

## Решаване на задача за портфейлна оптимизация с Excel

Красимира Стоилова, Тодор Стоилов

*Definition and solution of a portfolio optimization problem is considered. The optimal portfolio problem is defined, having the trends of three currencies. The parameters of the portfolio problem are evaluated. The problem is solved by Excel software suit. This example can be used for illustrative purposes for the utilization of optimization tools in wide available product as Excel. The problem is stated with real data and illustrates the area of application of the portfolio theory.*

**Key words:** portfolio optimization, problem definition, solution of optimization problem

### ВЪВЕДЕНИЕ

Разглеждаат се етапите на дефиниране и решаване на оптимален портфейл при финансови инвестиции. Представен е начин за дефиниране и изчисляване на параметрите на оптимизационната задача на портфейл с три валути. Последните са взети от текущите бюлетини на финансовите институции. Задачата за портфейлна оптимизация е дефинирана като линейно-квадратична от класа на математическото програмиране и за решаването ѝ е използвана програмната система Excel. Представеното решение може да се използва като средство за анализ на финансови инструменти и вземане на решения за направата на финансови инвестиции.

### ФОРМАЛЕН МОДЕЛ НА ЗАДАЧАТА ЗА ПОРТФЕЙЛНА ОПТИМИЗАЦИЯ

За вземане на решение при финансови инвестиции в икономическата теория е разработена „Теория на портфейла“ [1,4]. Целта и е да приложи количествен анализ за определянето на удачното инвестиционно решение. Формално, теорията на портфейла дефинира оптимизационна задача, чието решение представлява делът на инвестицията, разпределен по отделни активи. Това разпределение е направено при търсене на минимум на риска за инвестицията и максимум печалба от нея. Инвеститорът разглежда всеки актив като перспектива за бъдещи доходи. По този начин по-добрата комбинация на финансови активи (акции) в портфейла ще доведе до по-добра бъдеща печалба и доход. Теорията на портфейла разработва модели, които позволяват да се намери най-добрата комбинация от активи при съставянето на портфейла. Тук при направата на инвестицията се отчита неопределеността, която се оценява като диапазон на изменение на доходността на портфейла и се нарича риск. В теорията на портфейла се приема, че текущата стойност на активите може да се различава от тяхната средна изчислена стойност и че доходностите на активите се влияят помежду си [2, 5].

В теорията на портфейла се дефинира и решава оптимизационна задача [1], която е от класа на квадратичното програмиране

$$\min_x \left[ \frac{1}{2} x^T \text{cov}(\cdot) x - \sigma E^T x \right], \quad (1)$$

$$x^T \cdot \mathbf{1} = 1,$$

където  $\text{cov}(\cdot)$  – е положителна симетрична матрица  $n \times n$  и отчита корелацията на доходностите между различните активи, включени в портфейла;  $E$  – е вектор ( $n \times 1$ ) на средната доходност на активите, включени в портфейла;  $\mathbf{1}$  – единичен вектор с размерност  $n \times 1$ ;  $\sigma$  е коефициент на инвеститорски предпочитания за направата на рискови инвестиции.

Решението  $x_i$  представлява делът на инвестицията за закупуване на  $i$ -та ценна книга. Съответно, формалното ограничение  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$  определя, че цялата инвестиция трябва да бъде използвана за придобиване на ценни книги. Положителната стойност на  $x_i$  означава, че тези ценни книги трябва да се закупят от инвеститора. Отрицателната стойност на  $x_i$  означава, че инвеститорът трябва да

продава тези ценни книги, ако има в наличност. Икономическият термин, който се прилага, е емитиране на този вид ценни книги. Съгласно законови нормативни разпоредби, не всички инвеститори имат право да емитират ценни книги. Затова допускането за отрицателност на  $x_i$  р може да не е допустимо. Разрешаването на  $x_i < 0$  се нарича „къси продажби“. Тъй като това не е винаги практически разрешено, то в задача (1) трябва да се включи и условие за неотрицателност на решенията  $x_i > 0$ ,  $i = 1, n$ - брой на ценните книги в портфейла.

Рискът на портфейла се формализира с квадратичната компонента  $V_p = x^T \text{cov}(\cdot) x$ . Тя е количествена оценка на риска на инвестицията на портфейла и има смисъл на големина на диапазона, в който се изменя средната доходност на портфейла. Печалбата на портфейла се изчислява от произведението  $E_p = E^T x$ , което е претеглената сума на средните доходности на отделните активи.

В теорията на портфейла се отчита, че инвеститорът не е привърженик на риска и предпочита по-голяма доходност на портфейла. Затова задачата за портфейлна оптимизация се дефинира като оптимизационна, като се търси минимум на портфейлния риск  $V_p$  и максимум на доходността на портфейла. Тъй като тази задача води до многокритериална оптимизация и съответно решението няма да е единствено, в теорията на портфейла се въвежда коефициент на инвеститорски предпочитания  $\sigma$ . Този коефициент определя компромиса между риска и доходността, който един инвеститор може да приеме за направата на инвестицията. Така, рискът и печалбата на портфейла са дефинирани в обща целева функция от вида (1), като чрез коефициента  $\sigma$  се „управлява“ отношението риск-печалба за даден инвеститор. Параметърът  $\sigma$  има неотрицателна стойност и приема стойности в диапазона  $\sigma \in [0, +\infty]$ . Той предства в количествен вид рисковите тенденции на инвеститора. Ако  $\sigma = 0$ , инвеститорът е „страхлив“ и неговата цел е да минимизира нивото на риска в инвестицията  $\min_x [x^T \text{cov}(\cdot) x]$ . В случая  $\sigma = +\infty$  инвеститорът „забравя“ за съществуването на риск при инвестирането. Неговата цел е да максимизира печалбата на портфейла. В този случай относителното влияние на портфейлната печалба в целевата функция преобладава и оптимизационната задача става аналитично определена от вида  $\min_x [-\sigma E^T x] \equiv \max_x [E^T x]$ .

Численото определяне на коефициента  $\sigma$  е задача на финансовия анализатор и определя, че за различни инвеститори оптималната инвестиция е различна, независимо от общото състояние на пазара за всички инвеститори.

Тук е показан един начин за използване на изходните данни за доходностите на активите за дефиниране и решаване на оптимизационната портфейлна задача.

### ДЕФИНИРАНЕ НА ЗАДАЧА ЗА ПОРТФЕЙЛНА ОПТИМИЗАЦИЯ

В настоящата работа е дефинирана задача за портфейлна оптимизация, чието икономическо съдържание е да се определи разпределението на инвестицията между три валути. Разглеждат се три валути, чиито курс се изменя във времето: американски долар (USD), английска лира (GBP) и швейцарски франк (CHF). Курсът на тези валути се приема за тяхна доходност. Счита се, че доходността от валутата е равна на нейния курс, което означава, че при продажба на тази валута инвеститорът ще получи доходност, определена от курса на съответната валута. Изходните данни за курса на валутите е взет от финансовата рубрика на сайта <http://econ.bg>. Курсът на валутите USD, GBP и CHF за периода 15.9.2008 – 30.9.2008 е представен на фиг.1.



Фиг. 1. Курс на валутите USD, GBP CHF и за периода 15.9.2008 – 30.9.2008

Тези изходни данни се използват за подготовката на параметрите на задачата за портфейлна оптимизация. Това са моментни доходности на ценните книги  $R_i$ ,  $i=1, n; n=3$ . Трябва да се изчислят средните доходности  $E_i$  и риска  $\tau_c$  на активите. Изходните данни от фиг.1 са систематизирани в Табл.1.

Табл.1 Данни за доходностите на валутите

DATE	Курс USD [лв]	Курс GBP [лв]	Курс CHF [лв]	R <sub>1</sub> - Доходност USD %	R <sub>2</sub> - Доходност GBP %	R <sub>3</sub> - Доходност CHF %
30.9.2008	1,3630	2,4574	1,2344	2,029	-0,142	0,219
29.9.2008	1,3359	2,4609	1,2317	0,406	-0,348	0,408
26.9.2008	1,3305	2,4695	1,2267	-0,068	0,045	0,049
25.9.2008	1,3314	2,4684	1,2261	0,279	0,341	-0,163
24.9.2008	1,3277	2,4600	1,2281	-3,363	-0,974	0,31
23.9.2008	1,3739	2,4842	1,2243	1,868	0,902	-0,858
19.9.2008	1,3487	2,4620	1,2349	-1,913	0,094	0,521
18.9.2008	1,3750	2,4597	1,2285	0,299	0,294	0,-615
17.9.2008	1,3709	2,4525	1,2361	-0,81	-0,688	0,512
16.9.2008	1,3821	2,4695	1,2298	-0,6	0,529	0,392
15.9.2008	1,3905	2,4565	1,2225			

Задача на портфейлна оптимизация може да състави с данните от курсовете на избраните валути. Тогава, икономическото съдържание на решението  $x$  е дял на инвестицията, измерена като нетна сегашна стойност (богатство). Обикновено инвеститорите предпочитат да се прилага другия основен икономически критерий – печалба от инвестицията. Тогава портфейлната задача ще определи делът на валутите, който трябва да се закупи, така че инвеститорът да получи максимална печалба при минимален риск. За да се дефинира така задачата на портфейлна оптимизация, е необходимо изходните данни за курса на валутите да се преобразуват в процент на изменение на валутата за всеки ден на разглеждания времеви хоризонт. Така са формирани последните три колони на табл.1, които определят изменението на доходността на валутите в % за всеки ден. Изчислени са:

доходност =  $\frac{\text{новкурс} - \text{старкурс}}{\text{старкурс}}$ . Така доходността на USD за датата 16.9.2008 е  $\frac{1,3821 - 1,3905}{1,3905} 100\% = -0,6\%$  определена от отношението  $\frac{1,3709 - 1,3821}{1,3821} 100\% = -0,81\%$ . Съответно за 17.9.2008 се получава  $\frac{1,3709 - 1,3821}{1,3821} 100\% = -0,81\%$ . Аналогично, са изчислени доходностите  $R_i$ ,  $i=1, n$ ,  $n=3$ , в % за другите дни на наблюдение на курсовете на трите използвани валути.

Определянето на средната доходност на валутите  $E_i$ ,  $i=1,3$  е с претеглените суми  $E_i = \sum_i P^i R_i^t$ , където  $P^i$  е вероятността в момента  $t$  да се появи доходността  $R_i^t$

[3]. Доходностите  $R_i^t$  за USD са равновероятни за поява през периода 16.9.2008 – 30.9.2008 и затова всяка данна се приема с равна вероятност  $P^t = \frac{1}{N} = 0,1$ ;  $N=10$  – брой на дните за доходността на валутите. Следователно, средната доходност на

USD е  $E_1 = 0,1(2,029 + 0,406 + \dots - 0,6) = -0,1873$ . Аналогично,  
 $E_2 = 0,1(-0,142 - 0,348 + \dots + 0,529) = 0,0053$   $E_3 = 0,1(0,219 + 0,408 + \dots + 0,392) = 0,15544$

Тези данни определят вектора на доходностите:  $E^T = [-0,1873 \quad 0,0053 \quad 0,1544 \quad |$ .

Рискът на отделните валути се изчислява по формулата  $\tau_i^2 = \sum_t P^t (E_i - R_i^t)^2$  [3].

След съответни изчисления се получава  $\tau_i^T = [1,5355 \quad 0,5357 \quad 0,4147 \quad |$ .

Ковариационната матрица за оценяване на взаимната зависимост между доходностите на трите валути се изчислява за всеки компонент на матрицата. Тъй като портфейла съдържа 3 актива, то ковариационната матрица е симетрична с размерност 3x3. Компонентите се изчисляват като:  $cov_{ij} = \sum_t P^t (E_i - R_i^t)(E_j - R_j^t)$  и

$$cov_{12} = 0,1[(-0,1853 - 2,029)(0,0053 + 0,142) + (-0,1853 - 0,406)(0,0053 + 0,348) + \dots + (-0,1853 + 0,6)(0,0053 - 0,529)] = 2,3577 \quad [3].$$

Аналогично, след изчисления се получава цялата ковариационна матрица.

cov <sub>ij</sub>	USD	GBP	CHF
USD	2,357759	0,478106	-0,37725
GBP	0,478106	0,287003	-0,15122
CHF	-0,37725	-0,15122	0,172026

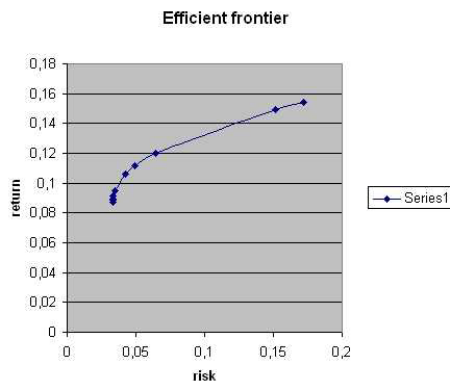
С тези данни се дефинира аналитично задачата на портфейлна оптимизация. Чрез задаване и променяне на стойности на параметъра  $\sigma$  в диапазона  $\sigma \in [0, +\infty]$ , задачата е определена. За решаването ѝ е използвана програмата Excel.

### РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧАТА ЗА ПОРТФЕЙЛНА ОПТИМИЗАЦИЯ

Програмният пакет Excel има вградени функции за изпълнение на математически операции по подготовката и решаването на оптимизационната задача. На фиг.2 е показана илюстрация на работния лист, където са подготвени данните за задачата и се изпълнява нейното решаване. Задачата е решавана с различни стойности на коефициента на инвеститорски предпочитания  $\sigma$ . Използвани са вградените функции за изчисляване на средна стойност на величини AVERAGE; функция за изчисляване на риска на ценните книги като средно квадратично отклонение STDEVP; изчисляване на ковариационната матрица COVAR. Като помощна функция за изчисляване на матрични умножения е ползвана функцията SUMPRODUCT. Решаването на оптимизационна задача (1) е направено с функцията SOLVER. С изчислените решения на оптимални портфейли за различни стойности на  $\sigma$  е изчертана графиката на ефективните портфейли, фиг.3. Върху тази графика се намират всички портфейли, препоръчвани от Теорията на портфейла при зададените изходни данни за доходност на активите. Избирането на едно единствено решение за портфейл трябва да се направи с последващ анализ на изискванията на инвеститора съгласно персоналното му мнение за съотношението риск/доходност за инвестицията.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	DATE	USD	GBP	CHF				
2	30.9.2008	2,029	-0,142	0,219				
3	29.9.2008	0,406	-0,348	0,408				
4	26.9.2008	-0,068	0,045	0,049				
5	25.9.2008	0,279	0,341	-0,163				
6	24.9.2008	-3,363	-0,974	0,31				
7	23.9.2008	1,868	0,902	-0,858				
8	19.9.2008	-1,913	0,094	0,521				
9	18.9.2008	0,299	0,294	0,615				
10	17.9.2008	-0,81	-0,688	0,512				
11	16.9.2008	-0,6	0,529	0,392				
12								
13	Doходност	-0,1873	0,0053	0,154444				
14	risk	2,619732	0,318892	0,193529	2,357759	0,287003	0,172026	
15		1,5355	0,535727	0,41476				
16								
17	COVAR	2,357759	0,478106	-0,37725				
18		0,478106	0,287003	-0,15122				
19		-0,37725	-0,15122	0,172026				
20								
21	X	0,031629	0,370663	0,697719				
22		0,026326	0,031111	0,03484				
23		0,033188	0,014385	0,088355	landa	0,025		
24	risk			Return				
25				1	C	1		
26								
27		sigma	x(1)=A16	x(2)=B16	x(3)=C16	x("cov"x=A"E"x=18		
28		0,025	0,033261	0,37281	0,593863	0,033164	0,087414	
29		0,05	0,031629	0,370663	0,597719	0,033188	0,088355	
30		0,1	0,02932	0,36478	0,609288	0,033258	0,089296	
31		0,2	0,018336	0,35695	0,624714	0,03467	0,094941	
32		0,5	0	0,326572	0,673428	0,042108	0,105738	
33		0,7	0	0,2874	0,7126	0,049119	0,11159	
34		1	0	0,22841	0,771359	0,064017	0,120344	
35		2	0	0,032776	0,967222	0,151653	0,149556	
36		5	0	0	1	0,172026	0,154444	
37		10	0	0	1	0,172026	0,154444	
38								
39								

Фиг.2. Данни за решаване на задачата



Фиг.3. Графика на ефективните портфейли

## ИЗВОДИ

В доклада е представена подготовката на данни за дефиниране на задача за портфейлна оптимизация, съставена от три вида валути. Определени са характеристиките за доходността и риска на отделните активи. Подготовката на данните и решаването на задачата за портфейлна оптимизация е в среда Excel. Направеният анализ илюстрира технологията на портфейлното инвестиране и показва достъпни средства за портфейлната оптимизация. Като количествен апарат теорията на портфейла е силно средство за анализ на състоянието на пазарите.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Sharpe W. Portfolio theory and capital markets, Mc G.Hill, New York, 2000, p.316.
- [2] Bodie, Z., A. Kane, A. Marcus. Investments. Naturela, Sofia, 2000. 906 p.
- [3] Иванова, Зл., К. Стоилова, Т. Стоилов. Портфейлна оптимизация – Информационна услуга в Интернет. Акад.Изд. "М.Дринов", София, 2005, 275 стр.
- [4] Фабоци Ф. Управление инвестициями. Пер.англ. ИНФРА-М, Москва, 2000.
- [5] Sotirova S., L. Sotirov. Discrete modeling of one class financial-economic processes, based on optimal singular adaptive M3A1N computer observer – Part 1. Proceeding of International Conference on Automatics and Informatics'07, vol.1, IV-13-IV-16, Sofia, 2007.

## За контакти:

Ст.н.с.ІІ ст. дтн Красимира Стоилова, Институт по компютърни и комуникационни системи – БАН, тел.: 02 873 78 20, e-mail: k.stoilova@hsi.iccs.bas.bg  
 Ст.н.с.І ст. дтн Тодор Стоилов, Институт по компютърни и комуникационни системи – БАН, тел.: 02 873 78 20, e-mail: [todor@hsi.iccs.bas.bg](mailto:todor@hsi.iccs.bas.bg)

## Докладът е рецензиран.

Настоящото изследване е частично финансирано по проект 1013/2005 от Националния фонд за Научни изследвания.