства с 34,9% спрямо предходната година поради възникналата енергийна и геополитическа криза в Европа, което води до увеличаване на цените на дизеловото гориво и електроенергията. Съществен фактор е и поскъпването на азотните торове, особено карбамида, чието производство е силно зависимо от цените на природния газ. Вследствие на поскъпването на карбамида много държави започват да променят структурата на земеделското си производство, като се ориентират към култури, които са по-слабо зависими от употребата на азотни торове. В този контекст България вече е прилагала мерки за подпомагане на сектора, като например предоставената през 2024 г. отстъпка от 0,42 лв. от стойността на акциза за литър закупен газбъл, използван в първичното селскостопанско производство.

На база на тези събития възниква въпросът доколко българският селскостопански сектор е зависим от изменението в цените на карбамида и дизела и как това влияе върху производствените разходи в сектора.

Инфлацията също е значим макроикономически показател, който да се включи към анализа на факторите, влияещи върху разходите в селското стопанство. Официалният показател за измерване на инфлацията е индексът на потребителските цени (ИПЦ), който отразява изменението в цените на стоките и услугите, потребявани от домакинствата за определен период от време [1].

⁵ Докладът е представен на студентската научна сесия на 21.05.2026 в секция „Финансова математика” с оригинално заглавие на български език: ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЗАВИСИМОСТТА МЕЖДУ ЦЕНИТЕ НА ПРОИЗВОДСТВЕНИТЕ РЕСУРСИ И СЕЛСКОСТОПАНСКИТЕ РАЗХОДИ В БЪЛГАРИЯ.

В настоящата работа, с помощта на корелационен и регресионен анализ [3], са изследвани степента на сила, вида и значимостта на връзката между три основни фактора - цените на дизеловото гориво, цените на карбамида и ИПЦ, и поведението на индекса на цените на стоките и услугите за текущо потребление в селското стопанство. За анализа са използвани годишни данни за индекс на селскостопанските разходи, ИПЦ, цени на дизел и цени на карбамид за България за периода 2008-2025г. Данните са взети от Световната Банка [2] и FUEL-PRICES.EU [4].

ИЗЛОЖЕНИЕ

Таблица 1. Описателни статистики за ИРСС, ИПЦ, цена на дизел и цена на карбамид за периода 2008-2025 г.

Показател	Средна стойност	Медиана	Стандартно отклонение	Коефициент на вариация	Коефициент на асиметрия	Коефициент на ексцес
ИРСС	110,872	103,250	17,210	296,182	1,379	0,473
Цена на дизел	1,146	1,100	0,161	0,026	0,227	-0,858
ИПЦ	3,778	2,800	4,359	19,004	1,588	2,280
Цена на карбамид	322,799	291,398	102,325	10470,382	1,432	1,918

От таблица 1 се вижда, че средната стойност на ИРСС е 110,872 пункта, същевременно сравнително високото стандартно отклонение, което е 17,210 показва забележими колебания на индекса във времето. Коефициентът на асиметрия е 1,379, който показва дясна (положителна) асиметрия, предполагаща наличието на няколко необичайно високи стойности, особено през кризисните години след 2021 г. Положителният коефициент на ексцес е 0,473 и показва лептокуртично разпределение с умерена концентрация около средната стойност и наличието на екстремни наблюдения.

Цената на дизела има средна стойност от 1,15 евро за литър и е близка с медианата, което предполага нормално разпределение. Коефициентът на асиметрия е 0,227 и показва лека (положителна) дясна асиметрия, а коефициентът на ексцес, който е -0,858 показва платикуртично разпределение, което предполага отсъствието на екстремни стойности.

Средната стойност на ИПЦ е 3,3778 пункта и коефициентът на асиметрия е 1,588, което показва положителна дясна асиметрия, сочеща наличие на няколко години с необичайно високи стойности на инфлацията. Коефициентът на ексцес е 2,280 и показва наличието на дебели опашки със силна концентрация около средната стойност и наличие на повече екстремни стойности от ИРСС и цената на карбамида.

Средната стойност на цената на карбамида е 322,799 долара на тон, а високото стандартно отклонение показва, че стойностите значително варират. Положителният коефициент на ексцес от 0,473 показва лептокуртично разпределение и наличието на екстремни наблюдения.

След направена проверка е установено, че с гаранционна вероятност, близка до 100%, цената на дизела има нормално разпределение, а всички останали променливи не са с нормално разпределение.

Таблица 2. Тест на Колмогоров-Смирнов и Шапиро-Уилки за нормалност на разпределенията

	Колмогоров-Смирнов			Шапиро-Уилки		
	Статистика	Степени на свобода	р-стойност	Статистика	Степени на свобода	р-стойност
Цена на дизел	0,167	18,000	,200*	0,960	18,000	0,606
ИРСС	0,270	18,000	0,001	0,753	18,000	0,000
Цена на карбамид	0,202	18,000	0,051	0,867	18,000	0,016
ИПЦ	0,266	18,000	0,002	0,815	18,000	0,002

Корелационен и регресионен анализ

Таблица 3. Корелационна матрица

		ИРСС	Цена на дизел	Цена на карбамид	ИПЦ
ИРСС	Коефициент на Пирсън	1	0,784	0,494	0,563
	р-стойност	.	0,000	0,019	0,007
Цена на дизел	Коефициент на Пирсън	0,784	1	0,475	0,363
	р-стойност	0,000	.	0,023	0,069
Цена на карбамид	Коефициент на Пирсън	0,494	0,475	1	0,808
	р-стойност	0,019	0,023	.	0,000
ИПЦ	Коефициент на Пирсън	0,563	0,363	0,808	1
	р-стойност	0,007	0,069	0,000	.

В таблица 3 е представена корелационната матрица, която показва ,че връзката между ИРСС и цената на дизела има най-висок корелационен коефициент на Питърсън на стойност 0,784 с гаранционна вероятност, близка до 100%. Следователно от всички фактори, покачването на цената на дизела оказва най-силно влияние върху покачването на ИРСС.

Най-слаба от разглежданите зависимости с ИРСС е тази на цената на карбамида с корелационен коефициент 0,494 – това е умерена зависимост, която е статистически значима с гаранционна вероятност 95%. Корелационният коефициент от 0,563 показва влияние на ИПЦ върху ИРСС с умерена сила и е статистически значим с гаранционна вероятност 99%.

Налице е силна, значима зависимост (с гаранционна вероятност, близка до 100%) между цената на карбамида и ИПЦ с коефициент на корелация 0,808, което предполага, че през периоди на висока инфлация цените на карбамида се увеличават.

Таблица 4. Обобщени статистики за модела

R	R ²	Изгладен R ²	Стандартна грешка на оценките
0,852	0,727	0,668	9,914

От таблица 4, след като е приложен многомерен линеен регресионен анализ, коефициентът на детерминация $R^2=0,727$ показва,че около 72,7% от измененията в ИРСС могат да бъдат обяснени чрез промените в цената на дизела, цената на карбамида и ИПЦ.

Изгладеният коефициент на детерминация $R^2=0,668$ потвърждава, че моделът запазва сравнително висока обяснителна способност дори след отчитане броя на включените фактори.

Резултатите от ANOVA анализа на таблица 5 показват, че регресионният модел е адекватен и включените независими променливи оказват съвместно статистически значимо влияние върху ИРСС с приблизително 100% гаранционна вероятност.

Таблица 5. ANOVA таблица за модела

	Суми от квадрати	Степени на свобода	Суми кв./ степ. на свобода	F	p-стойност
Модел	3659,119	3	1219,706	12,410	0,000
Остатъци	1375,977	14	98,284		
Общо	5035,096	17			

В таблица 6 са дадени оценките на параметрите на модела, техните стандартни отклонения и t стойностите:

$$\widehat{\beta}_1 = 29,134, \quad \widehat{\beta}_2 = 77,292, \quad \widehat{\beta}_3 = -0,045 \text{ и } \widehat{\beta}_4 = 2,039;$$

$$\sigma_{\beta_1} = 18,349, \quad \sigma_{\beta_2} = 16,966, \quad \sigma_3 = 0,042 \quad \text{и} \quad \sigma_4 = 0,937;$$

$$t_{\beta_1} = 1,588, \quad t_{\beta_2} = 4,556 \quad t_{\beta_3} = -1,063 \text{ и } t_{\beta_4} = 2,176.$$

Таблица 6. Коефициенти на модела

	Нестандартизирани коефициенти		Стандартизирани коефициенти	t	p-стойност	Статистика за мултиколинearност	
	B	Стандартна грешка	Beta			Толеранс	VIF
(константа)	29,134	18,349		1,588	0,135		
Цена на дизел	77,292	16,966	0,724	4,556	0,000	0,773	1,294
Цена на карбамид	-0,045	0,042	-0,267	-1,063	0,306	0,309	3,237
ИПЦ	2,039	0,937	0,516	2,176	0,047	0,347	2,885

От таблица 6 може да се построи линията на регресия:

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 X_{1i} + \widehat{\beta}_3 X_{2i} + \widehat{\beta}_4 X_{3i} = 29,134 + 77,292 X_{1i} - 0,045 X_{2i} + 2,039 X_{3i}$$

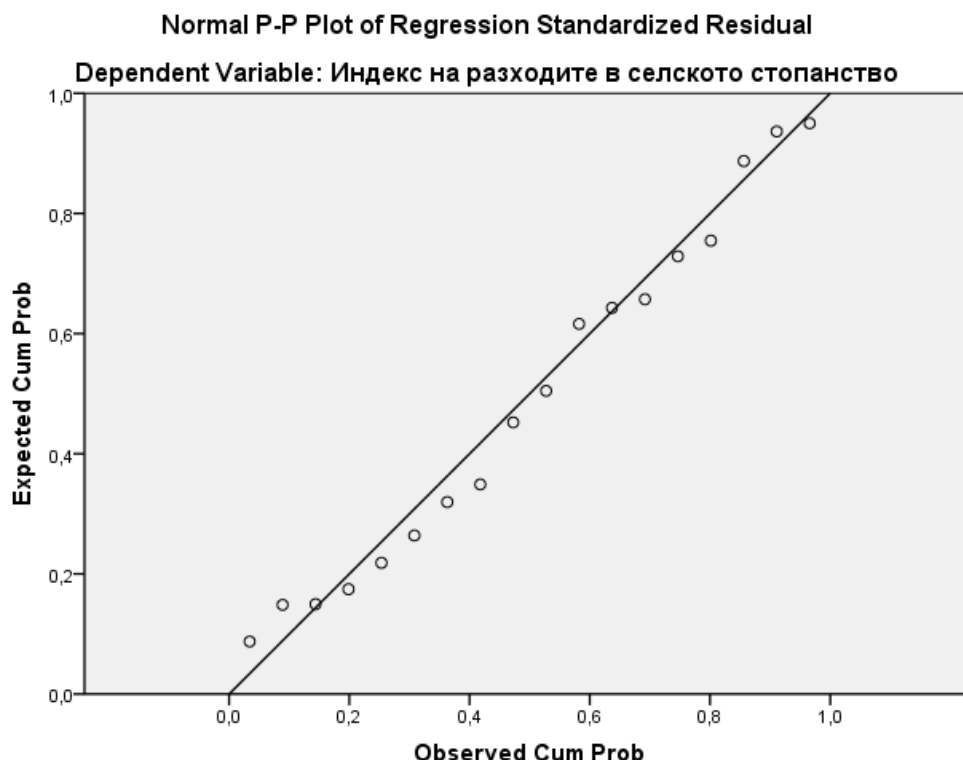
От таблица 6 се вижда, че цената на дизела оказва най-силно положително влияние (най-висок стандартизиран коефициент от 0,724) върху производствените разходи в селското стопанство, като това влияние е статистически значимо с гаранционна вероятност близка до 100%. Нестандартизиранят коефициент: $\widehat{\beta}_2 = 77,292$ показва, че при увеличение на цената на дизела с 1 евро на литър може да се очаква нарастване на ИРСС със 77,292 пункта.

Регресионният коефициент пред цената на карбамида е отрицателен $\widehat{\beta}_3 = -0,045$ и статистически незначим (p-стойност = 0.306 > $\alpha = 0.05$), което показва, че влиянието на цената на карбамида върху ИРСС не може да бъде потвърдено като статистически значимо в рамките на модела. Това не означава, че карбамидът няма влияние, а че част от неговия ефект вероятно се припокрива с влиянието на останалите фактори, особено с инфлацията.

От таблица 6 се вижда още, че ИПЦ оказва положително и статистически значимо влияние върху ИРСС с гаранционна вероятност 95% (p-стойност = 0,047). Това показва, че общите

инфлационни процеси в икономиката допринасят за увеличаване на разходите в селското стопанство.

Стойностите на VIF са под критичната граница от 10 (вж. [5]), което показва липса на сериозен проблем с мултиколинearността между независимите променливи.



Фигура 1. Графика на стандартизираните остатъци от модела

Графичното представяне на стандартизираните остатъци от модела (фигура 1) показва приблизително нормално разпределение, което потвърждава статистическата надеждност на регресионния модел.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

От изследването на зависимостта между цените на производствените ресурси и селскостопанските разходи в България за периода 2008–2025 г. могат да се направят следните изводи:

1. От извършения регресионният анализ се вижда, че цената на дизеловото гориво е факторът с най-силно влияние върху изменението на ИРСС.
2. Установено е, че инфлацията има статистически значимо положително въздействие върху разходите на земеделските производители, тъй като води до общо поскъпване на ресурсите и услугите в икономиката.
3. По отношение на цената на карбамида се наблюдава положителна корелация с индекса на разходите, но в рамките на множествения регресионен модел влиянието ѝ не е статистически значимо.
4. Приблизително 72,7% от измененията в ИРСС могат да бъдат обяснени чрез включените фактори.
5. Стойностите на VIF показват, че няма наличие на висока мултиколинearност между факторите в модела.
6. Построеният линеен регресионен модел потвърждава предпоставката за нормално разпределение на остатъците и не се наблюдават съществени отклонения от теоретичната линия.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2026 – ФПНО – 02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

- [1] Национален статистически институт, URL: <https://www.nsi.bg/>
- [2] World Bank Open Data, URL: <https://data.worldbank.org/>
- [3] Павлов, В., В. Михова, Е. Раева (2023). Статистика със SPSS. Авангард Принт, Русе.
- [4] FUEL-PRICES.EU, URL: <https://www.fuel-prices.eu/>
- [5] Gujarati, D. (2005). Basic Econometrics. Fourth edition, Mc – Graw – Hill, New York.

FRI-2.203-SSS-FM-06

STATISTICAL ANALYSIS AND TREND INVESTIGATION OF DRINKING WATER CONSUMPTION IN BULGARIA ⁶

Monika Simeonova

Financial Mathematics Student

University of Ruse “Angel Kanchev”

E-mail: monikavs@abv.bg

Assoc. Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics

University of Ruse “Angel Kanchev”

E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

Abstract: *This study examines the trends in drinking water consumption in Bulgaria for the period 2000–2024. The aim of the research is to identify whether there is a significant change in water consumption over time and to compare the consumption patterns across selected Bulgarian cities. The analysis is based on annual data from Sofia, Plovdiv, Varna, Burgas, and Ruse and is conducted using IBM SPSS Statistics.*

Key words: *Drinking water consumption, Statistical analysis, Trend analysis, Correlation analysis, SPSS.*

ВЪВЕДЕНИЕ

В съвременното динамично ежедневие често приемаме за даденост удобствата на модерния свят. Потреблението на стоки и услуги днес многократно надхвърля реалната необходимост от тях. Тъй като в наши дни те са леснодостъпни, става все по-трудно да се види реалната картина на контраста между това, което купуваме и онова, от което се нуждаем в действителност. Фокусът на обществото предимно върху консумацията често ни пречи да обърнем внимание на един сериозен глобален проблем – бързото изчерпване на земните ресурси. Наред с непрекъснатото нарастване на потреблението се увеличава и натискът върху природата. Част от тези ресурси се възстановяват трудно, а други са жизненоважни за съществуването на човека.

В настоящия проект основен обект на изследване е водата и нейното потребление. За целта на научната работа са използвани годишни данни за потреблението на питейна вода на глава от населението в пет от големите градове в България – София, Пловдив, Варна, Бургас и Русе, за периода от 2000г. до 2024 г. Данните са взети от Националния статистически институт (НСИ, вж. [1]). Целта на изследването е да се проследят дългосрочните промени и тенденции в страната. Причината за избора на тази тема е фактът, че проблемът с недостига на вода у нас става все по-тревожен. През последните години често се забелязват засушавания, пресъхване на водоизточници и въвеждане на водни режими в някои населени места. Всичко това налага спешната нужда да се изследва как големите градски центрове консумират този ресурс.

В таблица 1 е представено средното потребление на питейна вода от домакинства от общественото водоснабдяване, измерено в литра на ден за глава от населението.

За обработката на наличната информация е използван програмният софтуер IBM SPSS Statistics [2], като са приложени следните статистически методи за анализ на данните:

- **Дескриптивен статистически анализ** – за изчисляване на основните показатели като средни стойности, стандартно отклонение, минимуми и максимуми на потреблението;
- **Графичен анализ на динамиката** – за нагледно визуализиране на това как се е променяло потреблението през годините;

⁶ Докладът е представен на студентската научна сесия на 21.05.2026 г. в секция „Финансова математика” с оригинално заглавие на български език: СТАТИСТИЧЕСКИ АНАЛИЗ И ИЗСЛЕДВАНЕ НА ТЕНДЕНЦИИТЕ В ПОТРЕБЛЕНИЕТО НА ПИТЕЙНА ВОДА В БЪЛГАРИЯ.

• **Корелационен анализ** – този метод проверява дали съществува линейна зависимост между променливите.

Таблица 1. Използвана питейна вода

Година	София	Пловдив	Варна	Бургас	Русе	България
2000	146	90	103	113	121	100
2001	145	89	94	109	116	95
2002	128	87	90	103	105	90
2003	147	90	93	107	112	95
2004	148	89	88	102	105	94
2005	141	93	90	104	97	92
2006	143	93	96	113	103	96
2007	146	94	99	122	108	100
2008	141	95	99	107	105	99
2009	140	96	99	122	108	99
2010	140	96	97	111	100	97
2011	136	101	94	112	103	100
2012	134	102	95	116	113	102
2013	130	97	93	113	103	99
2014	128	94	90	108	99	96
2015	127	106	92	111	102	99
2016	127	98	94	112	103	100
2017	126	97	95	112	101	99
2018	126	95	94	109	100	99
2019	124	96	97	107	99	99
2020	127	102	101	108	105	102
2021	127	99	99	109	102	102
2022	125	101	105	111	104	103
2023	126	102	110	115	109	106
2024	129	104	112	117	112	110

ИЗЛОЖЕНИЕ

Анализ на дескриптивните статистически характеристики

Практическата част на изследването започва с дескриптивен статистически анализ, чрез който се обобщават основните параметри на водното потребление за петте избрани града за разглеждания 25-годишен период. В таблица 2 са представени изчислените чрез SPSS средни стойности, стандартните отклонения и стандартните грешки на средните величини.

Таблица 2. Описателна статистика за потреблението на вода по градове (N = 25)

Град	Средна стойност	Стандартно отклонение	Стандартна грешка на средното	Коефициент на вариация
Бургас	110,92	5,024	1,005	4.529%
Варна	96,76	5,967	1,193	6.167%
Пловдив	96,24	5,06	1,012	5.258%
Русе	105,4	5,795	1,159	5.498%
София	134,28	8,439	1,688	6.285%

От получените резултати се вижда, че София е на първо място в консумацията на вода със средна стойност от 134,28 л/ден/гл.нас. Столицата показва и най-високо стандартно отклонение (8,439), което означава, че през годините консумацията там е претърпяла най-сериозни колебания.

Най-ниски средни нива на потребление се наблюдават в Пловдив (96,24 л/ден/гл.нас.). Интересен е фактът, че въпреки големия брой жители, Пловдив има най-ниско средно потребление. Това наблюдение може да се дължи на по-ефективно управление на водната система в района.

Статистическа проверка на хипотези: One-Sample t-test

За целта на изследването е приложен t-тест за една извадка. За тестова стойност е използвано средното национално ниво на потребление на вода, което е 99 л/ден/гл.нас. Формулирани са следните хипотези:

- **Нулева хипотеза (H₀):** Няма статистически значима разлика между средното потребление на питейна вода в конкретния град и средното национално ниво.
- **Алтернативна хипотеза (H₁):** Има статистически значима разлика между средното потребление в града и националното ниво.

При $p > \alpha$ се приема H₀

При $p < \alpha$ се приема H₁,

където p е p -стойността или вероятността за получаване на наблюдавания резултат, при условие че нулевата хипотеза е вярна, а α е нивото на значимост, определено от изследователя.

За пресмятане на t-стойностите се използва следната формула [3]:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{n},$$

където:

- $\bar{X}$ е средната стойност на извадката за съответния град;
- μ е тестовата стойност (в този случай $\mu = 99$);
- s е стандартното отклонение на извадката;
- n е обемът на извадката ($N = 25$ години).

Резултатите са представени в таблица 3.

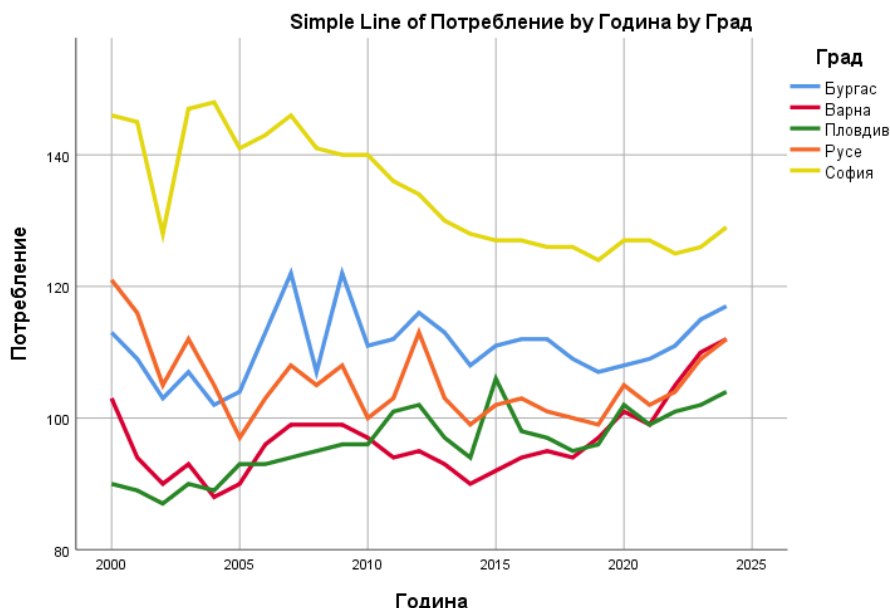
Таблица 3. One-Sample t-test

Град	t-стойност	Степени на свобода (df)	Значимост / p-value	Разлика в средните
Бургас	11,862	24	0,000	11,92
Варна	-1,877	24	0,073	-2,24
Пловдив	-2,727	24	0,012	-2,76
Русе	5,522	24	0,000	6,4
София	20,904	24	0,000	35,28

С гаранционна вероятност от 95% ($\alpha = 0,05$), резултатите от таблица 3 отхвърлят нулевата хипотеза (H₀) за всички от петте изследвани града с изключение на Варна, тъй като тяхното ниво на значимост е по-малко от 0,05 ($p < 0,05$). За Бургас, Русе и София се наблюдава статистически значимо по-високо потребление спрямо националната норма от 99 литра ($p = 0$). Пловдив и Варна имат значително по-ниско потребление като разликата в средните стойности е близка, съответно - 2,76 л. и -2,24 л., но в случая на Варна се приема нулевата хипотеза, тъй като значимостта (p) със стойност 0,073 надхвърля 0,05.

Графично представяне на данните

Фигура 1 дава възможност нагледно да се проследи дългосрочното потребление на вода за петте града.



Фиг. 1. Потребление на питейна вода на глава от населението за големите градове в България

В началото на изследвания период се наблюдава пик на потреблението, който е последван от рязък спад около 2002 г. – най-изразен за София и Русе. По информация от Националния институт по метеорология и хидрология (НИМХ, вж. [4]), 2000 година е класифицирана като една от най-сухите и горещи години в България за последните близо сто години. Водната криза, изразена в пресъхнали язовири и налагане на воден режим за някои населени места, е предполагаема причина за ниските нива на потребление около 2002 г.

След 2010 г. се наблюдава отчетливо разделяне на тенденциите между Столицата и останалите големи градове. Може да се предположи, че началото на спада на потребление за град София съвпада с период, в който „Софийска вода“ [5] инвестира големи суми във водосточната мрежа като по този начин загубите на питейна вода намаляват с 40% до 60%. Това може да се приеме като предполагаема причина за наблюдавания тренд за Столицата след 2010 г.

Корелационен анализ

С цел да се изследва връзката между потреблението на вода и годините е използван коефициентът на корелация на Пирсън. Той се изчислява като съотношение между ковариацията на двете променливи и произведението на техните стандартни отклонения, означава се с r и стойностите на коефициента варират между -1 и 1 [3]:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

където:

- x_i, y_i са отделните стойности съответно на Година и Потребление
- $\bar{x}, \bar{y}$ са средните стойности на съответните променливи.

Таблица 4 Корелация

Град	Коефициент на Пиърсън (r)	Значимост / p -value (Sig.)	Статистическа интерпретация на тренда
София	-0,830	0,000	Силна, статистически значима обратна зависимост
Пловдив	0,803	0,000	Силна, статистически значима права зависимост
Варна	0,525	0,007	Умерена, статистически значима права зависимост
Русе	-0,344	0,092	Слаба обратна зависимост (незначима при $\alpha=0,05$)
Бургас	0,213	0,307	Слаба права зависимост (статистически незначима)

Корелационната матрица показва голямо разделение в развитието на водния сектор в големите градски центрове на България за избрания период. София и Пловдив са в двете крайности като се наблюдава силно изразена линейна зависимост. За Столицата зависимостта е отрицателна ($r = -0,830$), което показва че с времето потреблението намалява. А за Пловдив се приема обратното тълкуване – има тенденция с времето потреблението да се повиши.

При Варна се наблюдава средна по сила, но статистически значима права зависимост ($p < 0.01$).

За Русе и Бургас се вижда, че коефициентите на корелация не са статистически значими при ниво на значимост 5%. Това означава, че в Русе и Бургас потреблението не следва строго определена права линия във времето и не се наблюдава ясен тренд.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение, изследването доказва, че секторът се нуждае от индивидуални стратегии на регионално ниво за управлението на водните ресурси. Получените данни предлагат готов инструмент за планиране на бъдещото потребление и изготвяне на стратегия, отговаряща на предстоящите климатични промени.

Текущият проект има за цел не само статистическо изследване, но и цел да послужи за онагледяването на информация, за която населението като активен потребител не се замисля. Колкото по-осъзнато обществото гледа на водните ресурси, толкова по-дълго ще можем да ги използваме.

99 литра на ден на глава от населението е средното потребление на питейна вода в страната за периода от 2000 до 2024 година! Това изглежда много, а всъщност е малка част от общо използваната вода в страната за периода, тъй като в изследваните данни е включено само потреблението на домакинствата. В процентно отношение това са само 5,4% от общото потребление за страната за периода.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2026 – ФПНО – 02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

- [1] Национален статистически институт, <<https://www.nsi.bg>>
- [2] IBM SPSS Statistics, <<https://www.ibm.com/products/spss-statistics>>
- [3] Павлов, В., В. Михова, Е. Раева (2023). Статистика със SPSS. Авангард Принт, Русе.
- [4] Национален институт по метеорология и хидрология, <<http://www.weather.bg/>>
- [5] Софийска вода, <https://www.sofiyskavoda.bg>

FRI-2.203-SSS-FM-07

COMPARISON BETWEEN EFFICIENCY OF FORECASTING USING ARIMA MODELS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE ⁷

Tsvetomira Dimitrova

Financial Mathematics Student,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: chvetomira3002@gmail.com

Chef Assistant Prof. Elitsa Raeva, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

Abstract: *This paper analyses and forecasts financial time series based on stock price data of UniCredit and Mediobanca for the period 2023–2025. ARIMA models, are applied to capture the main characteristics of the data such as trend and volatility. In addition, forecasting techniques based on artificial intelligence are used to provide a more flexible representation of uncertainty. The forecasts are generated for the period January–March 2026. A comparative analysis shows that classical models tend to produce more aggressive predictions, while artificial intelligence methods provide smoother and more stable forecasts. The results indicate that AI can be effectively used for forecasting financial time series, although predictions remain uncertain due to the stochastic nature of financial markets.*

Key words: *Time series analysis, ARIMA model, artificial intelligence, financial forecasting, stock prices, volatility, UniCredit, Mediobanca.*

ВЪВЕДЕНИЕ

През последните години анализът на времевите редове се утвърждава като важен инструмент за изследване и прогнозиране на финансови процеси [1]. С нарастващата динамика на пазарите и наличието на големи обеми от данни, необходимостта от точни прогнози става все по-значима за финансовите институции и инвеститори.

Времевите редове представляват последователност от наблюдения, подредени във времето, при които стойностите са взаимосвързани [2]. Основните компоненти на времевите редове обикновено включват тренд, сезонност, цикличност и случайни изменения [1], като анализът им позволява по-добро разбиране на поведението на данните и изграждане на прогнозни модели.

Традиционните статистически методи, като авторегресионните модели, са широко използвани за прогнозиране, но срещат затруднения при сложни зависимости и висока волатилност [1][2]. С развитието на изкуствения интелект се появяват нови подходи, които позволяват по-точно моделиране на такива данни [3].

В настоящата работа се изследват финансови времеви редове, базирани на данни за акциите на две банки-UniCredit и Mediobanca, за периода 2023-2025 г., като се извършва прогноза за първото тримесечие на 2026 г.

Целта на изследването е да се сравнят класически методи за прогнозиране с модели на изкуствен интелект и да се оцени тяхната ефективност при анализ на банкови данни [1].

⁷ Докладът е представен на студентската научна сесия на 21. 05. 2026 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: СРАВНЕНИЕ МЕЖДУ ЕФЕКТИВНОСТТА НА ПРОГНОЗИРАНЕТО ПРИ ИЗПОЛЗВАНЕ НА ARIMA МОДЕЛИ И ИЗКУСТВЕН ИНТЕЛЕКТ.

МЕТОДОЛОГИЯ НА ИЗСЛЕДВАНЕТО

За анализа на времевите редове е използва следната последователност от действия.

- **Проверка на данните за екстремни наблюдения.** В началния етап от анализа се извършва проверка за наличие на екстремни стойности (outliers). За тази цел се използват Boxplot графики, които позволяват да се направи предварителна оценка на разпределението на данните.

- **Анализ на автокорелационната функция (ACF) и частичната автокорелационна функция (PACF).** В тази стъпка се изследва зависимостта между наблюденията във времеви ред. Този анализ помага за определянето на подходящите стойности на модела.

- **Трансформация на данните.** С оглед постигане на стабилност на времеви ред се прилагат трансформации на данните. Най-често използваните подходи включват логаритмуване и диференциране, като целта е да се елиминират трендът и вариацията във времето.

- **Избор на ARIMA модел.** След трансформирането се пристъпва към избор на подходящ ARIMA модел. Общият вид на модела ARIMA(p, d, q) се представя чрез следното уравнение:

$$\nabla Y_t = \phi_1 \nabla Y_{t-1} + \phi_2 \nabla Y_{t-2} + \dots + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t + \mu \quad (1)$$

Моделът Y_t представя стойността на времеви ред в момент t , а Y_{t-1} е стойността в предходния период. Операторът за диференциране ∇Y_t показва промяната между две последователни стойности ($\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$). Параметрите ϕ_i - коефициент на параметра p , θ_i - коефициент на параметра q , ε_t - остатъци (бял шум), а μ - константа.

За избор на оптимален модел се използва Бейсовият информационен критерий (BIC), като се предпочита моделът с най-ниска стойност на критерия.

- **Анализ на остатъците.** След оценяването на модела се извършва анализ на остатъците с цел проверка на неговата адекватност. Изследват се ACF и PACF на остатъците, като се очаква те да не показват значима автокорелация.

Допълнително се прилага Portmanteau тест за проверка на независимостта на остатъците.

H_0 : Остатъците са независими и еднакво разпределени

H_1 : Остатъците не са независими и еднакво разпределение

$$Q_{emp} = n \sum_{j=1}^h \rho^2(j) \quad (2)$$

където n е броят наблюдения, h е броят лагове, а $\rho^2(j)$ са стойностите на автокорелационната функция. Получената стойност се сравнява с критичната стойност на χ^2 -разпределението при ниво на значимост $\alpha = 0.05$.

$$Q_t = \chi_{1-\alpha, h}^2 \quad (3)$$

- **Оценка на точността на прогнозата.** Разглеждат се следните форми на грешките, където с X_t е означена стойността на времеви ред в момента t , а с $\hat{X}_t$ - прогнозните за стойности:

Средното абсолютно отклонение (MAD):

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |X_t - \hat{X}_t| \quad (4)$$

Средноквадратичната грешка (MSE) отчита квадратичните отклонения:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \hat{X}_t)^2 \quad (5)$$

Средната абсолютна процентна грешка (MAPE) дава относителна оценка на грешката:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|X_t - \hat{X}_t|}{X_t} \quad (6)$$

Средната процентна грешка (MPE) позволява да се оцени посоката на отклоненията:

$$MPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \hat{X}_t)}{X_t} \quad (7)$$

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРАНЕ НА ВРЕМЕВИ РЕДОВЕ

Настоящото изследване използва реални финансови данни, свързани с цените на акциите на две банки - UniCredit, Mediobanca. Данните са взети от investing.com [4][5].

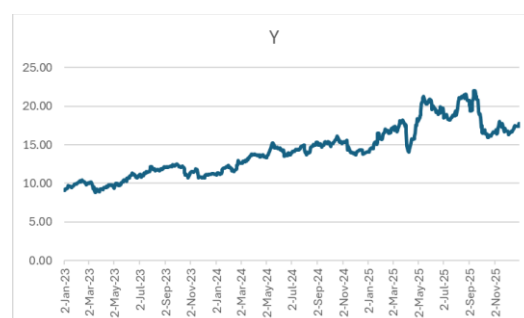
Данните обхващат периода от 02.01.2023 г. до 31.12.2025 г., като са събрани на дневна база, което позволява по-детайлен анализ на динамиката на цените и тяхната волатилност. Използваните времеви редове представят последователности от стойности, отразяващи ежедневните изменения в цените на акциите на съответните банки.

Събраните данни се използват като обучаваща извадка за изграждане на модели за прогнозиране. На тази основа се извършва прогнозиране за бъдещ период, обхващащ първото тримесечие на 2026 г. – месеците януари, февруари и март.

Преди прилагането на методите за прогнозиране, данните са подложени на предварителна обработка, включваща проверка за липсващи стойности, изглаждане и анализ на основните статистически характеристики. Това позволява по-точно моделиране и по-надеждни резултати при прогнозиране.



Фиг. 1. Историческите данни на UniCredit



Фиг. 2. Историческите данни на Mediobanca

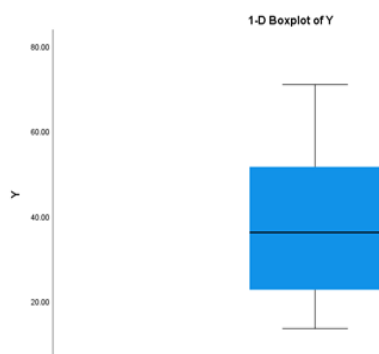
От фигура 1 може да се направи извод, че времевият ред на UniCredit показва относително по-стабилна динамика в сравнение с предходния период. Въпреки наличието на възходящ тренд има и спадове, което е типично за финансовите пазари.

Фигура 2 показва, че цената на акциите на Mediobanca се характеризира с колебания през разглеждания период. Въпреки че в отделни интервали се наблюдават по-рязки изменения, като цяло колебанията не са силно изразени, което предполага равномерна волатилност.

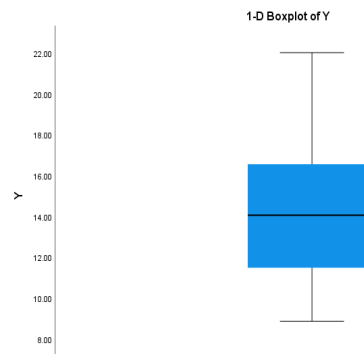
Наблюдават се по-рязки изменения в цените на акциите това може да бъде обяснено с влиянието на външни икономически фактори и пазарни събития.

Проверка за екстремни стойности, посредством box-plot графики

От фигури 3–4 се вижда разпределението на стойностите на времевите редове за разглежданите банки. Медианите се намират приблизително в средата, което показва относително симетрично разпределение. Липсата на ясно изразени екстремни стойности (outliers) показва, че данните са относително стабилни.



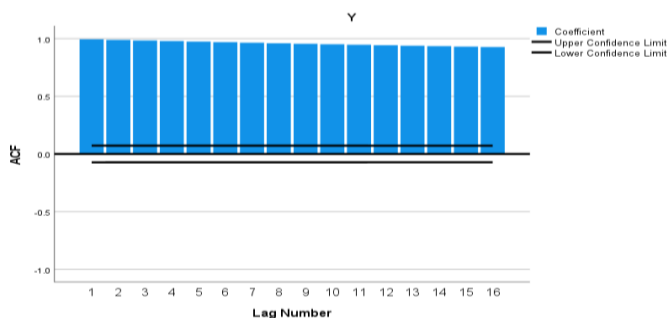
Фигура 3. Boxplot на UniCredit



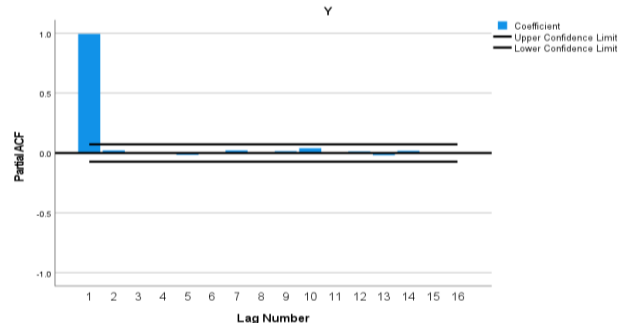
Фигура 4. Boxplot на Mediobanca

Във фигура 5, автокорелационната функция показва високи стойности за различните лагове, което означава, че съществува силна зависимост между текущите и предходните стойности на реда. Това е характерно за времеви редове с ясно изразен тренд и показва, че данните не са стационарни. Във фигура 6 се наблюдава, че първият лаг има значима стойност, докато останалите лагове са близо до нула. Това показва, че основната зависимост е между съседни стойности. Този резултат е полезен при определяне на подходящ модел за прогнозиране, като например авторегресионен модел. Аналогични резултати се наблюдават и при другата банка - Mediobanca.

Анализ на автокорелационна и частично автокорелационна функция



Фигура 5. Автокорелационна функция (ACF) на UniCredit



Фигура 6. Частична автокорелационна функция (PACF) на UniCredit

Преобразуване на времеви редове

С цел постигане на стационарност на времевите редове се прилага логаритмична трансформация, последвана от първа разлика. Логаритмуването се използва за стабилизиране на дисперсията и намаляване на влиянието на резките колебания в данните.

Диференцирането се прилага с цел премахване на тренда и елиминиране на зависимостта между последователните стойности. В резултат на тези преобразувания се получават стационарни редове, подходящи за моделиране чрез ARIMA [1].

Описаната процедура е приложена и за двете банки (UniCredit и Mediobanca), като резултатите показват сходно поведение на преобразуваните редове.

Избор на ARIMA модели - BIC критерий

Избираме подходящ ARIMA модел с минимална стойност на BIC критерия. След това правим проверка на няколко различни модела за да установи, че стойността на BIC критерия не отбелязва големи промени за различни видове модели.

Таблица 1. Оценка на модела на UniCredit

Model Statistics								
Model	Number of Predictors	Model Fit statistics			Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		Stationary R-squared	R-squared	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
Y-Model_1	0	.018	.998	-.445	7.340	11	.771	0

Таблица 2. Оценка на модела на Mediobanca

Model Statistics								
Model	Number of Predictors	Model Fit statistics			Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		Stationary R-squared	R-squared	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
Y-Model_1	0	.020	.994	-2.677	11.430	7	.121	0

След проверка на няколко различни модела се установи, че най-минимална стойност за BIC критерия за UniCredit е ARIMA (5, 1, 2) с BIC(-0.445). А за Mediobanca при ARIMA (6, 1, 5) е BIC(-2,677).

От Таблица 3 са взети стойностите за уравнението на UniCredit с ARIMA (5, 1, 2) в конкретния случай се пресмята по формула (1).

$$\nabla Y_t = -1.465Y_{t-1} - 0.700Y_{t-2} - 0.053Y_{t-3} - 0.116Y_{t-4} - 0.048Y_{t-5} - 1.429\varepsilon_{t-1} - 0.685\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t + \mu$$

За Mediobanca с ARIMA (6, 1, 5) аналогично е изразено същото уравнение.

$$\nabla Y_t = 0.218Y_{t-1} + 0.463Y_{t-2} - 0.058Y_{t-3} + 0.483Y_{t-4} - 0.278Y_{t-5} - 0.04363Y_{t-6} + 0.136\varepsilon_{t-1} + 379\varepsilon_{t-2} - 0.018\varepsilon_{t-3} + 0.492\varepsilon_{t-4} - 0.247\varepsilon_{t-5} + \varepsilon_t + \mu$$

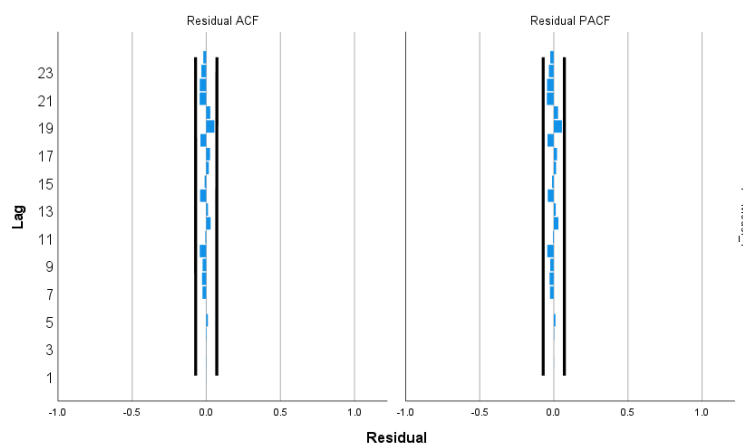
Таблица 3. Оценка на параметрите на UniCredit и Mediobanca

		UniCredit					Mediobanca			
		Estimate	SE	t	Sig.		Estimate	SE	t	Sig.
AR	Constant	0.002	0.001	3.296	0.001	Constant	0.001	0.001	1.386	0.166
	Lag 1	-1.465	0.338	-4.339	< 0.001	Lag 1	0.218	0.125	1.745	0.081
	Lag 2	-0.700	0.278	-2.514	0.012	Lag 2	0.463	0.716	0.646	0.518
	Lag 3	-0.053	0.070	-0.762	0.447	Lag 3	-0.058	0.800	-0.072	0.943
	Lag 4	-0.116	0.073	-1.590	0.112	Lag 4	0.483	0.718	0.673	0.501
	Lag 5	-0.048	0.064	-0.748	0.445	Lag 5	-0.278	0.386	-0.722	0.471
	Lag 6					Lag 6	-0.063	0.078	-0.809	0.419
MA	Defference	1				Defference	1			
	Lag 1	-1.429	0.335	-4.266	< 0.001	Lag 1	0.136	0.125	1.095	0.274
	Lag 2	-0.685	0.258	-2.650	0.008	Lag 2	0.379	0.596	0.636	0.525
	Lag 3					Lag 3	-0.018	0.637	-0.029	0.977
	Lag 4					Lag 4	0.492	0.608	0.808	0.419
	Lag 5					Lag 5	-0.247	0.360	-0.687	0.492

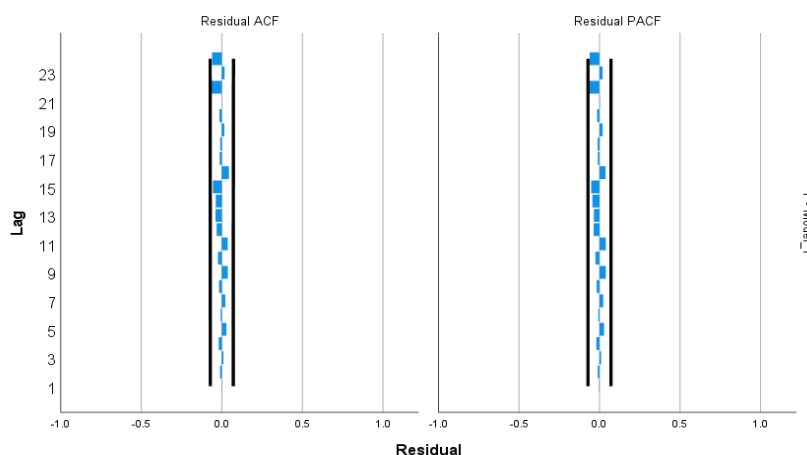
Анализ на остатъците

Фигура 7, представя ACF и PACF на остатъците за ARIMA (5,1,2) модела при UniCredit, се наблюдава, че всички стойности попадат в границите на доверителния интервал. Това показва липса на статистически значима автокорелация в остатъците.

От фигура 8. ACF и PACF на остатъците за ARIMA (6,1,5) модел при Mediobanca. Наблюдава се липса на статистически значима автокорелация, тъй като всички стойности попадат в границите на доверителния интервали.



Фигура 7. ACF и PACF на остатъците за ARIMA на UniCredit



Фигура 8. ACF и PACF на остатъците за ARIMA на Mediobanca

Оценка на грешките на двете банки

При провеждането на Portmanteau теста за времевия ред на UniCredit, Mediobanca са използвани параметрите $h = 24$ и $n = 759$. След заместване във формула (2) за изчисляване на емпиричната стойност на тестовата статистика и при изчисляване на критичната стойности (Q_t) по формула (3).

За UniCredit резултатите са : $Q_{emp} = 14.1785 < Q_t = 36,415$

За Mediobanca резултатите са: $Q_{emp} = 19,2054 < Q_t = 36,415$

Тъй като е изпълнено условието ($Q_{emp} < Q_t$) е изпълнено и за двете банки се приема нулевата хипотеза H_0 , че остатъците са независимо и еднакво разпределени случайни величини.

Таблица 4. Оценка на грешките на UniCredit и Mediobanca

	UnieCredit-ARIMA	Mediobanca-ARIMA	UniCredit-Изкуствен интелект	Mediobanca-Изкуствен интелект
MAD	0.0005	0.0001	0.0007	0.0001
MPE	0.014	0.011	0.014	0.011
MAPE	0.0067	0.007	0.0036	0.0085
MSE	664.8	37.06	443.73	25.64

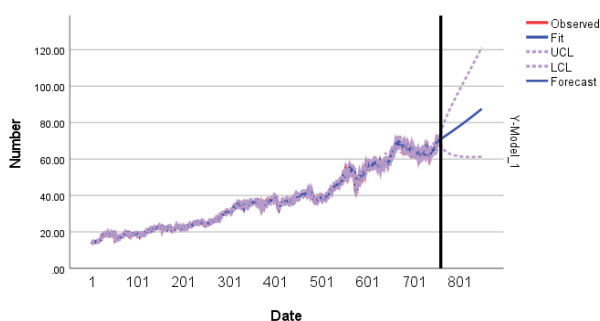
В таблица 4 са представени стойностите на показателите за грешка , изчислени по формули (4)-(7),за моделите на ARIMA и изкуствен интелект. Стойностите на показателя MAD показват, че и четирите модела имат много малки средни абсолютни отклонения, като най-ниска стойност се наблюдава при и двата модела на Mediobanca (0.0001).

Показателят MSE показва, че най-добра точност по отношение на квадратичната грешка има Mediobanca-Искусствен интелект (25.64), а при Mediobanca-ARIMA (37.06), което означава, че при прогнозиране и за двата модела се представят много добре, но моделът с изкуствен интелект има известно предимство. При UniCredit моделът с изкуствен интелект също показва по-добър резултат по MSE (443.73) в сравнение с ARIMA (664.8), което означава по-добра обща прогностична точност.

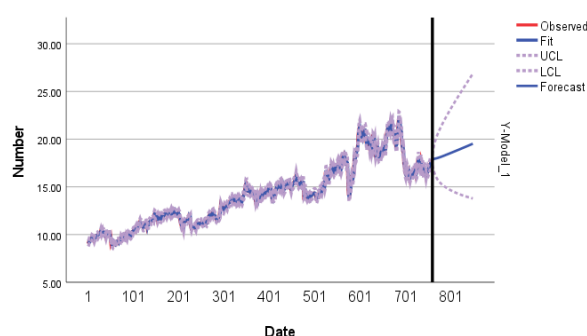
По отношение на MAPE, най-ниска стойност има UniCredit-Искусствен интелект (0.0036), което показва най-добра относителна точност сред всички разглеждани модели. При Mediobanca-ARIMA има малко по-ниска стойност на MAPE (0.007) спрямо модела с изкуствен интелект (0.0085), което означава, че в този случай ARIMA дава малко по-добра относителна прогноза.

Стойностите на MPE са ниски за всички модели (между 0.011 и 0.014), което показва липса на съществено изкривяване в прогнозите.

Следователно, може да се заключи, че моделите, базирани на изкуствен интелект, като цяло показват по-добро представяне, особено по показателя MSE, докато по MAPE резултатите са смесени. Най-добър общ резултат показва Mediobanca-Искусствен интелект, а за UniCredit моделът с изкуствен интелект също превъзхожда ARIMA по повечето показатели.



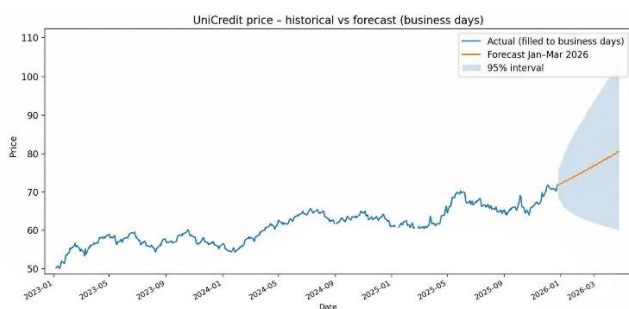
Фигура 9. Прогноза на UniCredit



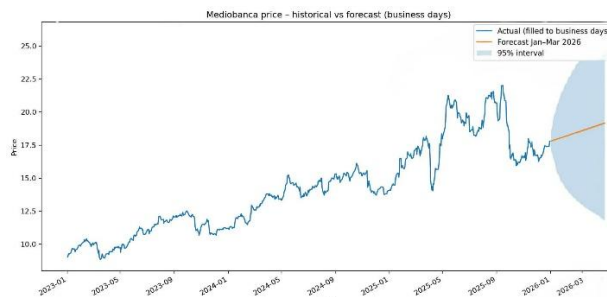
Фигура 10. Прогноза на Mediobanca

От анализа на двете фигури 9-10 се установява ясно изразен възходящ тренд за периода януари–март 2026 г. Наблюдава се и разширяване на доверителните интервали, което показва нарастваща несигурност във времето.

СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ

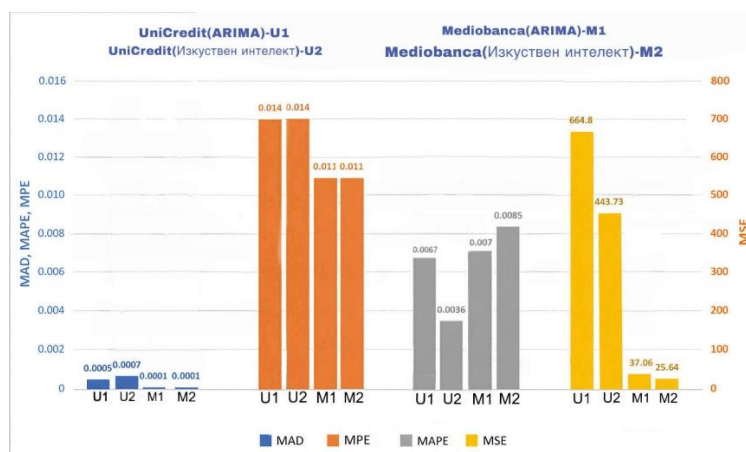


Фигура 11. Прогноза на UniCredit с AI



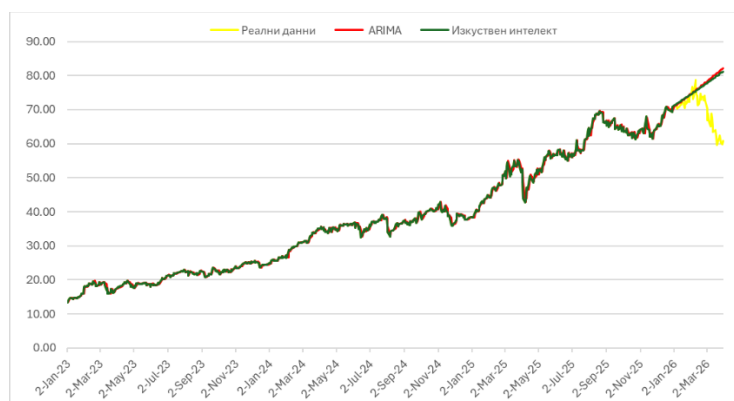
Фигура 12. Прогноза на Mediobanca с AI

Първите две прогнози на фигури 9–10 за UniCredit и Mediobanca са получени чрез класически статистически модел, като при тях се забелязват по-резки движения и по-голяма несигурност. От друга страна, прогнозите на фигури 11–12, базирани на изкуствен интелект, са по-равномерни и балансирани. Те отразяват по-добрата волатилност на акциите и дават по-реалистична представа за тяхното поведение, което включва както възходящи тенденции, така и периоди на колебания.



Фигура 12. Сравнение на грешките на моделите

Фигура 12 представя сравнителна оценка на точността на моделите ARIMA и изкуствен интелект при прогнозирането на цените на акциите на банките UniCredit и Mediobanca. За тази цел са използвани показателите чрез които се оценяват отклоненията между реалните и прогнозираните стойности. Анализът показва, че при UniCredit-изкуствен интелект се представя по-добре, тъй като има по-ниски стойности на MAPE и MSE. При Mediobanca двата модела показват близки резултати. Изкуственият интелект показва по-добра стойност по MSE, докато ARIMA дава по-добро MAPE. По показателите MAD и MPE не се наблюдават значими разлики.



Фигура 13. Прогноза на UniCredit с Реалните данни, ARIMA и Изкуствения интелект

Във фигури 13-14 се наблюдава спад в цените на акциите на двете банки след 2 март 2026г. Тъй като и двете банки се движат надолу едновременно, причината се дължи по-скоро на външни фактори (икономическа среда). И двата моделите не успяват напълно да предвидят този рязък спад.



Фигура 14. Прогноза на Mediobanca с Реалните данни, ARIMA и Изкуствения интелект

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата работа е представена методология за анализ и прогнозиране с ARIMA модели. Числовите резултати от направения анализ свидетелстват за адекватност на прогнозата, за това, че избраният модел е добър и може да бъде използван за практически цели.

Направено е сравнение с резултатите от прогноза, направена изцяло с изкуствен интелект, с цел да се провери нивото на доверие което може да се гласува към развитието на изкуствения интелект.

В резултат на проведеното изследване може да се заключи, че както класическите ARIMA модели, така и методите с изкуствен интелект са приложими при прогнозиране на финансови времеви редове. ARIMA моделите успяват да уловят основните зависимости в данните, но често показват по-резки изменения и по-голяма несигурност.

За конкретно разглежданите данни моделите с изкуствен интелект предоставят по-гладки, по-стабилни и в повечето случаи по-точни прогнози, което се потвърждава и от по-ниските стойности на грешките. Това показва, че изкуственият интелект има по-добра способност да улавя сложните зависимости във финансовите данни.

Прогнозирането с изкуствен интелект ще бъде все по-приложимо за напред, затова са необходими и по-голям брой изследвания, за да се проследи развитието и точността на прогнозата.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2026 – ФПНО – 02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

- [1] R. J. Hyndman, G. Athanasopoulos. *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts, 2021.- <https://otexts.com/fpp3/>
- [2] Statsmodels Development Team. *Time Series Analysis*. Statsmodels, 2024.- <https://www.statsmodels.org/stable/tsa.html>
- [3] J. Brownlee. *Deep Learning for Time Series Forecasting*. Machine Learning Mastery, 2018 - <https://machinelearningmastery.com/deep-learning-for-time-series-forecasting/>
- [4] UniCredit- <https://www.investing.com/equities/unicredito-historical-data> ,
- [5] Mediobanca- <https://www.investing.com/equities/mediobanca-historical-data>

INFORMATICS

FRI-1.407.1-SSS-I-01

HEXAGONAL SOFTWARE ARCHITECTURE IN AUTHORITATIVE SERVER GAMES⁸

Hristo Hristov, Student

Department of Informatics and Information Technologies

University of Ruse “Angel Kanchev”

Phone: +359 89 680 1366

E-mail: s236266@stud.uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Galina Atanasova, PhD – Supervisor

Department of Informatics and Information Technologies

University of Ruse “Angel Kanchev”

Phone: +359 88 562 9000

E-mail: gatanasova@uni-ruse.bg

Abstract: Hexagonal architecture (or ports and adapters) is widely adopted in software development for its benefits in testability, maintainability, and flexibility, but is rarely used in game development, where its abstraction layers introduce overhead. Authoritative client-server games present an edge case since the server is isolated and critical to the game's integrity, naturally aligning with hexagonal's principles. To our knowledge, the trade-offs between architectural isolation and performance-oriented paradigms remain sparsely addressed in this context. This paper reviews the relevant work, identifies likely reasons for the pattern's limited adoption in games, and applies the Software Architecture Analysis Method (SAAM) to assess its applicability to session-based authoritative game servers, outlining a hybrid approach as a basis for further empirical validation.

Key words: Game Development, Software Architecture, Ports and Adapters, Authoritative Client-Server.

ВЪВЕДЕНИЕ

С разширяването на капацитета и достъпността на мрежите, мултиплейър онлайн игрите значително се разпространиха [5], днес те са сред най-разпространените форми на дигитално развлечение и достигат милиарди потребители по света [18], като много от известните заглавия са именно мултиплейър игри. Техният дизайн налага редица изисквания към сървърната инфраструктура, тъй като сървърът трябва да отговаря за поддържането на състоянието на играта, синхронизацията и комуникацията [6], осигурявайки същевременно ниско закъснение, което е и основното предизвикателство за производителността на онлайн игрите [5]. Авторитарният сървърен модел е предпочитан заради възможностите за предотвратяване на измами и пиратство, както и заради своята надеждност и централизиран контрол, въпреки по-високите изисквания за мрежови трафик и разходи за инфраструктура [6]. При него сървърът валидира всяко действие на клиента, изпълнява симулациите и разпраща резултатите [2]. Това го прави едновременно критичен за интегритета на играта и естествено изолирана архитектурна единица.

Архитектурата портове и адаптери, предложена от Кокбърн още през 2005 [7], намира широко приложение в корпоративния софтуер, тъй като прави тестването и поддръжката значително по-лесни и намалява свързаността между системите [8]. Въпреки съответствието между нейните принципи и изолирания характер и нуждите на авторитарния сървърен модел, шаблонът рядко се споменава в литературата, свързана с разработката на игри, и се среща в проекти [20, 12]. Този доклад цели да запълни тази празнина като изследва причините за това, съвместимостта на шаблона с авторитарния модел на клиент-сървърната архитектура и компромисите, които е нужно да се

⁸ Докладът е представен на студентската научна сесия на 30.04.2026 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: ХЕКСАГОНАЛНА СОФТУЕРНА АРХИТЕКТУРА В ИГРИТЕ С АВТОРИТЕТЕН СЪРВЪР.

направят за прилагането му. Разгледа се приложението му в сесийно-базирани авторитарни игрови сървъри, посредством метода за анализ на архитектурни решения чрез сценарии (SAAM - Software Architecture Analysis Method).

ИЗЛОЖЕНИЕ

Авторитарната клиент-сървърна архитектура е широко разпространена в разработката на игри и се разглежда в редица публикации. Може да се забележи, че в много от тях класифицираните подсистеми се повтарят или се припокриват. Още през 1999 година в описанието на мрежовия модел на TRIBES се класифицират различните типове данни в играта като входни команди, събития и състояния на обекти, които се обработват от отделни подсистеми, като е отбелязано че същите са характерни и за едноранговите компютърни мрежи (P2P - peer-to-peer) или многосървърни архитектури [11]. В по-съвременни изследвания други автори, в по-широк преглед на мрежовите архитектури в игрите, стигат до сходна класификация, включваща синхронизация на състоянието, компенсация на закъснението, обработка на входни данни и сигурност, които са характерни за всички авторитарни сървъри, независимо от жанра [3]. Доказано е и че в някои ситуации изолирането на тези подсистеми или части от тях може да доведе до различни ползи. Оливейра например демонстрира, че в облачна среда изолирането на физическата подсистема и нейното разполагане на отделна, оптимизирана за изчисления виртуална машина води до значително ускоряване на времето за изчисляване на физиката и близо 68% ускорение, въпреки добавените мрежови разходи [21, 22]. Освен подобрената производителност това води до допълнителни ползи като по-гранулирано хоризонтално мащабиране, повторна употреба, по-добра изолация на грешки и възможност за използване на различни енджини според нуждите на играта [22]. Доколкото сме запознати, подобни изследвания обаче липсват в контекста на архитектурата портове и адаптери и близката до нея чиста архитектура (clean architecture) на Мартин [16], въпреки широкото им приложение в корпоративни системи. Повечето публикации се ограничават до техните принципи и концептуални примери, сложността за поддръжка и разработка [19], като емпиричните доказателства за ефектите върху производителността, която е от ключово значение за разработката на игри, са оскъдни.

Принципи и ползи на архитектурата портове и адаптери

Архитектурата портове и адаптери разделя основната бизнес логика на системата от външни зависимости като потребителски интерфейси, бази данни, мрежова свързаност и други външни услуги. Ядрото на системата комуникира с външния свят посредством интерфейси, наречени портове, които се имплементират от адаптерите [7, 8].

Портовете се разделят на два основни типа според посоката на контрол. Входящите портове описват операциите, които ядрото предоставя на външни услуги/клиенти, докато изходящите портове дефинират зависимостите, които ядрото изисква от инфраструктурата [8]. Всеки порт може да се имплементира от множество адаптери като промяната в адаптерите не изисква промени в ядрото. Това разделение носи няколко ползи - ядрото може да се тества изолирано чрез заместване на адаптерите с тестови двойници, което значително улеснява модулното тестване и намалява зависимостта от външната инфраструктура, също така технологичните решения, които често имат най-кратък жизнен цикъл в една система, се концентрират в адаптерите, оставяйки ядрото стабилно във времето. Съществено полезно за разработката на игри е и това, че чрез изричното дефиниране на границите между подсистемите се намалява свързаността и се улеснява паралелната работа в по-големи екипи.

Цел и обхват на текущата разработка

Настоящият доклад цели да систематизира съществуващата литература свързана с архитектурния шаблон портове и адаптери и авторитарните сървърни архитектури за мултиплейър игри като изследва, доколкото ни е известно, към момента рядко срещаната в литературата, оценка на компромисите между архитектурната изолация и изискванията за производителност при прилагането на шаблона в сесийно-базирани авторитарни игрови сървъри, посредством метода SAAM. Обхватът е ограничен до сесийно базирани игри, поради това, че при тях времето за живот на сървърния процес е ясно дефинирано, броят на едновременно свързаните клиенти е ограничен и архитектурните решения могат да се разгледат в изолация от проблемите на персистентните игрови

светове и масовото мащабиране. Не се разглеждат изцяло еднорангови (peer-to-peer) топологии, ММО архитектури с постоянно състояние, нито системи, при които сървърът действа само като реле, без авторитет върху състоянието на играта.

Причини за ограниченото приложение в разработката на игри

Точното определяне на причините за слабото застъпване на архитектурата портове и адаптери в разработката на игри е трудно. Сред вероятните фактори, които могат да бъдат идентифицирани от прегледа на литературата, са следните:

Влияние върху производителността. Игралните симулации работят в стриктно ограничено време за кадър, което обуславя предпочитането на парадигми като Data-Oriented Design [10] и базираната на него Entity Component System [13, 20], които предлагат значителни предимства спрямо обектно-ориентираните подходи [1, 24]. Тези парадигми не се съчетават добре с допълнителните слоеве абстракция и индиректните извиквания, които портове и адаптери въвежда, а всеки допълнителен слой в симулационния цикъл може значително да повлияе на закъснението [9, 17].

По-малко предварително планиране в сравнение с други видове системи. За разлика от корпоративните системи, при които ползите от архитектурна изолация се натрупват през години поддръжка и смени на технологии, много игрови проекти имат сравнително кратък активен живот след пускането си, което намалява стимула за инвестиция в по-сложна архитектура още в ранните етапи на разработка.

Педагогически аспекти. Игралната индустрия има дълга традиция на собствени архитектурни шаблони, документиращи в специализирана литература [12, 20], която почти не се пресича с корпоративната литература за софтуерна архитектура. Шаблоните, които се преподават и популяризират в игралната общност, са формирани около хардуерните ограничения и реал-тайм рендирането, а не около дългосрочна поддръжка и тестваемост.

Затруднения, предизвикани от инструментариума. Съвременните игрови енджини налагат собствени архитектурни модели, които могат да затруднят чистото прилагане на портове и адаптери, дори когато ползите от подобно разделение са разпознати. Архитектурата на мрежовата библиотека на Unity [23] е показателен пример, екипът разработил проекта признава ползите от разделянето на клиентската и сървърната логика, но в същото време документира конкретни затруднения, произтичащи от компонентния модел на MonoBehaviour, който усложнява поддържането на ясни граници между подсистемите.

Оливейра и др. [21, 22] от своя страна демонстрират, че при добре подбрани граници изолацията на подсистеми може да донесе значителни ползи в производителността, което поставя въпроса дали при сесийно-базиран авторитарен сървър подобни граници не могат да съвпадат с естествените портове на ядрото.

Методология на изследването

За оценка на приложимостта на архитектурата портове и адаптери в контекста на авторитарни сървърни игри е избран методът за анализ на софтуерна архитектура чрез сценарии (Software Architecture Analysis Method, SAAM). SAAM е сценарно-базиран метод, при който архитектурните решения се оценяват чрез набор от представителни сценарии за изменение или използване на системата, а не чрез абстрактни качествени критерии. Подходът включва пет основни стъпки: разработване на сценарии, описание на архитектурата, класификация на сценариите като директно поддържани или изискващи модификация, оценка на въздействието на всеки сценарий и анализ на взаимодействията между сценариите, които засягат един и същ архитектурен компонент.

Сценариите, използвани в настоящия анализ, са извлечени от прегледа на литературата и представят типични изменения, с които се сблъсква сесийно-базиран авторитарен сървър в хода на жизнения си цикъл:

- **C1.** Замяна на мрежовия транспортен слой (например преминаване от UDP-базиран собствен протокол към WebRTC или QUIC).
- **C2.** Замяна на хранилището за постоянно състояние.
- **C3.** Изолиране на физическата симулация на отделен изчислителен процес или виртуална машина, по подобие на подхода на Оливейра и др. [21, 22].

- **C4.** Добавяне на нов слой за валидация и анти-чийт без промяна на основната симулационна логика [15].
- **C5.** Добавяне на телеметричен и аналитичен подслой за наблюдение на сървърното поведение.
- **C6.** Интеграция с външна услуга за мачмейкинг или удостоверяване.
- **C7.** Замяна на физическия енджин.

Тези сценарии са подбрани така, че да обхванат както подсистеми с висока честота на взаимодействие с ядрото (C3, C7), така и такива с по-ниска честота (C2, C5, C6), което позволява анализът да очертае граничните условия за приложимост на шаблона. При наличие на конкретна имплементация в последващите етапи методът може да бъде допълнен с измервания на производителност за количествена оценка на компромисите. Сравнение с по-късни методи като АТАМ показва, че SAAM е по-подходящ за етапа на идентифициране на празнини, докато АТАМ би бил по-полезен при сравняване на конкретни имплементационни варианти [14].

Анализ и резултати

Прегледът на литературата показва, че подсистемите, които традиционно се класифицират в авторитарните сървъри - обработка на входни данни, симулация на състоянието, физическа симулация, мрежова синхронизация, компенсация на закъснението, валидация и анти-чийт, и постоянно съхранение формират ясни граници, които могат естествено да бъдат описани като портове на ядрото [11, 3, 4]. В частност, разделенията между симулацията и мрежовия слой, между симулацията и съхранението, и между симулацията и физиката се повтарят последователно в различни публикации, което предполага наличието на стабилен общ модел.

В същото време прилагането на сценариен анализ върху тези подсистеми очертава области, в които компромисът между изолация и производителност не е тривиален. Сценарии, които изискват висока честота на обмен между ядрото и адаптера, като например физическата симулация в симулационния цикъл на кадъра, вероятно ще понесат значителни разходи от допълнителните слоеве, докато сценарии с по-ниска честота на взаимодействие като постоянно съхранение, телеметрия, мачмейкинг, удостоверяване, са много по-благоприятни кандидати за чисто прилагане на шаблона. Това наблюдение съответства на резултатите на Оливейра и др. [21, 22], при които изолацията на физиката е оправдана именно защото комуникацията е групирана и предсказуема, а не разпиляна на всеки кадър.

В резултат на анализа се очертава хибриден подход, при който архитектурата портове и адаптери се прилага избирателно върху подсистемите с по-ниска честота на взаимодействие и по-висока вероятност за смяна на технологията, докато симулационния цикъл остава организиран според принципите на DOD и ECS. Подобен подход обаче не е емпирично валидиран в литературата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящият литературен преглед установи, че архитектурата портове и адаптери, въпреки доказаните си ползи в корпоративните системи и концептуалната съвместимост с авторитарния сървърен модел, остава слабо изследвана в контекста на разработката на игри. Прилагането на сценариен анализ върху типичните подсистеми на сесийно-базирани авторитарни сървъри показва, че шаблонът е приложим частично и че най-вероятният път напред е хибриден – с ясна граница между подсистеми, които печелят от изолация, и такива, които изискват плътно свързване в името на производителността. Конкретното положение на тази граница обаче не е количествено определено в съществуващата литература, което обосновава необходимостта от по-нататъшна емпирична работа. Последващи разработки по темата ще бъдат фокусирани върху имплементацията и емпиричното валидиране на текущия доклад.

REFERENCES

[1] Arantes, G.M., et al. (2025) 'Impact of data-oriented and object-oriented design on performance and cache utilization with artificial intelligence algorithms in multi-threaded CPUs', *arXiv preprint arXiv:2512.07841*.

- [2] Bernier, Y.W. (2001) *Latency compensating methods in client/server in-game protocol design and optimization*. Valve Software / GDC 2001. Available at: https://developer.valvesoftware.com/wiki/Latency_Compensating_Methods_in_Client/Server_In-game_Protocol_Design_and_Optimization (Accessed: 25 January 2026).
- [3] Bryant, B. and Saiedian, H. (2021) 'An evaluation of videogame network architecture, performance, and security', *Computer Networks*, 192, p. 108128. doi: 10.1016/j.comnet.2021.108128.
- [4] Chykrii, A. (2023) 'Online game based on server-authoritative architecture', *Sword-Us Conference Proceedings*, 1 (usc19-01), pp. 11–18. doi: 10.30888/2709-2267.2023-19-01-002.
- [5] Claypool, M. and Claypool, K. (2010) 'Latency can kill: precision and deadline in online games', in *Proceedings of the 1st Annual ACM SIGMM Conference on Multimedia Systems (MMSys '10)*. ACM, pp. 215–222.
- [6] Clincy, V.A. and Wilgor, B. (2013) 'Performance of cloud-based P2P game architecture', in *Proceedings of ICNS 2013: The Ninth International Conference on Networking and Services*. IARIA.
- [7] Cockburn, A. (2005) *Hexagonal architecture*. HaT Technical Report 2005.02. Available at: <https://alistair.cockburn.us/hexagonal-architecture> (Accessed: 11 January 2026).
- [8] Cockburn, A. and de Paz, J.M.G. (2024) *Hexagonal architecture explained*. Humans and Technology Incorporated.
- [9] Emmerich, P., Raumer, D., Wohlfart, F. and Carle, G. (2014) 'A study of network stack latency for game servers', in *2014 13th Annual Workshop on Network and Systems Support for Games (NetGames)*. IEEE. doi: 10.1109/NetGames.2014.7008960.
- [10] Fabian, R. (2018) *Data-oriented design: software engineering for limited resources and short schedules*. Self-published. Available at: <https://www.dataorienteddesign.com/dodbook/> (Accessed: 29 December 2025).
- [11] Frohnmayer, M. and Gift, T. (1999) *The TRIBES engine networking model*. Dynamix/GarageGames. Available at: <https://www.gamedevs.org/uploads/tribes-networking-model.pdf> (Accessed: 7 April 2026).
- [12] Gregory, J. (2018) *Game engine architecture*. 3rd edn. Boca Raton: CRC Press.
- [13] Harris, S.M. (2022) *Implementation and analysis of the entity component system architecture*. M.S. Thesis, California Polytechnic State University. doi: 10.15368/theses.2022.10.
- [14] Kazman, R., Klein, M. and Clements, P. (2000) *ATAM: method for architecture evaluation*. Technical Report CMU/SEI-2000-TR-004. Pittsburgh: Carnegie Mellon University, Software Engineering Institute.
- [15] Lehtonen, S.J. (2020) *Comparative study of anti-cheat methods in video games*. M.S. Thesis, University of Helsinki.
- [16] Martin, R.C. (2017) *Clean architecture: a craftsman's guide to software structure and design*. Upper Saddle River: Prentice Hall.
- [17] Munro, J., Appiah, K. and Dickinson, P. (2014) 'Investigating informative performance metrics for a multicore game world server', *Entertainment Computing*, 5(1), pp. 1–17. doi: 10.1016/j.entcom.2013.10.001.
- [18] Newzoo (2025) *Global games market report 2025 (Free edition)*. September 2025. Available at: <https://newzoo.com/resources/trend-reports/newzoo-global-games-market-report-2025-free-version> (Accessed: 26 April 2026).
- [19] Nugroho, Y.N., Kusumo, D.S. and Alibasa, M.J. (2022) 'Clean architecture implementation impacts on maintainability aspect for backend system code base', in *2022 10th International Conference on Information and Communication Technology (ICoICT)*. Bandung, Indonesia, pp. 134–139. doi: 10.1109/ICoICT55009.2022.9914890.
- [20] Nystrom, R. (2014) *Game programming patterns*. Genever Benning. Available at: <https://gameprogrammingpatterns.com> (Accessed: 27 March 2026).

- [21] Oliveira, S.S., Souza, C.H.R. and Carvalho, S.T. (2024) 'A multiplayer cloud gaming architecture for scalable physics', in *2024 IEEE Conference on Games (CoG)*. IEEE. doi: 10.1109/CoG60054.2024.10645556.
- [22] Oliveira, S.S. de, Souza, C.H.R., Silva, J.C. and Carvalho, S.T. (2023) 'Towards scalable cloud gaming systems: decoupling physics from the game engine', in *Proceedings of the 22nd Brazilian Symposium on Games and Digital Entertainment (SBGames '23)*. ACM. doi: 10.1145/3631085.3631225.
- [23] Unity Technologies (2024) *Boss Room architecture*. Netcode for GameObjects Documentation. Available at: <https://docs.unity3d.com/Packages/com.unity.netcode.gameobjects@2.5/manual/samples/bossroom/architecture.html> (Accessed: 1 April 2026).
- [24] Wingqvist, D., Wickström, F. and Memeti, S. (2022) 'Evaluating the performance of object-oriented and data-oriented design with multi-threading in game development', in *2022 IEEE Games, Entertainment, Media Conference (GEM)*. IEEE. doi: 10.1109/GEM56474.2022.10017610.

FRI-1.407.1-SSS-I-02

DESIGN OF A MULTIMODAL MIXED REALITY SYSTEM INTEGRATING MRTK AND MULTIMODAL LANGUAGE MODELS FOR CONTEXT-AWARE INTERACTION⁹

Teodora Daskalova – Student

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: tdaskalova044@gmail.com

Assoc. Prof. Boyana Ivanova, PhD – Supervisor

Department of Informatics and Information Technologies,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: bivanova@uni-ruse.bg

Abstract: Multimodal language models (MLLMs) and mixed reality (MR) technologies are increasingly converging to enable intelligent, context-aware interaction within spatial computing environments. This paper presents the design of a multimodal mixed reality system that integrates the Mixed Reality Toolkit (MRTK) with multimodal language models to enable context-aware and spatially grounded interaction. The proposed approach addresses the limitations of current mixed reality systems in real-time environmental understanding and the lack of spatial integration in multimodal AI. The methodology is based on a layered architecture, including user interaction through gaze, gesture, and voice, multimodal data acquisition, preprocessing and context encoding, communication with a cloud-based reasoning module, and spatial rendering of responses within the user’s environment. The system leverages technologies such as Unity, MRTK, HoloLens 2, and a multimodal AI model to support intelligent interaction. The proposed framework enables applications in industrial maintenance, emergency response, healthcare, education, and remote collaboration. Key advantages include hands-free interaction, enhanced situational awareness, and seamless integration of physical and digital information.

Key words: Mixed Reality, Multimodal AI, MLLM, Spatial Computing, HoloLens 2, Context-Aware Systems.

INTRODUCTION

Mixed reality (MR) is becoming increasingly present in everyday life, both for individual users and in professional environments. It allows users to interact with digital content directly within their physical surroundings, moving beyond traditional screen-based interaction. Today, many people already experience elements of mixed reality through mobile devices, particularly via augmented reality applications integrated into widely used platforms.

By combining physical and virtual environments, mixed reality enables a natural three-dimensional interaction between humans, computers, and the surrounding space. This capability is supported by advances in computer vision, graphical processing, display technologies, input systems, and cloud computing [3].

At the same time, recent developments in artificial intelligence have led to the creation of models capable of performing complex reasoning tasks. However, language models remain limited to processing textual data, while vision models can interpret visual inputs but often lack deeper reasoning capabilities. This gap between perception and reasoning presents a challenge in the development of more advanced intelligent systems.

To address this limitation, there has been growing interest in multimodal artificial intelligence systems, which are designed to process and integrate multiple types of data, such as text, images, and audio. By combining these modalities, such models demonstrate improved capabilities in both understanding visual content and performing complex reasoning tasks [5].

⁹ Докладът е представен на студентската научна сесия на 30.04.2026 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: ПРОЕКТИРАНЕ НА МУЛТИМОДАЛНА СИСТЕМА ЗА СМЕСЕНА РЕАЛНОСТ, ИНТЕГРИРАЩА MRTK И МУЛТИМОДАЛНИ ЕЗИКОВИ МОДЕЛИ.

Despite these advancements, current mixed reality systems still face difficulties in analyzing and understanding the surrounding environment in real time. At the same time, multimodal AI models, although powerful, are not yet fully integrated into spatial and interactive environments.

Therefore, the aim of this study is to develop a mixed reality system that integrates multimodal artificial intelligence in order to enable real-time environmental analysis and context-aware interaction.

EXPOSITION

Application of MLLM and Mixed Reality

Augmented reality (AR) has emerged as a promising technology in industrial training, as it enables real-time guidance directly within the user's physical environment. By overlaying step-by-step instructions onto real-world objects, AR systems improve training efficiency, reduce errors, and help users acquire new skills more quickly. However, despite these advantages, most existing AR solutions remain limited in practice. They often rely on predefined and rigid instruction flows, assuming that users follow procedures in a fixed order, which rarely reflects real-world conditions [4]. In practical scenarios, users frequently depend on complex technical manuals that are difficult to interpret and lack spatial context, making task execution challenging, especially for novice operators.

Traditional approaches based on computer vision require large amounts of labeled data and extensive training for each new environment, limiting their scalability and adaptability. At the same time, large language models (LLMs), although effective in interpreting textual instructions, lack awareness of the physical environment, leading to a semantic gap between digital instructions and real-world execution. To address these limitations, recent research has focused on multimodal large language models (MLLMs), which integrate visual and textual data into a unified framework. By combining perception and reasoning, these models enable more accurate interpretation of both machine states and user actions, supporting context-aware guidance in complex operational scenarios.

As a result, the integration of MLLMs with AR systems represents a significant step toward intelligent, adaptive, and real-time assistance, improving usability, reducing cognitive load, and enhancing task performance in industrial environments.

Recent research has demonstrated the potential of integrating multimodal large language models with augmented reality systems to enable context-aware visualization of real-world environments. Such systems are capable of analyzing visual input, understanding scene context, and dynamically overlaying relevant information directly onto physical objects. This approach enhances user interaction by providing intuitive, real-time feedback that is aligned with the surrounding environment.

Unlike traditional AR systems, that rely on predefined content or static overlays, these multimodal approaches enable adaptive and intelligent behavior by combining visual perception with advanced reasoning capabilities. As a result, users can receive meaningful guidance and contextual insights without relying on manual interpretation of instructions. This significantly improves situational awareness and supports more efficient task execution in complex environments [1].

The proposed system enables a wide range of applications across industrial maintenance, emergency response, healthcare, education, and remote collaboration, where spatially grounded multimodal reasoning enhances real-time decision-making and user interaction."

Table 1. Potential Application Domains of the Proposed Multimodal Mixed Reality System

Application Domain	Key Benefits
Industrial Maintenance & Inspection	• Reduces downtime • Assists non-expert users • Minimizes time spent searching documentation
Emergency Response & Disaster Management	• Faster decision-making • Improved situational awareness • Hands-free operation in critical scenarios
Medical Training & Assistance	• Interactive learning environment

	• Reduced cognitive load • Improved training accuracy
Education & Interactive Learning	• Experiential learning • Increased engagement • Better knowledge retention
Architecture, Engineering & Construction (AEC)	• Improves design and execution accuracy • Reduces human errors • Enhances on-site decision-making
Remote Expert Assistance	• Reduces need for expert travel • Speeds up troubleshooting • Enables global collaboration
Automotive & Equipment Diagnostics	• Empowers non-expert users • Speeds up diagnostics • Reduces repair costs
Retail & Product Interaction	• Enhanced customer experience • Supports data-driven decision-making
Navigation & Context-Aware Assistance	• Improves accessibility • Reduces confusion in complex environments
Knowledge Work & Research Support	• Bridges the physical–digital gap • Enhances productivity

Technologies used

The development of the proposed system is based on a combination of mixed reality technologies and artificial intelligence frameworks, enabling real-time interaction and context-aware processing.

➤ Mixed Reality Technologies

- Unity is used as the primary development environment for building the mixed reality application. It provides a flexible platform for creating real-time 3D experiences and supports integration with mixed reality devices such as HoloLens 2.
- The Mixed Reality Toolkit (MRTK) is utilized to implement user interaction and spatial awareness. It provides built-in support for input modalities such as gaze, gesture, and voice, as well as spatial mapping capabilities.
- HoloLens 2 serves as the hardware platform of the system, enabling real-time perception of the environment through sensors and allowing hands-free interaction with digital content in physical space.

➤ Artificial Intelligence (Gemini)

The artificial intelligence component of the system is based on the Gemini multimodal model, which is used for processing and reasoning over both textual and visual inputs. The model enables the system to analyze environmental data, interpret user queries, and generate context-aware responses in real time. By leveraging multimodal capabilities, Gemini supports the integration of perception and reasoning, which is essential for intelligent interaction in mixed reality environments [2].

Pipeline of the application:

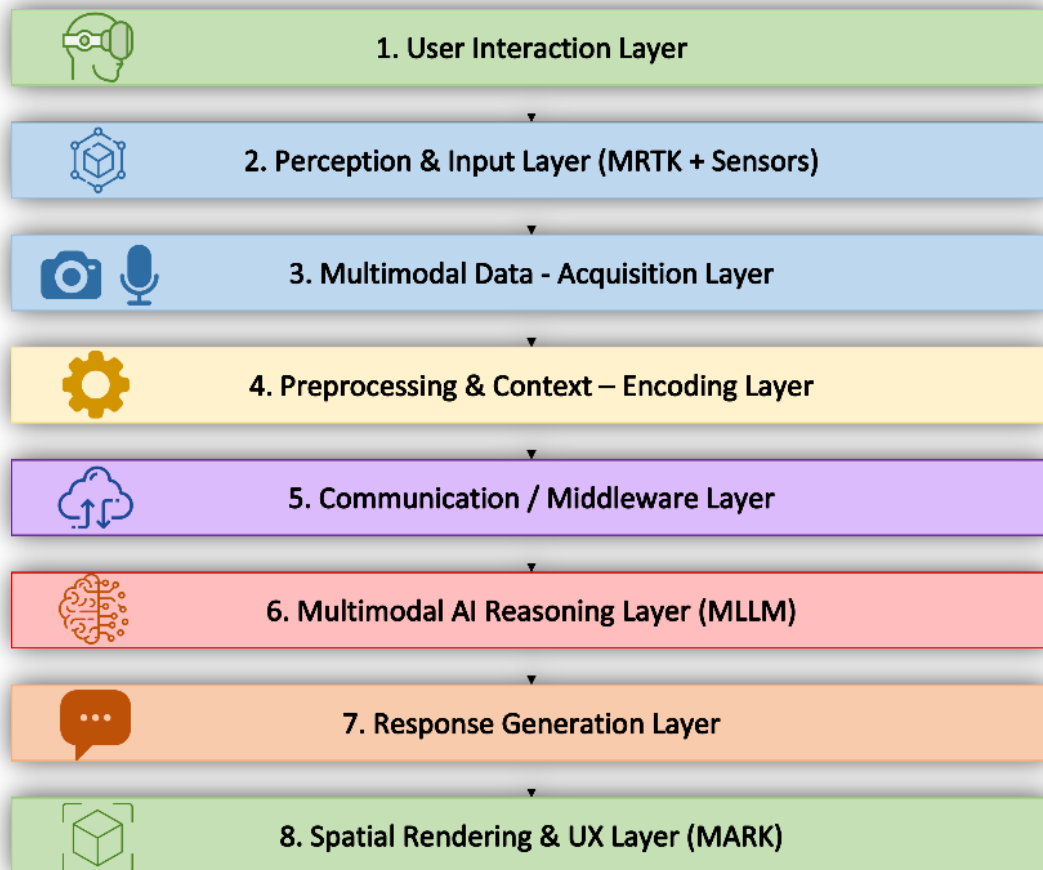


Figure 1. Pipeline of the application

Figure 1 presents the layered pipeline architecture of the proposed system, demonstrating the flow of data and interaction between the individual processing components.

Proposed System architecture

The proposed system follows a layered pipeline architecture that enables efficient interaction between the user, the physical environment, and the artificial intelligence components. The architecture is organized into several interconnected layers, complemented by an iterative feedback mechanism that supports continuous interaction:

1. User Interaction Layer

This layer handles human input modalities such as gaze, gesture (e.g., air tap), and voice commands. It serves as the entry point of the system, allowing the user to initiate and control tasks within the mixed reality environment.

2. Perception and Input Layer (MRTK + Sensors)

In this stage, the system utilizes MRTK and HoloLens sensors to interpret user intent and capture environmental data. Raw signals such as hand tracking, gaze direction, and speech input are transformed into structured interaction events.

3. Multimodal Data Acquisition Layer

This layer captures multimodal data from the environment and the user context, including RGB images, spatial positioning, and orientation. These inputs form the basis for further processing by the artificial intelligence system.

4. Preprocessing and Context Encoding Layer

The acquired data is transformed into structured representations suitable for AI processing. This includes operations such as image cropping (e.g., gaze-centered), compression, and metadata structuring, ensuring efficient context understanding.

5. Communication and Middleware Layer

This layer manages communication between the mixed reality device and external services. It handles data transmission, API calls, serialization, and latency optimization to ensure reliable interaction with backend AI systems.

6. Multimodal AI Reasoning Layer

At the core of the system, a multimodal language model processes the structured input data, performing perception, reasoning, and instruction generation based on both visual and textual information.

7. Response Generation Layer

The outputs generated by the AI model are formatted into structured responses, such as textual explanations, instructions, or UI elements, making them suitable for presentation within the mixed reality environment.

8. Spatial Rendering and User Experience Layer (MRTK)

This layer visualizes the generated responses in the user's physical environment using MRTK. The system renders dialogs, panels, and annotations anchored to real-world objects, enabling intuitive and immersive interaction.

9. Feedback and Interaction Loop

The system incorporates an iterative feedback mechanism that allows users to refine their queries and receive updated responses. This loop supports continuous human–AI interaction and improves system performance over time. Such an approach aligns with the principles of human-in-the-loop interaction, which are fundamental in modern mixed reality and multimodal AI systems.

CONCLUSION

The rapid development of mixed reality (MR) and multimodal artificial intelligence (MLLMs) creates new opportunities for intelligent human–computer interaction. However, existing solutions often treat these technologies as separate components, limiting their ability to provide context-aware assistance in real-world environments.

This paper presented the design of a multimodal mixed reality system that integrates the Microsoft Mixed Reality Toolkit (MRTK), HoloLens 2, and the Gemini multimodal language model within a unified layered architecture. The proposed approach enables the acquisition of multimodal environmental data, intelligent reasoning, and the spatial visualization of context-aware responses directly within the user's physical environment.

Unlike traditional mixed reality applications that primarily display predefined digital content, the proposed architecture introduces an additional layer of multimodal reasoning capable of interpreting both visual and textual information before generating adaptive responses. This integration allows the system not only to visualize information but also to understand the surrounding environment and assist users during task execution.

The proposed framework demonstrates the potential of combining mixed reality and multimodal artificial intelligence to support real-time decision-making across various application domains, including industrial maintenance, healthcare, education, emergency response, and remote collaboration. Although this work focuses on the architectural design of the system, it provides a solid foundation for the development of next-generation context-aware mixed reality applications.

FUTURE WORK

Future work will focus on the practical implementation and validation of the proposed multimodal mixed reality system. The next stage of the research includes the development of a functional prototype integrating Unity, MRTK, HoloLens 2, and the Gemini multimodal language model. Additional efforts will be directed toward improving spatial understanding through semantic scene analysis and more accurate object recognition. Future versions of the system may also incorporate enhanced interaction modalities,

such as continuous gesture recognition and eye-tracking, to provide more natural user interaction. Finally, experimental evaluation with real users will be conducted to assess the system's usability, performance, and applicability in domains such as industrial maintenance, healthcare, and education.

REFERENCES

- [1] Armandi, A., et al. (2025). Context-aware visualization in augmented reality using multimodal large language models. arXiv. <https://arxiv.org/>
- [2] Google. (2024). Gemini: A family of highly capable multimodal models. Google DeepMind. <https://deepmind.google/technologies/gemini/>
- [3] Microsoft. (2024). Mixed Reality documentation. Microsoft Learn. <https://learn.microsoft.com/windows/mixed-reality/>
- [4] Rokhsaritalemi, S., et al. (2026). Multimodal large language models for industrial augmented reality training and assistance. Computers in Industry. <https://www.sciencedirect.com/journal/computers-in-industry>
- [5] Zhang, D., et al. (2023). Multimodal foundation models: From specialists to general-purpose assistants. arXiv. <https://arxiv.org/abs/2309.10020>

FRI-1.407.1-SSS-I-03

ADAPTIVE STRATEGY LEARNING IN MULTI-AGENT IMPERFECT- INFORMATION GAMES: FROM EQUILIBRIUM COMPUTATION TO SAFE OPPONENT EXPLOITATION ¹⁰

Alexander Andreev –PhD Student

Department of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Tel.: +359 88 565 41 88
E-mail: arandreev@uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Tzvetomir Vassilev, PhD

Department of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 82 888 475
E-mail: tvassilev@uni-ruse.bg

Abstract: Autonomous AI agents increasingly operate in competitive environments where: Trading systems react to hidden market positions, security tools face adaptive attackers, and online platforms confront coordinated bots or colluding participants. These settings require agents to reason under hidden information, infer behavioral patterns from limited observations, and adapt without unacceptable risk. Imperfect-information extensive-form games provide the mathematical framework for studying this problem. Over the past decade, Counterfactual Regret Minimization (CFR) and related neural methods have enabled superhuman performance in large-scale games such as two-player and six-player poker. However, these systems largely compute fixed equilibrium strategies that do not adapt to specific opponents, and the safety guarantees that support exploitation in two-player settings fail in multiplayer environments. This paper surveys equilibrium computation, opponent modeling, and safe exploitation for imperfect-information games; identifies the gap at the intersection of adaptive play and multiplayer safety; and proposes three doctoral contributions: a Behavioral Adaptation Framework for real-time opponent inference, Multi-Agent Safe Exploitation heuristics grounded in regularization-based safety, and a domain-agnostic Evaluation Methodology for measuring adaptability and robustness across heterogeneous game environments.

Key words: Multi-agent Reinforcement Learning, Decision Making with Hidden Information, Behavioral Adaptation, Multiplayer Game Theory, Safe Artificial Intelligence

INTRODUCTION

Autonomous AI agents are increasingly deployed in open environments where success depends not only on prediction or control, but on strategic interaction: trading systems react to hidden market positions, security tools face adaptive attackers, platform moderators confront coordinated bots, and multi-agent services negotiate with unfamiliar human or artificial participants. In such settings, each decision is made under partial information about other actors’ goals, private knowledge, and future behavior. This makes isolated single-agent training insufficient. The central research problem is how an agent can infer behavioral patterns from limited observations, adapt its strategy in real time, and do so without exposing itself to unacceptable risk.

This challenge is, at its mathematical foundation, a problem in imperfect-information extensive form games. These games model sequential interaction among multiple players who hold private information, face stochastic outcomes, and act without full knowledge of either the environment state or the strategies of others. They are useful not merely as academic benchmarks, but as compact abstractions of the same strategic structure found in real-world multi-agent systems. Poker became the canonical testbed because it combines hidden information, sequential actions, stochastic outcomes, and self-interested players while still providing an unambiguous win criterion. Landmark systems – Counterfactual Regret Minimization (CFR) [1], Libratus [2], Pluribus [3], and ReBeL [4] – were validated mainly on poker variants, but the

¹⁰ Докладът е представен на студентската научна сесия на 30.04.2026 г. в секция „Информатика“.

underlying methods are domain-agnostic and have since informed work on broader strategic domains such as Diplomacy [7] and Stratego [8].

The past decade has seen remarkable progress in equilibrium-finding algorithms for progressively larger games. CFR was scaled via Monte Carlo sampling, neural function approximation, and real-time subgame solving, culminating in superhuman performance in both two-player [2] and six-player poker [3]. However, these systems share a fundamental limitation: they compute fixed equilibrium strategies that play identically against every opponent. Against sub-optimal adversaries – which includes virtually all real-world opponents, human or artificial – an equilibrium strategy is safe but blind, systematically failing to exploit detectable weaknesses. Furthermore, as games scale to many players, even the notion of “safe” becomes problematic: Nash equilibrium loses its minimax guarantee, and the research paradigm must shift from computing perfect solutions in controlled settings to enabling rapid adaptation in environments too complex for any single equilibrium to suffice.

This situation exposes three interrelated open problems. First, adaptation: how can an agent infer an opponent’s behavioral tendencies from observed actions and adjust its own strategy in real time, when the opponent’s private information and intentions remain hidden? Second, safety under adaptation: how can an agent exploit detected weaknesses while bounding worst-case losses – particularly in N -player settings where formal safety guarantees from two-player theory provably fail? Third, evaluation: how do we reliably measure whether an agent adapts well, across different games, opponent populations, and environmental conditions, when existing metrics each capture only a single dimension of performance?

The present doctoral research addresses these three open problems through three contributions: a Behavioral Adaptation Framework for real-time opponent inference, Multi-Agent Safe Exploitation heuristics for bounded-risk adaptation, and a domain-agnostic Evaluation Methodology for measuring adaptability and robustness across heterogeneous game environments. Each contribution is grounded in working implementations and evaluated against analytical solutions or reference frameworks, so that the research program remains experimental rather than purely synthetic.

REVIEW OF EXISTING SOLUTIONS

The algorithmic foundation for computing strategies in imperfect-information games was established by Counterfactual Regret Minimization (CFR) [1], which decomposes the problem of finding a Nash equilibrium into independent local subproblems at each decision point and guarantees convergence of the average strategy at a rate of $O(1/\sqrt{T})$. CFR made computational game theory practical but required scaling work to handle large games: Monte Carlo sampling reduced per-iteration cost, while neural function approximation replaced tabular storage with deep networks. The practical payoff of these advances was demonstrated by Libratus [2], which defeated top professionals in two-player no-limit poker, and Pluribus [3], which extended this to six-player poker. ReBeL [4] subsequently unified reinforcement learning and search under the public belief state framework – a probability distribution over hidden information, updated via Bayesian inference as play unfolds – bringing AlphaZero-style methods to imperfect-information games. Collectively, these systems represent a decade of progress in computing equilibrium strategies for progressively larger and more complex games.

However, these systems retain the limitation introduced above: they compute fixed strategies and play identically against every opponent. The question of adapting to a specific opponent was addressed by Southey et al. [5], who developed a Bayesian framework for opponent modeling that maintains a prior over opponent strategy types and updates it from observed actions. Even rough opponent models were shown to yield significant exploitation gains over equilibrium play. The formal treatment of safety during exploitation was provided by Ganzfried and Sandholm [6], who proved the Safety Theorem: in a two-player zero-sum game, any exploitation strategy anchored to a Nash equilibrium baseline cannot lose more than that baseline against any opponent, regardless of model accuracy. A safety parameter $p \in [0, 1]$ controls the tradeoff between exploitation potential and worst-case protection. This is a foundational result – but the Safety Theorem relies on the minimax property of Nash equilibrium, which holds only in two-player zero-sum games. In N -player or general-sum settings, Nash equilibrium does not protect against coalitions or correlated deviations, and the paper itself identifies the multiplayer extension as an open problem.

Two recent systems suggest a direction forward. Bakhtin et al. [7] achieved human-level play in Diplomacy – a seven-player game with coalition formation and betrayal – using π KL regularization, which anchors the agent not to a Nash equilibrium (computationally intractable and strategically meaningless in this setting) but to a human behavioral prior learned from data, with a KL-divergence penalty preventing excessive deviation. Independently, Perolat et al. [8] solved Stratego using Regularized Nash Dynamics (R-NaD), a model-free approach that uses regularization to converge to Nash equilibrium rather than cycling. Both systems demonstrate that regularization-based methods can tame learning dynamics at enormous scale – but neither adapts to specific opponents, and no existing work systematically studies the exploitation–safety tradeoff in multiplayer settings or provides a framework for evaluating adaptive behavior across different game environments.

Notably, the game-theoretic solvers currently in operational or near-operational use – security patrol randomization systems, simulated air-combat research agents, and auction-design engines underlying multi-billion-dollar spectrum allocations – all rely on fixed equilibrium or equilibriumadjacent strategies. They inherit, by design, exactly the three limitations this thesis targets: no runtime adaptation to specific opponents, no formal safety guarantees once the setting extends beyond two players, and no standardized methodology for evaluating adaptive behavior across heterogeneous strategic environments. The research gap identified in the literature is therefore not merely academic; it is the gap that separates today’s deployed systems from the next generation of operationally adaptive, safety-aware multi-agent AI.

PROPOSED SOLUTION

The review reveals the central gap in the current state of the art: we have formal safety guarantees for two-player exploitation and practical regularization for large multi-agent games, but no framework that connects them – providing safety-aware adaptive exploitation in multiplayer settings with systematic evaluation. The three contributions below address this gap from complementary angles: inference (how to model opponents), action (how to exploit safely), and measurement (how to evaluate the result).

Contribution 1: Behavioral Adaptation Framework

Existing game AI systems compute equilibrium strategies that are blind to opponent-specific behavioral patterns. Opponent modeling methods [5] can infer behavior but lack integration with the equilibrium-finding pipeline and do not account for the risk of model misspecification. The first contribution targets a general method for inferring opponent strategies from observed action sequences in real time and integrating those inferences into the agent’s decision-making process. Candidate architectures include augmenting the public belief state representation [4] with behavioral beliefs about opponent tendencies – extending the belief state from “what private information might the opponent hold?” to “what type of player is the opponent?” – as well as consistent opponent modeling techniques that guarantee convergence to the opponent’s true strategy given sufficient observations.

A critical design constraint is graceful degradation: when insufficient observations have been collected, the agent should default to equilibrium play rather than acting on unreliable inferences. The framework will be validated on structurally diverse games – card games with hidden hands (Kuhn Poker, Leduc Hold’em), sequential bidding games with hidden valuations (Goofspiel), and multiagent environments with partial observability (pursuit-evasion on grid worlds, simplified Diplomacy variants) – to demonstrate domain-agnostic applicability. A natural byproduct of this work is the ability to detect and classify anomalous behavior, with direct applications in fraud detection, bot identification, and collusion detection on multiplayer platforms.

Contribution 2: Multi-Agent Safe Exploitation

The Safety Theorem [6] provides formal guarantees for exploitation in two-player zero-sum games, but these guarantees provably fail in N -player settings where coalition dynamics invalidate the minimax foundation. Pluribus [3] demonstrated empirical success in six-player poker without any safety framework, but offers no theoretical grounding for when or why such success generalizes. The second contribution targets tractable approaches for safe exploitation in N -player imperfect information games, investigating several candidate directions.

The most promising direction adapts the π KL regularization paradigm from Diplomacy [7], constraining the exploitative policy to remain close to a safe reference strategy via a KL-divergence penalty. The reference strategy need not be a Nash equilibrium – it can be a population average, a learned behavioral prior, or an approximate equilibrium – making the approach applicable when exact equilibrium computation is intractable. An alternative direction explores equal-share baselines, using each player’s guaranteed minimum payoff as a safety anchor that bypasses equilibrium computation entirely. Validation is planned across N -player game variants including three-player card games, the four-player coalition formation game So Long Sucker, and multi-agent grid environments with partial observability.

Contribution 3: Evaluation Methodology

There is currently no standardized framework for evaluating adaptive agents across different game environments and opponent populations. Exploitability measures worst-case vulnerability but ignores adaptation quality; Elo rating measures relative strength but cannot detect cyclic dominance; and variance in imperfect-information games makes raw win rates statistically unreliable. The third contribution targets a domain-agnostic evaluation framework combining individual safety metrics (exploitability and its N -player extension), population-level ranking methods sensitive to non-transitive dynamics (α -Rank [9]), and variance reduction techniques (AIVAT [10]) for statistically reliable evaluation under the high variance inherent to imperfect-information games. The framework will be validated across heterogeneous game types to ensure that evaluations are comparable across structurally different strategic interactions.

Expected Outcomes

The scope of each contribution depends on algorithmic choices made during the study program, which continues through October 2026, and on the available resources. The progressions below distinguish the grounded starting point from the realistic thesis target; further depth is kept as a direction, not promised as an outcome.

Work on **Contribution 1** begins by showing that the adaptation framework outperforms static equilibrium play on the primary testbeds (Kuhn Poker, Leduc Hold’em). The realistic target is to extend this validation to structurally different game families – card games, bidding games, and grid-based environments – so that adaptation gains hold beyond card games. Convergence guarantees for opponent-type inference remain an open direction, depending on how the later study steps unfold.

Contribution 2 begins with empirical validation of existing heuristics – π KL regularization and equal-share baselines – on small N -player games, with failure modes characterized so that the exploitation–safety tradeoff is mapped rather than asserted. The realistic target is a method that combines these heuristics with opponent-aware or population-based dynamics in ways the literature has not yet covered. A theoretical extension of the Safety Theorem beyond two-player zero-sum games remains in view, but the thesis does not depend on reaching it.

Contribution 3 begins by ensuring that the evaluation framework reproduces known agent orderings and detects known non-transitive structures across benchmark games. The realistic target is to extend the framework to real-world behavioral data, such as anonymized game logs, so that it produces actionable insights beyond synthetic benchmarks. Specific findings cannot be pre-specified honestly; the value of the framework lies in what it reveals when applied.

Together, these grounded outcomes: a validated adaptation method, empirically characterized safety heuristics, and a working evaluation framework – already constitute a coherent thesis. Further depth from later study steps would build on this foundation rather than replace it.

CONCLUSION

The foundational phase of this doctoral research is complete. The literature review shows that the state of the art can compute equilibrium strategies at superhuman levels and exploit specific opponents safely in two-player settings, but no existing framework provides safety-aware adaptive exploitation in multi-agent environments with systematic evaluation. The three proposed contributions – Behavioral

Adaptation, Multi-Agent Safe Exploitation, and Evaluation Methodology – address this gap from complementary angles, with expectations calibrated to the available resources and timeline.

The methods under development are not specific to any single game or domain. They address adaptive strategic decision-making under uncertainty with multiple adversaries – a setting that arises wherever autonomous agents interact under hidden information. As such agents become more common in real-world systems, ensuring that they adapt safely and can be reliably evaluated becomes a practical necessity.

REFERENCES

- [1] Zinkevich, M., Johanson, M., Bowling, M. and Piccione, C. (2007). “Regret Minimization in Games with Incomplete Information.” *Advances in Neural Information Processing Systems* 20 (NeurIPS).
- [2] Brown, N. and Sandholm, T. (2018). “Superhuman AI for Heads-Up No-Limit Poker: Libratus Beats Top Professionals.” *Science*, 359(6374), pp. 418–424.
- [3] Brown, N. and Sandholm, T. (2019). “Superhuman AI for Multiplayer Poker.” *Science*, 365(6456), pp. 885–890.
- [4] Brown, N., Bakhtin, A., Lerer, A. and Hu, Q. (2020). “Combining Deep Reinforcement Learning and Search for Imperfect-Information Games.” *Advances in Neural Information Processing Systems* (NeurIPS).
- [5] Southey, F., Bowling, M., Larson, B., Piccione, C., Burch, N., Billings, D. and Rayner, C. (2005). “Bayes’ Bluff: Opponent Modelling in Poker.” *Proceedings of the 21st Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*.
- [6] Ganzfried, S. and Sandholm, T. (2015). “Safe Opponent Exploitation.” *ACM Transactions on Economics and Computation*, 3(2).
- [7] Bakhtin, A., Wu, D.J., Lerer, A., Gray, J., Jacob, A.P., Farina, G., Miller, A.H. and Brown, N. (2022). “HumanLevel Play in the Game of No-Press Diplomacy via Human-Regularized Reinforcement Learning and Planning.” *Science*, 378(6624), pp. 1067–1074.
- [8] Perolat, J., De Vylder, B., Hennes, D. et al. (2022). “Mastering the Game of Stratego with Model-Free Multiagent Reinforcement Learning.” *Science*, 378(6623), pp. 990–996.
- [9] Omidshafiei, S., Papadimitriou, C., Piliouras, G., Tuyls, K. et al. (2019). “ α -Rank: Multi-Agent Evaluation by Evolution.” *Nature Scientific Reports*.
- [10] Burch, N., Johanson, M. and Bowling, M. (2019). “AIVAT: A New Variance Reduction Technique for Agent Evaluation in Imperfect Information Games.” *Proceedings of the 33rd AAAI Conference on Artificial Intelligence*.

FRI-1.407.1-SSS-I-04

EVENTO PULS: AN INTELLIGENT EVENT DISCOVERY PLATFORM WITH NATURAL LANGUAGE SEARCH AND AUTOMATED CONTENT GENERATION¹¹

Velislav Haygarov, Student

Faculty of Natural Sciences and Education
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 882 662 637
E-mail: velislav.haygarov@abv.bg

Aykan Nedzhibov – Student

Faculty of Natural Sciences and Education
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 895 551 772
E-mail: aykannedjibovv@gmail.com

Nikolay Todorov – Student

Faculty of Natural Sciences and Education
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 882 738 417
E-mail: niki.htodorov@gmail.com

Teodora Daskalova – Student

Faculty of Natural Sciences and Education
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 877 667 025
E-mail: s236258@stud.uni-ruse.bg

Abstract: *The paper presents Evento Puls – a web application for event discovery developed with ASP.NET Core MVC during a 48-hour hackathon. The platform integrates a large language model agent (Sirma AI) for two main tasks: natural language query interpretation and automatic generation of event descriptions in Bulgarian. The model transforms free-text queries containing city names, music genres, temporal markers, and conversational additions in Bulgarian or English into a structured JSON intent, which is mapped to typed Entity Framework Core filters. A geocoding pipeline based on Google Maps enriches events with coordinates for map visualization. The work demonstrates how a small student team can combine modern .NET technologies with cloud-based LLM agents to deliver a functional software product.*

Key words: *event discovery, natural language processing, ASP.NET Core, large language models, geocoding, web application.*

REFERENCES

- [1] Lee, M., & Hsu, J. H. P. (2018/2025). Evaluating Data Fragmentation across Event-based Social Networks. CIL Technical Report No. 1 / manuscript submitted to ACM. Available through Google Scholar.
- [2] Kaufmann, E., & Bernstein, A. (2010). Evaluating the usability of natural language query languages and Interfaces to Semantic Web knowledge bases. *Journal of Web Semantics*, 8(4), 377-393. <https://doi.org/10.1016/j.websem.2010.06.001>.
- [3] Shah, C., White, R., Andersen, R., Buscher, G., Counts, S., Das, S., Montazer, A., Manivannan, S., Neville, J., Rangan, N., Safavi, T., Suri, S., Wan, M., Wang, L., & Yang, L. (2025). Using Large

¹¹ This Report is presented on a Student Scientific Session on 30.04.2026 in “Informatics” section and nominated for publication in Compiled edition of Reports Awarded with “Best Paper” Cristal Prize’26, as a hard copy (ISBN 978-954-712-826-2) and on-line on the Conference Website (<http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=bestPapers>).

Language Models to Generate, Validate, and Apply User Intent Taxonomies. *ACM Transactions on the Web*, 19(3), Article 34, 1-29. <https://doi.org/10.1145/3732294>.

[4] Hu, R., Yang, Y., Liu, S., Li, Z., Liu, J., Ding, X., Sun, H., & Ren, L. (2025). Large language model driven transferable key information extraction mechanism for nonstandardized tables. *Scientific Reports*, 15, 29802. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-15627-z>.

[5] Price, M. J. (2019). *C# 8.0 and .NET Core 3.0 – Modern Cross-Platform Development*. 4th ed. Birmingham: Packt Publishing.

[6] Westberg-Bladh, A. (2025). Static Analysis of LINQ Queries for Performance Optimization: An Index Aware Approach for Compile-Time Optimization of Database Queries. Degree Project in Computer Science Technology, KTH Royal Institute of Technology.

[7] Elnashar, A., White, J., & Schmidt, D. C. (2025). Prompt engineering for structured data: a comparative evaluation of styles and LLM performance. *Artificial Intelligence and Autonomous Systems*, 2025(2), 0009. <https://doi.org/10.55092/aiaas2025009>.

[8] Whitsel, E. A., Quibrera, P. M., Smith, R. L., Catellier, D. J., Liao, D., Henley, A. C., & Heiss, G. (2006). Accuracy of commercial geocoding: assessment and implications. *Epidemiologic Perspectives & Innovations*, 3, 8. <https://doi.org/10.1186/1742-5573-3-8>.

[9] Kagathara, S., Deolalkar, M., & Bhattacharyya, P. (2005). A Multi Stage Fall-back Search Strategy for Cross-Lingual Information Retrieval. *Symposium on Indian Morphology, Phonology and Language Engineering*, Kharagpur.

FRI-1.407.1-SSS-I-05

DEVELOPMENT AND IMPLEMENTATION OF THE 2D GAME “PIXEL COURIER”, WRITTEN IN C++ AND SFML (SIMPLE AND FAST MULTIMEDIA LIBRARY)¹²

Nikolay Todorov – Student

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse “Angel Kanchev”

Phone: +359 882 738 417

E-mail: niki.htodorov@gmail.com

Chief Assist. Prof Vasil Kozov, PhD – Supervisor

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse “Angel Kanchev”

Phone: +359 878 352 280

E-mail: vkozov@uni-ruse.bg

Abstract: *Abstract: The paper presents the design and implementation of “Pixel Courier” – an original 2D game developed in C++ with the help of SFML. The project combines player movement, collision handling, controlled spawning of NPC characters, package collection and delivery logic, a timer, score handling, and external configuration files for positions, hitbox parameters, and vehicle trajectories. The architecture separates resource loading, sprite creation, object positioning, game state, traffic, startup error handling, and end-of-game visualization. A Windows x64 release package has been prepared, including an executable file, dynamic libraries, and the required resources. The result is a working prototype with practical value for learning, portfolio presentation, and future extension.*

Key words: C++, SFML, 2D game, game loop, collision detection, game architecture, configuration files.

INTRODUCTION

The development of interactive software products involves technical, organizational, and creative tasks at the same time. When creating a real-time computer game, resource management, graphical rendering, user input processing, collision detection, state management, and preparation of a finished product must be combined. This makes a game project a suitable practical environment for applying knowledge from software engineering.

The present paper describes the development of “Pixel Courier” - a 2D game implemented in C++ using the SFML multimedia library. The main idea is that the player controls a courier in an urban environment, accepts packages from NPC characters (non-playable characters), delivers them to the courier base within a limited time, and avoids moving traffic. The goal of the development is not only to implement a playable prototype, but also to build a clear modular structure that can be maintained and extended.

The practical value of the project lies in combining several types of tasks characteristic of real applications: content configurability, missing-resource checks, work with graphics and sound, reaction to user input, and preparation of a distribution that can be launched outside the development environment.

EXPOSITION

Concept and Game Scenario

The game scenario is built around a short and understandable cycle: moving the character across the map, contacting an available NPC character, remaining in place to accept a package, returning to the courier base, and registering a successful delivery. This cycle creates a clear goal in every game session, while also requiring the selection of a safe route because the urban environment contains static obstacles and moving vehicles.

¹² Докладът е представен на студентската научна сесия на 30.04.2026 г. в секция „Информатика“.

The map does not function only as a background. It contains visual landmarks, roads, traffic zones, collision objects, and interaction areas. In this way, the user must simultaneously plan movement, react to dynamic hazards, and monitor the remaining time. This gives the game an arcade character without making the controls unnecessarily complex.

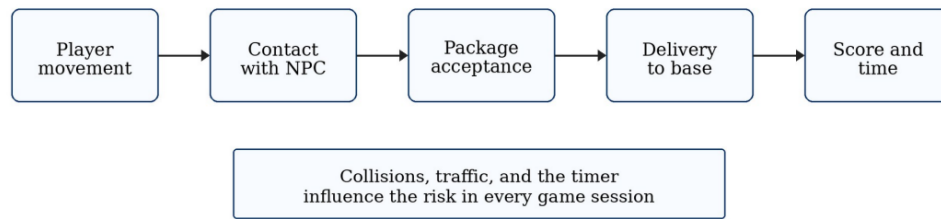


Figure 1. Main gameplay process in “Pixel Courier”

Figure 1 presents the main gameplay cycle in “Pixel Courier”. The player moves across the map, finds an NPC character, accepts a package, and delivers it to the base, while collisions, traffic, and the timer influence the risk throughout the session. Since activity and process diagrams are used to represent workflows and sequences of actions, the figure serves as a visual explanation of a standard game session [1].

Software Environment and Architecture

The implementation is written in C++, while SFML is used to create the window, render graphical objects, process input, work with fonts, and play sound. This combination allows direct control over the game loop and code structure without dependence on a heavy game engine. For an educational and demonstration project, this is important because the core mechanisms remain visible to the developer.

The architecture is modular. Texture loading, sprite creation, positioning of game objects, player movement, vehicle movement, collision checking, package logic, NPC spawning, timer, score, end-of-game behavior, and startup checks are separated. This separation improves readability and allows individual parts to be developed independently.

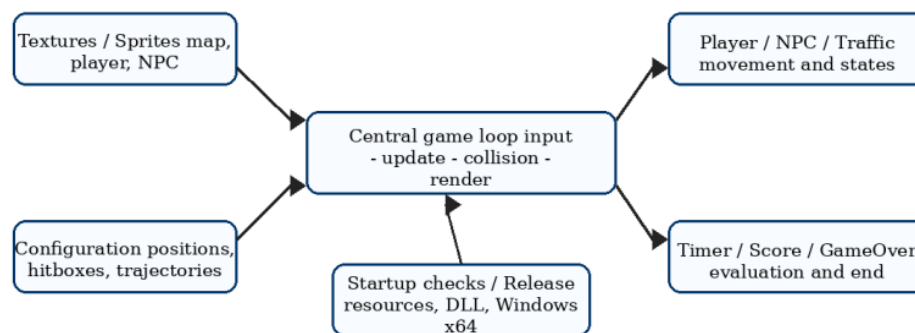


Figure 2. Logical organization of modules and resources

Figure 2 shows how the separate modules and resources are connected around the central game loop. Textures, sprites, and configuration files provide data to the main logic, while the modules for the player, NPC characters, traffic, timer, score, and game over state update the state of each session. The diagram is used as an architectural summary and shows why the project is divided into independent parts instead of concentrating all logic in a single file.

Configuration Approach and Resource Management

An important characteristic of the project is the use of external configuration files for object positions, hitbox parameters, and vehicle movement. In this way, part of the settings are not hardcoded and can be corrected without recompilation. This approach is useful when aligning the map, dangerous zones, spawn points, and traffic routes.

Graphical and sound resources are organized in separate directories. Textures and sprites are loaded centrally, while the visual representations of the character, buildings, NPC characters, and vehicles are managed consistently. The project uses original resources, including separate sound files for in-game events such as package acceptance, delivery, collision, or the end of a game session.

Figure 3 shows sample graphical assets used in the project – a vehicle, a decorative object, NPC characters, a courier with a package, and a sample building from the urban environment. They are loaded as textures and visualized through sprites, with each object receiving a specific position, scale, and, when necessary, a separate hitbox for interaction or collision.

Separating the visual resources into independent files makes it easier to replace and extend the content without changing the main game logic. Vehicles are used in the traffic system, NPC characters are used when accepting packages, the courier with a package shows the current state of the player character, and building assets serve to construct the visual urban environment.

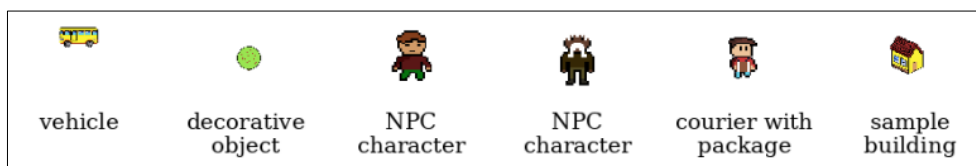


Figure 3. Sample graphical assets used in “Pixel Courier”

Table 1. Main modules and responsibilities in the project

Module	Main responsibility
TexturesLoad / SpritesLoad	Loading textures and creating visual objects for the map, player, NPC characters, and vehicles.
PositionManagement	Reading configurations and positioning game elements, dangerous zones, and hitbox parameters
Player Movement	Managing movement, orientation, animation state, and the view relative to the player character
Collision	Checking collisions with static objects and dynamic obstacles.
PackageCollect / PackageDelivery	Accepting and delivering packages, requiring a short stay in place, and updating game progress.
NpcsSpawn / MovingVehicles	Controlled spawning of NPC characters and updating traffic along predefined trajectories
Clock / Score / GameOver	Managing time, score, session end, and visual feedback.
StartupErrorLogs	Checking for missing resources and providing more controlled behavior when startup problems occur.

Implementation of Game Logic

The game logic is based on a central game loop in which keyboard input, updates of active objects, collision checks, timer changes, and frame rendering are processed sequentially. This model is fundamental for real-time applications because it maintains a continuous connection between input, simulation, and visualization [2].

Player movement is connected with the current animation state and direction of movement. In addition, the view of the map is controlled so that the active part of the environment remains visible.

Collisions restrict movement through static obstacles and create risk when crossing traffic areas. This makes movement a central gameplay mechanic rather than only a technical function.

The package system is divided into two stages - acceptance and delivery. When contacting an NPC, the player must remain within a defined distance and avoid interrupting the interaction for a short period of time in order to accept the package. After that, the goal changes to the courier base, where the delivery is registered as successful and the score and time are updated. In this way, the project creates a repeatable but dynamic task cycle.

NPC Characters, Traffic, and Time

NPC characters appear according to a controlled scheme, which makes it possible to set the rhythm of the game session and avoid overloading the map. Moving vehicles use predefined trajectories and speeds, which facilitates the modeling of different traffic lanes. Each such object participates in collision checks through separate hitbox parameters, so that the visual size and the actual collision zone can be adjusted.

The timer is a key mechanism because it connects all other systems into a common evaluation of performance. A successful delivery may improve the score and extend the active session, while collisions, delays, or an incorrect route reduce the player's effectiveness. Thus, the project combines spatial orientation, reaction, and planning.

Reliability, Startup, and Distribution

At startup, the application checks for the availability of textures, fonts, sounds, an icon, configuration files, and other required resources. This reduces the risk of an uncontrolled crash when a file is missing and helps locate the problem faster. Such a check is especially important for a project that must be presented and launched on different computers.

The development includes preparation of a Windows x64 release package. It contains the executable file, the required dynamic libraries, the resource folders, and the configuration data. In this way, the game can be launched outside Visual Studio, which is an essential criterion for application completeness and for demonstrating it to an external audience.

Testing and Evaluation of Results

Testing was carried out as manual functional testing by the developer. The main scenarios were checked: application startup, resource loading, character movement, collision with static objects, collision with moving vehicles, NPC character spawning, package acceptance, delivery to the base, timer changes, score accumulation, and end-of-game visualization. Error scenarios involving missing files were also examined separately because they are critical for a release package.

The evaluation of the results shows that "Pixel Courier" is a completed working prototype. The most significant result is the integration of several interconnected systems into a compact project: graphics, configuration, dynamic objects, collisions, time, score, error handling, and distribution. Due to the absence of an automated log with measurements, the tests are considered a functional check rather than a statistical experiment with a measurable sample.

Future Development Opportunities

In future development, the system can be expanded with more levels, richer behavior of NPC characters, progress saving, a settings menu, difficulty selection, more detailed statistics for game sessions, and a clearer separation between logic, data, and visualization. Part of the code could also be reorganized at a higher level of abstraction, for example through common base classes for dynamic objects or through a centralized state management system.

CONCLUSION

The development of “Pixel Courier” shows that even a relatively small 2D project can be considered a complete software system when it includes clear architecture, configurable content, state control, error handling, and a finished distribution. The project combines game logic and engineering discipline by providing not only a playable result, but also a practical demonstration of programming and software engineering knowledge.

The obtained result can be used as a basis for further development of the game, as an educational example of 2D game development, and as a portfolio project that follows the entire process from idea and prototype to release package.

REFERENCES

[1] Rumbaugh, J., Jacobson, I., & Booch, G. The Unified Modeling Language Reference Manual. Addison-Wesley, 1999.

[2] Mileff, P. (2023). Game loop: the heart of the game engine. Production Systems and Information Engineering, 11(3), 56-68.

[3] SFML Development Team. SFML Documentation: Graphics, Window, Audio and System modules.

[4] Stroustrup, B. The C++ Programming Language. Addison-Wesley. [5] Gregory, J. Game Engine Architecture. CRC Press.

**UNIVERSITY OF RUSE “ANGEL KANCHEV”
UNION OF SCIENTISTS - RUSE**



**66-TH ANNUAL SCIENTIFIC CONFERENCE
OF UNIVERSITY OF RUSE “ANGEL KANCHEV”
AND UNION OF SCIENTISTS – RUSE**

**Ruse, October 2027
Silistra, October 2027
Razgrad, November 2027**

I N V I T A T I O N

**Ruse, 8 Studentska str.
University of Ruse
Bulgaria**

PROCEEDINGS
Volume 65, Series 6.7.

Financial mathematics
&
Informatics

Under the general editing of:
Assoc. Prof. Svetlozar Tsankov, PhD

Editor of Volume 65:
Prof. Daniel Bratanov, PhD

Bulgarian Nationality
First Edition

Printing format: A5
Number of copies: on-line

ISSN 1311-3321 (print)
ISSN 2535-1028 (CD-ROM)
ISSN 2603-4123 (on-line)

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.
The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access



PUBLISHING HOUSE
University of Ruse "Angel Kanchev"