

## Модел с неопределени параметри на манипулатор с еластично звено

Георги Лехов

***Parametric Uncertainty Model of a Flexible-Link Manipulator:** A new parametric uncertainty model aimed at the robust control design of flexible-link manipulators moving in the horizontal plane is proposed. The uncertainty model is derived on the basis of equations of motion for the flexible-link manipulator obtained by using the Lagrangian approach combined with the assumed modes method. The parameters representing the basic source of uncertainty in the dynamic behaviour description of the flexible manipulators are taken into account in the model derivation. Some results confirming the validity of the uncertainty model are presented.*

**Key words:** Flexible-link manipulators, robust control design, uncertainty modelling, real parametric uncertainties.

### 1. УВОД

Манипулаторите с олекотена конструкция притежават редица предимства пред традиционните масивни манипулатори. При извършване на бързи движения, обаче, повишената еластичност на звената е причина за поява на нежелани механични трептения. Това налага при синтеза на системата за управление да се отчита влиянието на еластичността. Динамичният модел на манипулаторите с еластично звено се характеризира с наличие на слабо демпфирани собствени честоти, неминималнофазовост, неопределеност в параметрите и нелинейност. Тези особености на модела съществено затрудняват потискането на механичните трептения при бързи движения на манипулаторите.

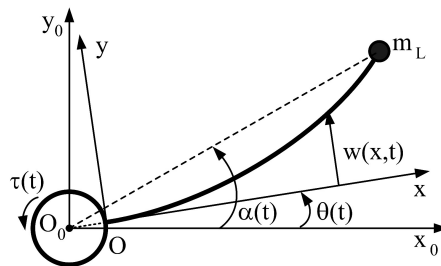
Поради силното влияние на неопределеността в модела върху устойчивостта и качеството на затворената система, за синтеза на управляващи устройства на манипулатори с еластично звено е подходящо да се използват методи от теорията на робастното управление. В литературата са предложени различни робастни управляващи устройства на манипулатори с еластично звено [1], [2], [3], [4], [5], [6]. При синтеза на тези управляващи устройства се използват модели с комплексна неопределеност. По-добри резултати обаче е възможно да се получат на основата на модел с параметрична неопределеност, тъй като за динамиката на системата за управление на манипулатори с еластично звено основно значение има неопределеността в някои параметри. Модел с параметрична неопределеност на манипулатор с еластично звено е предложен в [7], [8]. Този модел и процедурата за получаването му обаче са прекалено усложнени, което съществено затруднява използването му за манипулатори с различни геометрични и масови характеристики.

В статията е предложен нов, удобен за използване, модел с неопределени параметри, предназначен за анализ и синтез на робастни системи за управление на манипулатори с еластично звено. Процедурата за построяване на модела е лесно приложима за манипулатори с различни характеристики. Моделът е съставен за произволен брой обобщени координати на еластичното звено. При извеждането му е отчетена неопределеността в масата на товара и коефициентите на триене в съчленението и еластичната структура, които са основният източник на неопределеност при описание на динамиката на манипулатори с еластично звено.

### 2. ДИНАМИЧЕН МОДЕЛ

Разглеждаме манипулатор с еластична еднозвевнна регионална структура, схематично представен на фиг.1. Движението на манипулатора се извършва в хоризонтална равнина. Еластичното звено представлява тънък праволинеен хомо-

генен прът с постоянно напречно сечение, дължина  $L$ , линейна плътност  $m$ , модул на линейните деформации  $E$  и инерционен момент на напречното сечение  $I$ . Полезният товар, хващачът и модулът за локалните движения се моделират като материална точка с маса  $m_L$ . Разстоянието от оста на въртене  $O_0$  до точката на закрепване  $O$  на еластичното звено към задвижващата част е означено с  $R$ . Двигателният момент и масовият инерционен момент на задвижването, приведени към оста  $O_0$ , са съответно  $\tau(t)$  и  $J_a$ . Въведени са неподвижна  $O_0x_0y_0$  и подвижна  $Oxy$  координатни системи. Оста  $Ox$  на подвижната система съвпада с недеформираната ос на еластичното звено. Приема се, че еластичните отклонения на отделните точки на звеното са перпендикулярни на  $Ox$ , лежат в хоризонталната равнина и са малки в сравнение с  $L$ . Положението на оста  $Ox$  в координатната система  $O_0x_0y_0$  се определя с ъгъла  $\theta(t)$  (ставния ъгъл), а положението на товара (свободния край на манипулатора) – с ъгъла  $\alpha(t)$ . Еластичното отклонение на точка от звеното с абсциса  $x$  в момента  $t$  се означава с  $w(x,t)$ .



Фиг.1. Схема на манипулатора

Манипулаторите с еластично звено могат да се разглеждат като механични системи, съставени от идеално твърди тела и тяло с непрекъснато разпределени масови и еластични характеристики, чиито трептения се описват с частно диференциално уравнение. При анализа и синтеза на системата за управление е необходимо да се разполага с динамичен модел, състоящ се от краен брой обикновени диференциални уравнения. За съставяне на такъв крайномерен модел най-често се използва подходът, съчетаващ метода на собствените форми и метода на Лагранж.

Съгласно метода на собствените форми, еластичните премествания се представят чрез крайна сума във вида

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \eta_i(t), \quad (1)$$

където с  $\varphi_i(x)$  са означени собствените функции (форми), а с  $\eta_i(t)$  – обобщените координати. Броят  $n$  на включените в сумата обобщени координати и собствени функции се избира така, че да се осигури достатъчна точност на динамичния модел в интересувания ни честотен интервал [9].

Собствените честоти  $\omega_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , на еластичното звено се определят от зависимостта

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (2)$$

където с  $\beta_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , са означени подредените по големина положителни корени на честотното уравнение

$$1 + \cosh(\beta L) \cos(\beta L) + \frac{m_L}{mL} (\beta L) (\sinh(\beta L) \cos(\beta L) - \cosh(\beta L) \sin(\beta L)) = 0. \quad (3)$$

Собствените форми  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , могат да се представят във вида

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \left( (\cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x)) - \frac{\cosh(\beta_i L) + \cos(\beta_i L)}{\sinh(\beta_i L) + \sin(\beta_i L)} (\sinh(\beta_i x) - \sin(\beta_i x)) \right). \quad (4)$$

Те удовлетворяват условията за ортогоналност

$$m \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + m_L \varphi_i(L) \varphi_j(L) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

За съставяне на модел с параметрична неопределеност е удобно произволните константи  $\lambda_i$  в (4) да се изчислят от нормиращата зависимост

$$m \int_0^L \varphi_i^2(x) dx + m_L \varphi_i^2(L) = 1. \quad (6)$$

При извеждане на уравненията на движение на манипулатора чрез метода на Лагранж като обобщени координати се използват ъгълът  $\theta$  и величините  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . В резултат от прилагане на процедурата на Лагранж се получава следният нелинеен динамичен модел на манипулатора [9]:

$$\begin{bmatrix} m_r(\eta) & m_{rf}^T \\ m_{rf} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_r & 0_n^T \\ 0_n & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0_n^T \\ 0_n & C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_r(\dot{\theta}, \eta, \dot{\eta}) \\ h_f(\dot{\theta}, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_n \end{bmatrix} \tau, \quad (7)$$

където

$$\begin{aligned} \eta &= [\eta_1 \quad \dots \quad \eta_n]^T, \quad m_r(\eta) = a_0 + \sum_{i=1}^n \eta_i^2, \quad a_0 = J_a + \frac{1}{3} m \left( (L+R)^3 - R^3 \right) + m_L (L+R)^2, \\ m_{rf} &= [a_1 \quad \dots \quad a_n]^T, \quad a_i = m \int_0^L (x+R) \varphi_i(x) dx + m_L (L+R) \varphi_i(L), \quad i = 1, \dots, n, \\ C_f &= \text{diag}(c_1, \dots, c_n), \quad c_i = \omega_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad D_f = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), \end{aligned} \quad (8)$$

$$h_r(\dot{\theta}, \eta, \dot{\eta}) = \sum_{i=1}^n 2 \dot{\theta} \dot{\eta}_i \eta_i, \quad h_f(\dot{\theta}, \eta) = [-\dot{\theta}^2 \eta_1 \quad \dots \quad -\dot{\theta}^2 \eta_n]^T,$$

$I_n$  е  $n \times n$  единична матрица,  $0_n$  е  $n \times 1$  нулев вектор, а членовете  $d_r \dot{\theta}$  и  $D_f \dot{\eta}$  са въведени за отчитане съответно на вискозното триене в съчленението и на вътрешното триене в еластичната структура.

Ъгловото положение на свободния край на манипулатора се определя от зависимостта

$$\alpha = \theta + \arctg \frac{w(L, t)}{L + R}. \quad (9)$$

### 3. ПОЛУЧАВАНЕ НА МОДЕЛ С ПАРАМЕТРИЧНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

Като неопределени параметри при съставяне на модела разглеждаме масата на товара  $m_L$ , коефициента на триене  $d_r$  в съчленението и коефициентите на вътрешно триене  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , за всяка от обобщените координати на еластичното звено. Трябва да се отбележи, че тези параметри са основният източник на неопределеност при описание на динамичното поведение на манипулатори с еластично звено.

Предполага се, че при извършване на дадено движение неопределените параметри имат постоянни, неизвестни стойности, които принадлежат на известни интервали.

Входна величина на обекта на управление е двигателният момент  $\tau$ . Управляема величина е ъгловото положение  $\alpha$  на свободния край на манипулатора. Освен  $\alpha$ , в изходните величини на модела ще включим ставния ъгъл  $\theta$ , ускорението  $\ddot{\alpha}$  и еластичното отклонение  $w(L,t)$  на свободния край, които са необходими за осъществяване на обратни връзки за различни управляващи устройства от съсредоточен и разсредоточен вид.

За построяване на модела с неопределеност използваме линеен модел на манипулатора, получен след пренебрегване в уравнение (7) на нелинейните членове  $\sum_{i=1}^n \eta_i^2$ ,  $h_r(\theta, \eta, \dot{\eta})$  и  $h_f(\theta, \eta)$ , чието влияние е сравнително слабо, и полагане  $\arctg(z) \equiv z$  в (9), тъй като  $w(L,t) \ll L$ . В резултат на това се достига до уравненията:

$$\begin{aligned} a_0 \ddot{\theta} + d_r \dot{\theta} + \sum_{i=1}^n a_i \ddot{\eta}_i &= \tau, \\ \ddot{\eta}_i + d_i \dot{\eta}_i + c_i \eta_i + a_i \ddot{\theta} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \alpha &= \theta + \sum_{i=1}^n b_i \eta_i, \\ \ddot{\alpha} &= \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^n b_i \ddot{\eta}_i, \\ w_L &= (L + R) \sum_{i=1}^n b_i \eta_i, \end{aligned} \quad (10)$$

където са използвани означенията

$$w_L = w(L,t), \quad b_i = \frac{\varphi_i(L)}{L + R}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Характерно в случая е, че коефициентите  $a_0$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в уравнения (10) са функции на неопределения параметър  $m_L$ . Съгласно (8), коефициентът  $a_0$  зависи афинно от  $m_L$  и при съставяне на модела може да се представи във вида

$$a_0 = a_{01} + a_{02} m_L, \quad (12)$$

където

$$a_{01} = J_a + \frac{1}{3} m \left( (L + R)^3 - R^3 \right), \quad a_{02} = (L + R)^2. \quad (13)$$

За разлика от  $a_0$ , останалите коефициенти зависят нелинейно и неявно от  $m_L$  по доста сложни зависимости, които не могат да се използват за получаване на модел на неопределеността. Изследването на тези зависимости за манипулатори с различни геометрични и масови характеристики обаче показва, че достатъчно висока точност за целите на робастния анализ и синтез се постига при апроксимиране на коефициентите  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , със следните, подходящи за съставяне на модел с неопределеност, рационални функции на  $m_L$ :

$$\begin{aligned} a_i &\approx a_{i1} + a_{i2} m_L, \\ b_i &\approx \frac{1}{b_{i1} + b_{i2} m_L}, \\ c_i &\approx \frac{1}{c_{i1} + c_{i2} m_L}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

Константите  $a_{i1}$ ,  $a_{i2}$ ,  $b_{i1}$ ,  $b_{i2}$ ,  $c_{i1}$ ,  $c_{i2}$ ,  $i=1, \dots, n$ , в (14) се определят чрез апроксимация по метода на най-малките квадрати, която се извършва така, че за средната (номиналната) стойност на масата на товара съответните зависимости да се изпълняват точно. Следователно за средната стойност на масата на товара моделът на манипулатора ще бъде точен.

Конструирането на модел с неопределени параметри чрез използване на инструменталния пакет Robust Control Toolbox на MATLAB<sup>®</sup>7 [10] може да се извърши по различни начини. В случая е характерно, че в модела на манипулатора, построен непосредствено на основата на уравнения (10), неопределеният параметър  $m_L$  се повтаря голям брой пъти, което силно затруднява робастния анализ и синтез на системата. Този брой може да се намали съществено, като моделът на манипулатора се състави с помощта на MATLAB<sup>®</sup>-командата sysic на основата на следното представяне на уравнения (10):

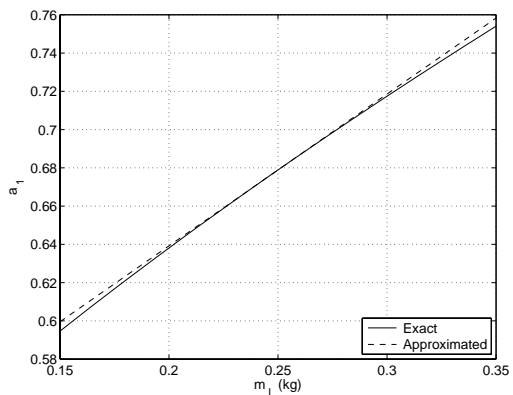
$$\begin{aligned} M\ddot{y} + N_1\dot{y} + N_2y &= T\tau, \\ z &= P_1y, \\ \ddot{\alpha} &= P_2\ddot{y}, \end{aligned} \quad (15)$$

където

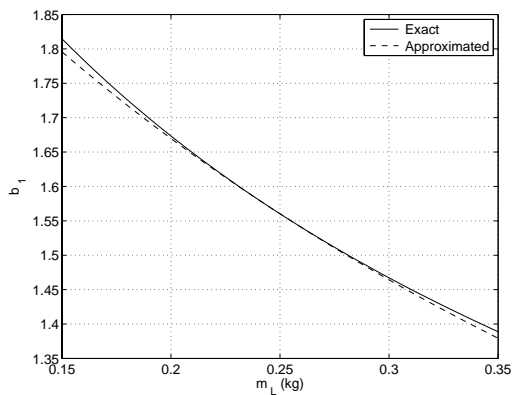
$$\begin{aligned} y &= [\theta \quad \eta_1 \quad \dots \quad \eta_n]^T, \quad M = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} N_1 &= \text{diag}(d_r, d_1, \dots, d_n), \\ N_2 &= \text{diag}(0, c_1, \dots, c_n), \\ T &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0_n \end{bmatrix}, \end{aligned} \\ z &= \begin{bmatrix} \alpha \\ w_L \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & \dots & b_n \\ 0 & (L+R)b_1 & \dots & (L+R)b_n \end{bmatrix}, \quad P_2 = [1 \quad b_1 \quad \dots \quad b_n]. \end{aligned} \quad (16)$$

Разработената процедура за построяване на модел с параметрична неопределеност на манипулатор с еластично звено е приложена при следните числени стойности на параметрите:  $L=1$  m,  $R=0.04$  m,  $J_a=0.1$  kgm<sup>2</sup>,  $m=0.54$  kg/m,  $E=6.9 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $I=2.67 \times 10^{-10}$  m<sup>4</sup>. Стойностите на  $m$ ,  $E$  и  $I$  съответстват на звено, направено от алуминий с плътност  $\rho=2700$  kg/m<sup>3</sup> и правоъгълно напречно сечение с размери  $s_1=0.05$  m и  $s_2=0.004$  m, като  $s_2$  е в равнината на движение. Предполага се, че при извършване на дадено движение масата на товара има постоянна, но неизвестна стойност в интервала от 0.15 kg до 0.35 kg, т.е. масата на товара е неопределен параметър с номинална стойност  $m_L=0.25$  kg и максимална относителна неопределеност 40%. Първите две собствени честоти на еластичното звено, изчислени за номиналната стойност на масата на товара, са  $\omega_1=12.1$  rad/s и  $\omega_2=99.2$  rad/s. Тъй като третата ( $\omega_3=302.5$  rad/s) и останалите собствени честоти имат стойности, много по-високи от честотната лента на затворената система, в модела са включени само първите две обобщени координати на еластичното звено. Приема се, че коефициентът на триене в съчленението има номинална стойност  $d_r=0.15$  kgm<sup>2</sup>/s и относителна неопределеност 20%, а коефициентите на вътрешно триене за първите две обобщени координати на еластичното звено имат номинални стойности  $d_1=0.04$  kgm<sup>2</sup>/s и  $d_2=10$  kgm<sup>2</sup>/s и относителна неопределеност 40%.

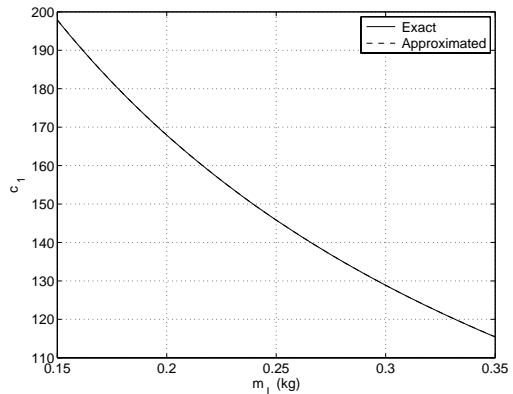
Графиките на точните и на определените по описания начин приблизителни зависимости на коефициентите  $a_1$ ,  $b_1$  и  $c_1$  от масата на товара са показани на фигури 2, 3 и 4. Подобни резултати се получават и за  $a_2$ ,  $b_2$  и  $c_2$ . Относителната



Фиг.2. Точна и приближителна зависимости на  $a_1$  от  $m_L$



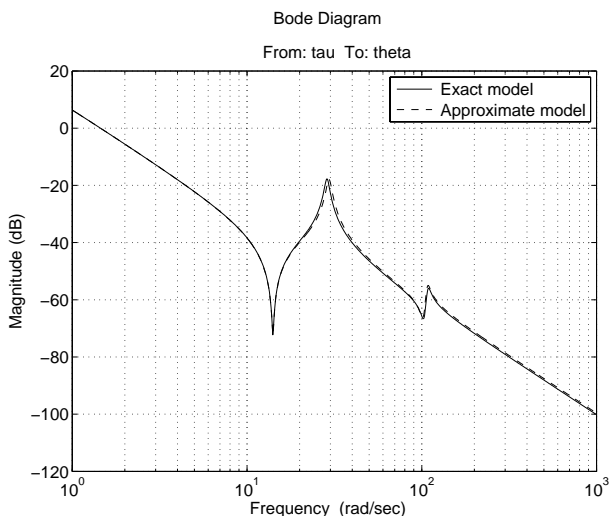
Фиг.3. Точна и приближителна зависимости на  $b_1$  от  $m_L$



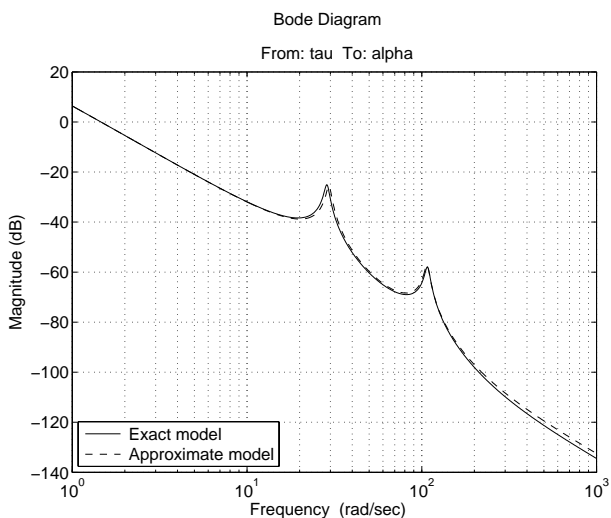
Фиг.4. Точна и приближителна зависимости на  $c_1$  от  $m_L$

грешка от апроксимация за всяка от зависимостите е най-голяма за  $m_L = 0.15 \text{ kg}$ , като за всички зависимости тя не надвишава 2%.

В съставения модел на манипулатора в средата на MATLAB<sup>®</sup>7 неопределеният параметър  $m_L$  се повтаря 10 пъти. За сравнение да отбележим, че в уравнения (10) за  $n=2$  параметърът  $m_L$  участва 13 пъти, а в модела, построен в MATLAB<sup>®</sup>7 непосредствено от уравнения (10),  $m_L$  се повтаря 32 пъти.



Фиг.5. Точна и приблизителна амплитудно-честотни характеристики на манипулатора с вход  $\tau$  и изход  $\theta$  за  $m_L = 0.15 \text{ kg}$



Фиг.6. Точна и приблизителна амплитудно-честотни характеристики на манипулатора с вход  $\tau$  и изход  $\alpha$  за  $m_L = 0.15 \text{ kg}$

Точността на съставения модел се потвърждава от близостта на показаните на фигури 5 и 6 "точни" и "приблизителни" логаритмични амплитудно-честотни характеристики на манипулатора с вход двигателния момент  $\tau$  и изход ставния ъгъл  $\theta$  и ъгловото положение  $\alpha$  за най-неблагоприятния случай  $m_L = 0.15$  kg. Точните характеристики са изчислени от уравнения (10) като са използвани точните стойности на коефициентите, а приблизителните – от модела с неопределени параметри. Стойностите на неопределените коефициенти на триене в съчленението и на вътрешно триене в еластичната структура са взети равни на долните им граници, отговарящи на най-слабото демпфиране на механичната система.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен е модел с параметрична неопределеност, предназначен за анализ и синтез на робастни системи за управление на манипулатори с еластично звено. При съставянето му е отчетена неопределеността в параметрите, представляващи основния източник на неопределеност при описание на динамиката на манипулатори с еластично звено. Процедурата за построяване на модела е лесно приложима за манипулатори с различни геометрични и масови характеристики. Получените резултати потвърждават достатъчната за целите на робастния анализ и синтез точност на предложения модел с неопределени параметри.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Sutton, R., G. Halikias, A. Plummer, D. Wilson. Modelling and  $H_\infty$  Control of a Single-Link Flexible Manipulator. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I, Journal of Systems and Control Engineering, 213, 1999, 85-104.
- [2] Karkoub, M., G. Balas, K. Tamma, M. Donath. Robust Control of Flexible Manipulators via  $\mu$ -Synthesis. Control Engineering Practice, 8, 2000, 725-734.
- [3] Park, N.C., H.S. Yang, H.W. Park, Y.P. Park. Position/Vibration Control of Two-Degree-of-Freedom Arms Having One Flexible Link with Artificial Pneumatic Muscle Actuators. Robotics and Autonomous Systems, 40, 2002, 239-253.
- [4] Lizarraga, I., V. Etxebarria. Combined PD- $H_\infty$  Approach to Control of Flexible Link Manipulators Using Only Directly Measurable Variables. Cybernetics and Systems, 34, 2003, 19-31.
- [5] Kermani, M., R. Patel, M. Moallem. Multimode Control of a Large-Scale Robotic Manipulator. IEEE Transaction on Robotics, 23, 2007, 1264-1270.
- [6] Kerr, M., S. Jayasuriya, S. Asokanathan. QFT Based Robust Control of a Single-Link Flexible Manipulator. Journal of Vibration and Control, 13, 2007, No. 1, 3-27.
- [7] Lehov, G., P. Petkov. Uncertainty Modelling and Robust Control of a Flexible-Link Manipulator. Information Technologies and Control, 2, 2004, No. 3, 17-23.
- [8] Лехов, Г., П. Петков. Робастно управление на манипулатор с еластично звено. Научни трудове на Русенския университет, 2005, том 44, серия 3.1, 155-166.
- [9] Лехов, Г., С. Цонев. Точност на собствените честоти на динамичния модел на манипулатор с еластично звено. Механика на машините, 2003, № 5, 160-164.
- [10] Balas, G., R. Chiang, A. Packard, M. Safonov. Robust Control Toolbox: User's Guide. Natick, MA: MathWorks, 2006.

#### За контакти:

доц. д-р Георги Лехов, катедра "Автоматика, информационна и управляваща техника", Русенски университет, тел.: 082 888 745, e-mail: glehov@ru.acad.bg.

Докладът е рецензиран.