

Солитонopodobни решения на уравнението на Синус-Гордон

Атанас Червенков

Like soliton solutions of the Sine-Gordon equation: The nonlinear Sine-Gordon equation, which describes the electromagnetic field in superconductor, is considered. There exists the solitons (solitary waves) in Josephson junctions. The Different variants of the nonlinear Sine Gordon equation are described. The investigations are concentrated on the general type of the equation, which depends on time t and spatial coordinate x . The Decisions of the equation are made numerical. The Multitude of the solutions of this equation is obtained. The solutions in the manner of soliton or in the manner of the space-time waves are presented.

Key words: soliton solution, Sine-Gordon equation, numerical method, ssuperconductor, Josephson junctions.

ВЪВЕДЕНИЕ

За описване на множество нелинейни процеси се използва уравнението на Синус-Гордон. Такива нелинейни процеси са:

- Разпространение на феромагнитни вълни. Свързани със завъртането на вектора на намагнитеност \vec{M} т.е. на движението на доменните стени;
- Циклични фазови преходи в молекулярни кристали;
- Самоиндуцирана прозрачност на кристалите при проникване на свръхкратки интензивни оптични импулси;
- Различни свойства на Джозефсоновските преходи.

УРАВНЕНИЕ НА СИНУС- ГОРДОН

Уравнението на син Гордон се използва и в диференциалната геометрия, и теорията на относителността на полето. То получава името си от сходството с уравнението на Клайн Гордон, познато още от 19 век, но станало популярно с факта, че води до така наречените кинк и анти кинк решения, които имат свойствата на сблъскващи се солитони.

Това уравнение намира приложение и в други физични процеси, каквито са разпространение на флуксони в Джозефсоновски преходи, движение на твърдо махало закачено към опънат проводник и дислокации в кристали.

При свръхпроводящите материали се образуват Джозефсоновски преходи, при които има възможност за протичане на ток през прехода при нулева потенциална разлика. Ако имаме напрежение върху прехода, то плътността на тока през прехода се получава периодична синусоидална функция във времето. Ъгловата честота на този ток е пропорционална на приложеното напрежение върху Джозефсоновския преход.

В свръхпроводящите проводници, в които се наблюдават солитонни вълни в Джозефсоновски преходи, са получени при решението на нелинейното уравнение на Гордон. То описва поле зависещо от времевата t и пространствената променлива x . Това уравнение обикновено се нарича синусоидално уравнение на Гордон или се използва наименованието уравнение на синус-Гордон "Sine-Gordon equation" (съкратено SGE).

Нелинейното синусоидално уравнение на Гордон се отнася към класа на уравненията с пълна интегрируемост. Решенията на уравнението на синус-Гордон, които зависят само от едната променлива се наричат "еднофазни решения". Тези решения се разделят на два вида: вълни от електрически тип (Е вълни) и вълни от магнитен тип (М вълни). Вторите от своя страна се наричат често топологични солитони, движещи се с "размити" доменни стени, кинк-солитони или просто кинки.

При движение на солитоните с относително високи скорости на вълните от електрически тип се поражда излъчване, наречено "Черенковско излъчване".

Общият вид на уравнението е:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \quad (1)$$

Посредством полаганията

$$\xi = \frac{1}{2}(x-t), \eta = \frac{1}{2}(x+t) \quad (2)$$

може да се стигне до солитонно решение от вида

$$v(\xi, \eta) = \sin v \quad (3)$$

Друго решение на синус - Гордон уравнението може да се получи като се положи

$$v(\xi, \eta) = f(z), \quad (4)$$

където $z = \xi \eta$.

Това води до обикновено диференциално уравнение, което има вида

$$z f'' + f' = \sin f \quad (5)$$

Уравнението на Синус-Гордон обаче не може да бъде решено строго аналитично. Някои решения могат да бъдат получени числено, при определени начални и гранични условия.

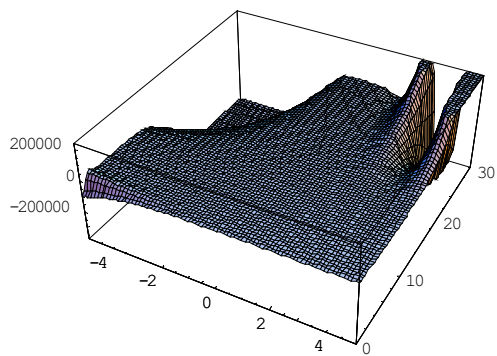
ЧИСЛЕНИ РЕШЕНИЯ

Търсят се решения на уравнението на Синус-Гордон (1) във вид на солитони.

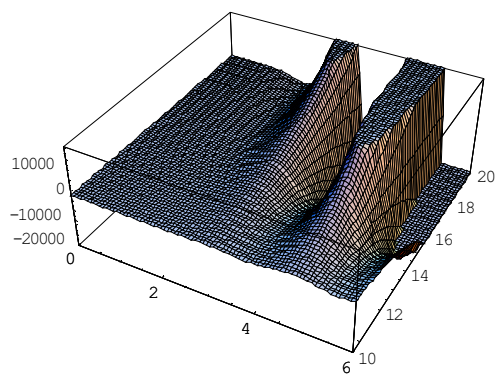
Решението се извършва с числена процедура с помощта на програмния пакет МАТЕМАТИКА [5].

С вградената в пакета МАТЕМАТИКА програма за числено решаване не може да реши директно частното диференциално уравнение (1), без да се поставят определени условия, за да се получат солитонни или солитонopodobни решения. Съществува възможност за получаването на множество решения на уравнението на Синус - Гордон, задавайки различни начални и гранични условия, като от получените решения се избират само тези, които имат вид на солитонни вълни.

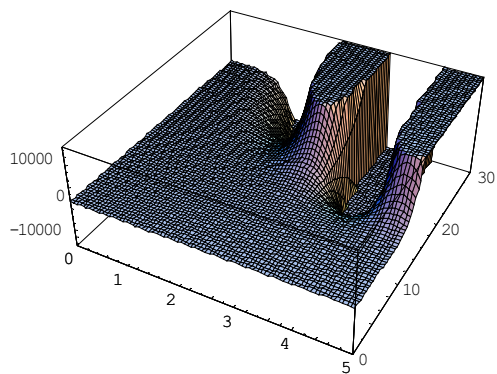
Солитонopodobни решения на уравнението на Синус - Гордон при различни начални и гранични условия са показани на фиг.1 ÷ фиг. 6



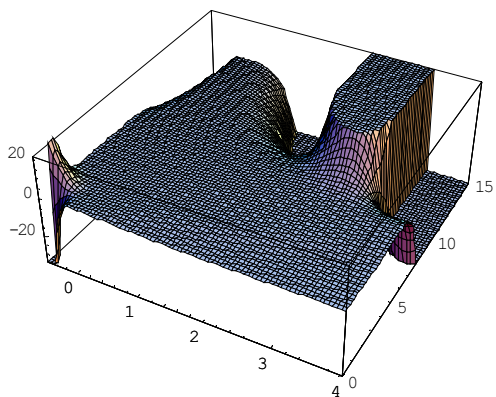
фиг.1



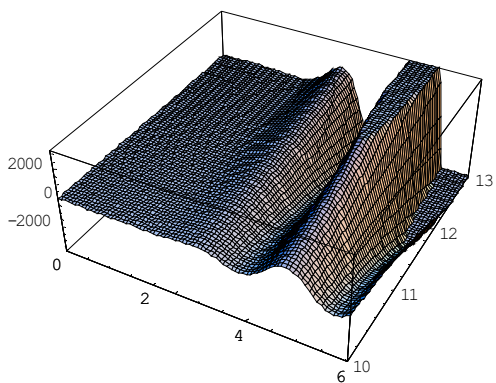
фиг.2



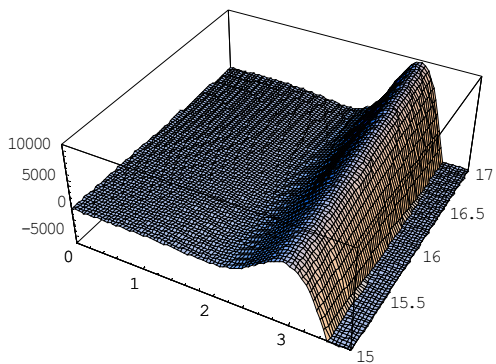
фиг.3



фиг.4



фиг.5



фиг.6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разгледано е известното нелинейно уравнение на Синус Гордон SGE, което описва полето в свръхпроводящите проводници. В тях се наблюдават солитонни вълни в Джозефсоновски преходи.

Разгледани са различните разновидности на нелинейното уравнение на Гордон. Изследванията са съсредоточени върху уравнението в общия му вид, зависещо от времевата t и пространствената променлива x .

Решението на SGE е извършено числено. Получени са множество решения на уравнението.

Показани са решенията във вид на солитони и във вид на нелинейни, пространствено-времеви електромагнитни вълни.

Научните изследвания, резултатите от които са представени в настоящата публикация, са финансирани от Вътрешния конкурс на ТУ-София 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P.L.E.E. Uslenghi (editor). Nonlinear Electromagnetics. Academic press, New York-London-Toronto-Sydney-San Francisco, 1980.
- [2] Кулик И. о., Янсон И. К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих тунельных структурах. М., наука, 1970.
- [3] Barone A., Esposito E., MAGEL S. J., Scott A.C. Theory and applications of Sine-Gordon equation. Rivista del Nuovo Cimento, 1971, vol. 102, pp. 227-267.
- [4] A. Barone and G. Palerno. Physics and applications of the Josephson effects. Wiley, New York, 1982.
- [5] www.wolfram.com

За контакти:

Доц. д-р инж. Атанас Георгиев Червенков, Катедра "Теоретична електротехника", Технически Университет София, Тел.: 029653195, E-mail: acher@tu-sofia.bg

Докладът е рецензиран.