

## Зъбни предавки с малък брой прави зъби (Част II – предавки с несиметрично еволвентно-цевно зацепване)

Огнян Алипиев

**Spur gear drives with a small number of teeth (Part I – asymmetric involute-lantern meshing):** A new asymmetric involute-lantern meshing has been proposed, suitable for gearings with a small number of spur teeth gears. The tooth meshing of equal gears with three, two and one teeth has been analyzed. The possible boundaries of change of the transverse contact ratio and radius of the lantern circle have been defined.

**Key words:** Spur gear, Involute-lantern meshing, Asymmetric teeth, Contact ratio.

### ВЪВЕДЕНИЕ

Използването на правозъбни предавки за непрекъснато предаване на въртливо движение се ограничава в случаите, при които броят на зъбите  $z$  на зацепените колела е малък ( $z = 3, 2, 1$ ). Тогава коефициентът на челно припокриване  $\varepsilon_\alpha$  е по-малък от единица и след излизане от зацепване на дадена зъбна двойка, следващата след нея зъбна двойка още не е зацепила (движението в предавката се прекъсва).

Ако зъбното зацепване е еволвентно и симетрично, в първата част [1] на статията се доказва, че при  $\varepsilon_\alpha > 1$  най-малкият равен брой зъби на колелата от предавката е  $z_1 = z_2 = 5$ . Този резултат, получен по различни начини, се потвърждава и в публикации [3], [4] и [5]. При използване на несиметрично еволвентно зацепване за най-малкия равен брой зъби на колелата от предавката, синтезирана по "метода на реализирания потенциал", се получава  $z_1 = z_2 = 4$ . В този случай срещуположните странични профили на зъбите са очертани от различни еволвентни криви. При това коефициентът на челно припокриване за работната посока на движението е  $\varepsilon_\alpha > 1$ , а за неработната посока  $\varepsilon_\alpha < 1$ . Несиметричното еволвентно зацепване с малък брой зъби, за което  $\varepsilon_\alpha < 1$ , може да се използва при нереверсивно предаване на движението между зацепените колела, както и в случаят при зъбни помпи, компресори и др.

Обект на изследване в настоящата работа е нов вид несиметрично зацепване с равен брой зъби на колелата, при което непрекъснатото предаване на движението в работната посока се осъществява от еднакви зъбни колела с три, два и дори с един зъба.

### ИЗЛОЖЕНИЕ

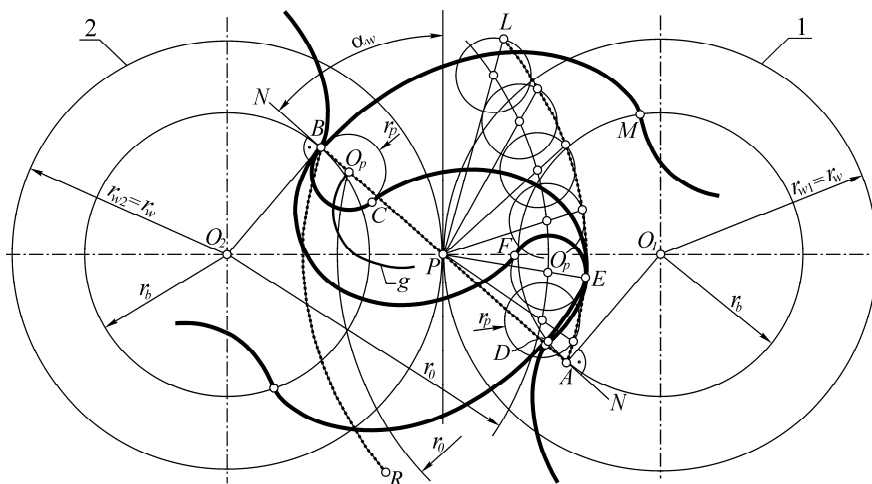
#### 1. Образуване на правозъбни предавки с еволвентно-цевно зацепване

Основната причина, поради която не е възможно да се използват зъбни колела с 1, 2 и 3 зъба при несиметричното еволвентно зацепване с предавателно отношение единица, произтича от повишената склонност към заостряне на зъбите, в резултат на което се намаляват дължините на еволвентните профили. Това води до намаляване на коефициента на челно припокриване и получаване на стойности, по-малки от единица, както за работната, така и за неработната посока на движение. Коефициентът на челно припокриване в работната посока на движение може да се повиши, ако се промени видът на несиметрично зацепване.

Предложено от автора зацепване [2] е показано на фиг. 1, където с радиусите  $r_{w1} = r_{w2} = r_w$  са означени центроидите (началните окръжности) на еднаквите зъбни колела. Тези колела имат несиметрични зъби с изпъкнала работната страна и вдлъбнатата неработна страна. Геометричната форма на зъба е получена от три последователно свързани криви. Първата крива, оформяща изпъкналата страна на зъба, е еволвентната крива  $MB$ . Началото ѝ започва от точката  $M$ , лежеща на основната окръжност с радиус  $r_b$ , а края ѝ завършва в последната точка  $B$  от линията на зацепване  $AB$ . С втората крива е профилиран върхът на зъба в участъка от точка  $B$

до точка  $C$ . Тази крива е дъга от окръжност с център  $O_p$  и радиус  $r_p$ . При това центърът  $O_p$  лежи на нормалата  $N-N$  към еволвентния профил, построена през крайната му точка  $B$  (допирателната права към основната окръжност, спусната от крайната точка на еволвентната крива). Третата крива  $CE$  оформя вдлъбнатата страна на несиметричния зъб. Тя е получена като обвиваща крива на относителните положения, които заема върхът на зъба (окръжността с радиус  $r_p$ ) от колело 2 в равнината на колело 1 при осъществяване на синхронно завъртане, имитиращо зъбното зацепване. Крайната точка  $D$  от тази крива лежи на основната окръжност  $r_b$  и се явява начална точка от еволвентния профил на следващия зъб.

Предложеното зъбно зацепване е наречено „еволвентно-цевно зацепване”, тъй като в работната посока на движение спрегнати профили са зацепените еволвентни криви, а в противоположната посока зацепват окръжността с радиус  $r_p$  (цевната окръжност) от едното колело и вдлъбнатият профил на зъба от другото колело. Казано с други думи, в едната посока на движение зацепването е еволвентно, а в другата – цевно. При това цевното зацепване е коригирано, тъй като центровете на цевите  $O_p$  не лежат на началните окръжности с радиус  $r_w$ . За разлика от традиционното цевно зацепване, при което профилът на зъба на едното колело е окръжност, а на другото – еквилистантна крива на епициклоида, в разглеждания случай неволвентният профил на зъбите при двете колела е съчетание от две криви.



Фиг.1 Образуване на еволвентно-цевното зацепване

При образуване на цевното зацепване като теоретични профили на зъбите се приемат: а) точка  $O_p$  от колело 1, б) кривата  $g$  от колело 2. В действителност в зъбната предавка вместо теоретичните профили се използват техните еквилистантни криви (равноотстоящи криви по профилните нормали): а) окръжността с радиус  $r_p$  за колело 1, б) кривата  $BF$  за колело 2. От начина, по който се образува вдлъбнатият профил  $BF$  на зъба от колело 2 (който е един и същ с профила  $CD$  на колело 1) следва, че той е *еквилистантна крива на удължена епициклоида*.

На фиг. 1 линиите на зацепване на еволвентното и цевното зацепване са начертани като геометрично място на контактните точки между съответните зъбни профили в неподвижната равнина. Отсечката  $AB$ , както вече бе споменато, е линията, по която зацепват еволвентните профили. Цевното зацепване в предложената предавка се характеризира с две линии на зацепване –  $AL$  и  $BR$ . По линията на зацеп-

ване  $AL$  контактуват вдлъбнатият профил  $DEC$  на зъба от колело 1 с дъгата  $EF$  от върха на зъба от колело 2. Аналогично по линията на зацепване  $BR$  контактуват вдлъбнатият профил  $BF$  от колело 2 с дъгата  $BC$  от колело 1. Линии на зацепване  $AL$  и  $BR$  са линиите на зацепване на действителните профили от зъбите. Теоретичните профили на зъбите контактуват по други линии на зацепване, които в случая са двете дъги от окръжности с радиуси  $r_0$ .

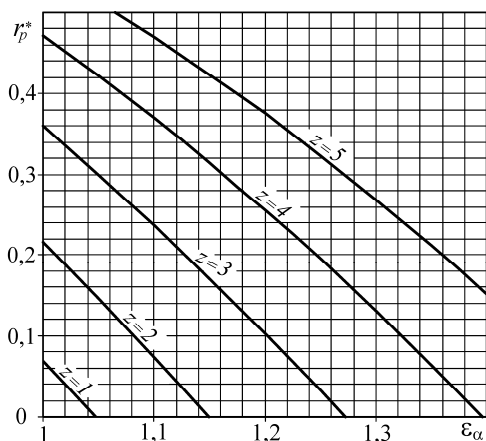
## 2. Основни геометрични размери

Геометрията на предложената предавка с еволвентно-цевно зацепване се дефинира напълно от *три независими параметъра*: модулът  $m$ , броят на зъбите на колелата  $z=z_1=z_2$  и коефициентът на челно припокриване  $\varepsilon_\alpha$  за работната посока на движение. Модулът, както при традиционното еволвентно зацепване, се явява мащабен фактор, а коефициентът на челно припокриване осигурява контактуване на еволвентните профили по цялата дължина на линията на зацепване  $AB$ . Необходимите формули за геометричното изчисляване на основните размери на зъбните колела и зъбното зацепване са дадени в Табл. 1

Формули за геометрично изчисляване

Таблица 1

Параметър	Означение	Формула
Коефициент на челно припокриване	$\varepsilon_\alpha$	$\varepsilon_\alpha = (z_1 + z_2) / 2\pi \tan \alpha_w$
Ъгъл на зацепване	$\alpha_w$	$\alpha_w = \arctan(\pi \varepsilon_\alpha / z)$
Радиус на началната окръжност	$r_w$	$r_w = 0,5mz$
Междусово разстояние	$a_w$	$a_w = 2r_w = mz$
Радиус на основната окръжност	$r_b$	$r_b = r_w \cos \alpha_w = 0,5mz \cos \alpha_w$
Отсечка на зацепване (работна страна)	$l_{AB}$	$l_{AB} = a_w \sin \alpha_w = mz \sin \alpha_w$
Радиус на крайната точка от еволв. профил	$r_B$	$r_B = mz \sqrt{1 - 0,75 \cos^2 \alpha_w}$
Коефициент на цевната окръжност	$r_p^*$	Фиг. 2
Радиус на цевната окръжност	$r_p$	$r_p = r_p^* m$
Радиус до центъра на цевната окръжност	$r_0$	$r_0 = m \sqrt{(0,5z \cos \alpha_w)^2 + (z \sin \alpha_w - r_p^*)^2}$
Радиус на върховата окръжност	$r_a$	$r_a = r_0 + r_p$
Радиус на вътрешната окръжност	$r_f$	$r_f = a_w - r_a$



Фиг.2 Определяне радиуса на цевната окръжност,  $r_p = r_p^* m$

Намирането на радиуса  $r_p$  на цевната окръжност е най-сложната задача при геометричното проектиране на еволвентно-цевната предавка. Сложността е предизвикана от необходимостта цевната окръжност да се допира едновременно до изпъкналата и вдлъбнатата страна на зъба. Освен това, за да се определи геометрията на вдлъбнатия профил е необходимо предварително да е известен радиусът на цевната окръжност. За определянето на радиуса на цевната окръжност са разработени алгоритъм и компютърна програма за числено решение. С помощта им са построени показаните на фиг. 2 графики, от които непосредствено се определя безразмерният коефициент  $r_p^*$  на радиу-

са на цевната окръжност при зададен коефициент на челно припокриване и брой зъби на колелата. След това чрез зададения модул  $m$  се намира действителната големина на радиуса на цевната окръжност ( $r_p = r_p^* m$ ).

### 3. Резултати и коментари

При геометричното проектиране на несиметрични предавки с еволвентно-цевно зацепване задължително трябва да се удовлетворят следните две ограничителни условия: 1) коефициентът на припокриване на еволвентното зацепване да е по-голям от единица; 2) коефициентът на радиуса на цевната окръжност да е по-голям от нула. Първото условие, осигурява непрекъснато предаване на движението в работната посока на движение, а с второто условие се изключва възможността вдлъбнатият профил на зъба да изреже част от изпъкналия еволвентен профил (вследствие пресичането на тези профили преди крайната точка В на еволвентната крива).

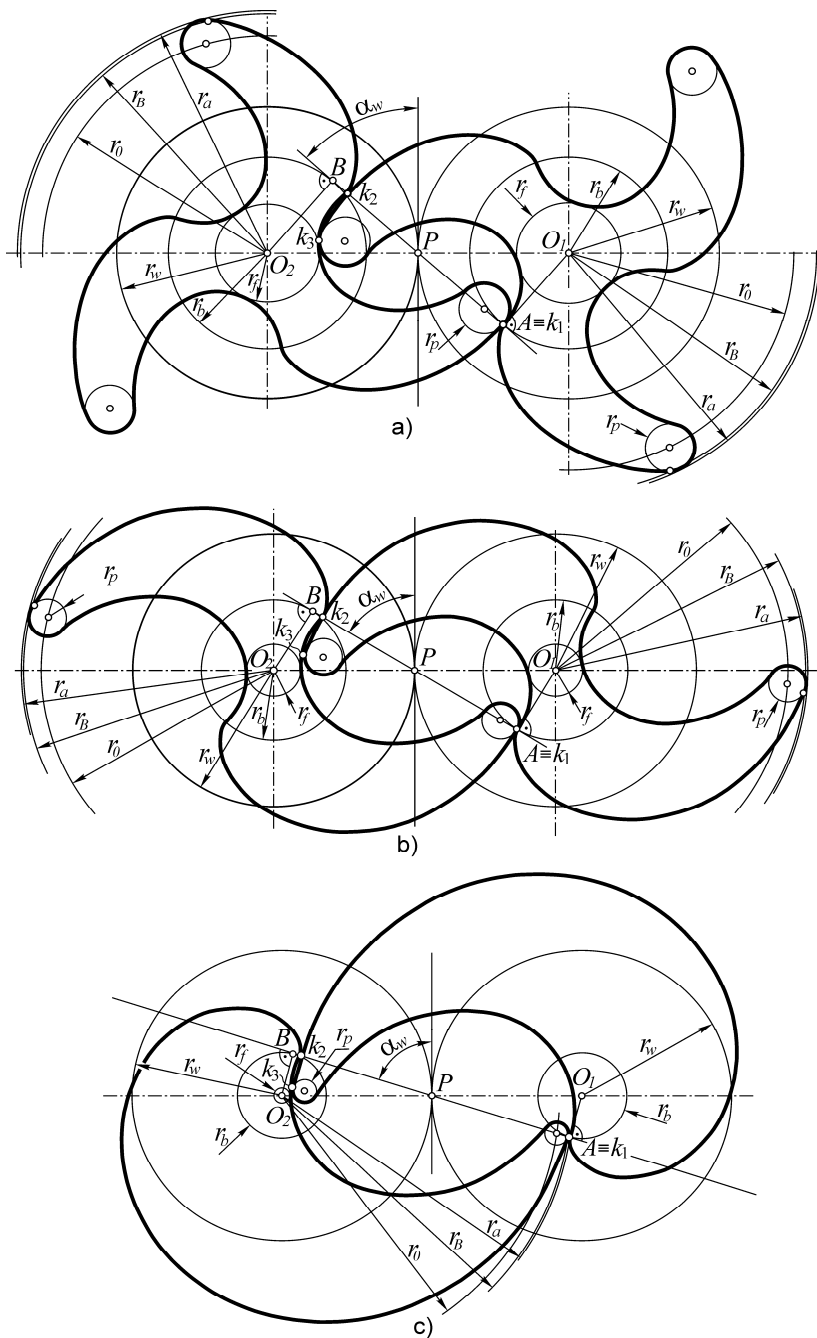
С помощта на разработената методика за геометрично изчисляване на несиметрично еволвентно-цевно зацепване са проектирани зъбни предавки с 3, 2 и 1 зъба. Резултатите от геометричните изчисления са дадени в Табл. 2. За осъществяване на взаимна връзка между изчислените величини и геометричната им същност, на фиг. 3 са визуализирани получените резултати.

**Резултати от изчисленията на предавки с три, два и един зъба Таблица 2**

Параметри и размерности	Означение	Изчислени резултати		
Брой зъби	$z$	$z_1=z_2=3$	$z_1=z_2=2$	$z_1=z_2=1$
Модул, mm	$m$	40	40	40
Коефициент на челно припокриване	$\varepsilon_\alpha$	1,09852091	1,05951322	1,02
Ъгъл на зацепване, deg	$\alpha_w$	$49^0$	$59^0$	$72.668501^0$
Междусово разстояние	$a_w$	120,000	80,000	40,000
Отсечка на зацепване (работна страна), mm	$l_{AB}$	90,5652	68,5734	38,1839
Радиус на началната окръжност, mm	$r_w$	60,000	40,000	20,000
Радиус на основната окръжност, mm	$r_b$	39,36354	20,60152	5,95799
Радиус на крайната точка от еволвентния профил, mm	$r_B$	98,7499	71,6012	38,6459
Коефициент на цевната окръжност	$r_p^*$	0,239073	0,132423	0,039144
Радиус на цевната окръжност, mm	$r_p$	9,56291	5,29691	1,56574
Радиус до центъра на цевната окръжност, mm	$r_0$	90,0603	66,5457	37,0997
Радиус на върховата окръжност, mm	$r_a$	99,6232	71,8426	38,6654
Радиус на вътрешната окръжност, mm	$r_f$	20,3768	8,1574	1,3346

От картините на еволвентното зацепване се вижда, че в момента, в който дадена двойка еволвентни профили влиза в контакт в началната точка  $A$  на линията на зацепване  $AB$ , в същия момент предходната двойка еволвентни профили контактува в лежача върху линията  $AB$  точка  $k_2$ . Същите профили излизат от контакт в последната възможна точка  $B$  на линията на зацепване. Тъй като еволвентните профили контактуват по цялата дължина на линията на зацепване  $AB$ , коефициентът на припокриване в работната посока на движение е равен на максимално възможната му стойност при съответния ъгъл на зацепване. Проектираните зъбни колела с три и два зъба са изработени, а зацепването между реалните образци е показано на фиг. 4.

Като екзотична може да се разглежда показаната на фиг. 3с еволвентно-цевна предавка, образувана от две колела с по един зъб. Коефициентът на челно припокриване в този случай е  $\varepsilon_\alpha = 1,02$ , а възможният интервал на изменението му е  $\varepsilon_\alpha = 1 \div 1,045968$ . Тъй като зъбните колела имат само по един зъб, необходимото припокриване ( $\varepsilon_\alpha > 1$ ) се осигурява от наличието в определени моменти на две контактни



Фиг. 3 Предавки с несиметрично еволвентно-цевно зацепване

точки  $k_1$  и  $k_2$  между зацепените еволвентни профили. В тази предавка ъгълът на зацепване нараства значително ( $\alpha_w=72,6685^\circ$ ), а радиусът на цевната окръжност е сравнително малък ( $r_p=1,566$  mm). Поради това зацепването между колела с един зъб представлява интерес главно от теоретичен аспект, като предавка с най-малък брой зъби.



Фиг.4 Образи на предавки с несиметрични зъби

За улесняване избора на началните величини ( $\varepsilon_\alpha$  и  $\alpha_w$ ) при геометричното проектиране на несиметрични предавки, образувани от колела с 3, 2 и 1 зъба, е съставена Табл. 3, в която стойностите на  $r_p^*$  са определени по числен път при различни значения на  $\varepsilon_\alpha$ . От нея се вижда, че възможните интервали на изменение на  $\varepsilon_\alpha$  и  $\alpha_w$  се стесняват значително с намаляването на броя на зъбите.

Параметри на несиметричното зацепване

Таблица 3

$\varepsilon_\alpha$	$\alpha_w$ [deg]			$r_p^*$		
	$z = 3$	$z = 2$	$z = 1$	$z = 3$	$z = 2$	$z = 1$
1	46,32070	57,51836	72,34321	0,360072	0,215340	0,068911
1,01	46,60539	57,77609	72,50732	0,348384	0,201694	0,054077
1,02	46,88711	58,03019	72,66850	0,336555	0,187927	0,039144
1,03	47,16590	58,28072	72,82683	0,324588	0,174042	0,024124
1,045968	47,60509	58,67356	73,07391	0,305198	0,151639	0
1,06	47,98504	59,01162	–	0,287882	0,131729	–
1,08	48,51707	59,48223	–	0,262767	0,103016	–
1,10	49,03817	59,94009	–	0,237163	0,073945	–
1,12	49,54857	60,38564	–	0,211091	0,044552	–
1,149965	50,29380	61,03111	–	0,171202	0	–
1,175	50,89903	–	–	0,137164	–	–
1,200	51,48811	–	–	0,102577	–	–
1,250	52,62221	–	–	0,031796	–	–
1,272034	53,10405	–	–	0	–	–

При това максималният коефициент на припокриване, ако  $z=3$  е  $\varepsilon_{\alpha,\max}=1,272$ , а при  $z=2$  този коефициент е  $\varepsilon_{\alpha,\max}=1,150$ . От Табл. 3 се установява също, че максималните стойности на коефициента на радиуса на цевната окръжност, получени при  $\varepsilon_\alpha=1$ , са съответно: при  $z=3 \rightarrow r_{p,\max}^*=0,360$ ; при  $z=2 \rightarrow r_{p,\max}^*=0,215$ ; при  $z=1 \rightarrow r_{p,\max}^*=0,069$ . Табл. 3 може да се използва непосредствено за определяне

на  $r_p^*$  при проектиране на несиметрични предавки, чийто коефициент на припокриване е равен на съответната стойност, зададена в първата колона на таблицата.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С предложеното зацепване се преодолява недостатъка на симетричното и несиметричното еволвентно зацепване, свързан с невъзможността зацепените колела да осъществят непрекъснато предаване на движението, когато имат много малък брой зъби. В настоящата работа се показва, че ако се използва несиметрично еволвентно-цевно зацепване, при което дължината на работните еволвентни профили се увеличи за сметка на неработните профили, се появява възможност да се осигури непрекъснато предаване на движението в работната посока, когато броят на зъбите е по-малък от четири. Извършените изследвания показват, че при геометричното проектиране на еволвентно-цевно зацепване между колела с три, два и един зъба, в работната посока на движение може да се осигури коефициент на челно припокриване, който да е по-голям от единица.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] Алипиев О., Зъбни предавки с малък брой прави зъби (Част I – предавки със симетрично и несиметрично еволвентно зацепване). Предходната статия в същия сборник

[2] Алипиев О., Цилиндрична правозъба предавка с външно зацепване. Заявка за патент № 110302 Официален бюлетин на Патентното ведомство № 7, 2010

[3] Вулгаков Э., Теория эвольвентных зубчатых передач. М., Машиностроение, 1995, 320 с.

[4] Котельников В., Наименьшие числа прямых внешних зубьев, нарезанных нестандартным инструментом реечного типа. Изв. вузов. Машиностроение, №6, 1973, с.52-56

[5] A.L. Kapelevich, R.E. Kleiss, Direct gear design for spur and helical gears, Gear Technology, 9/10 (2002) p.29–35.

### За контакти:

Доц. д-р Огнян Алипиев, Катедра "Теория на механизмите и машините и подемно-транспортна техника и технологии", Русенски университет "Ангел Кънчев", тел: 082-888 593, e-mail: [oalipiev@uni-ruse.bg](mailto:oalipiev@uni-ruse.bg)

**Докладът е рецензиран**