

Математичен модел за кинематичен анализ на механизма на Рцепа

Петър Коев

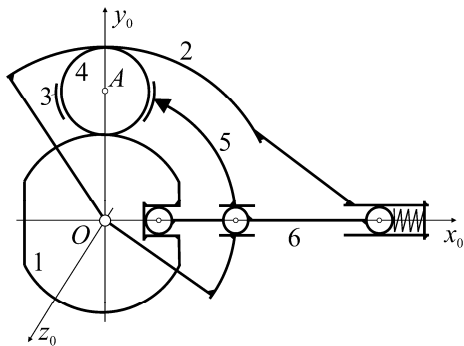
Mathematical model for kinematic analysis of Rzeppa mechanism: A mathematical model for kinematic analysis is created – determining the spin, the angular velocity and the angular acceleration of the Rzeppa mechanism outward shaft as a function of time and the deviation from the synchronous movement requirement. Mathematical models of two quality criteria of the mechanism are created – level of unevenness and dynamic load coefficient. The model for the first criterion is analytical and algorithmic for the second one.

Keywords: Rzeppa mechanism, spherical mechanism, kinematic analysis, mathematical model.

ВЪВЕДЕНИЕ

В съвременните автомобили предаването на въртливо движение на управляемите колела става с механизми, наричани с различни имена, едно от които е синхронни предавки [2]. Един от първите патенти на такъв механизъм е от 1927 г. и е на Alfred Rzeppa [6]. През 1931 г. F. Muard извежда по теоретичен път необходимото и достатъчно условие за синхронно предаване на движение от този механизъм [5]. През 1933 г. Рцепа доразвива своята идея като въгражда допълнително лостова система, с която да се удовлетворява изискването за синхронност [7]. По тези предавки се работи и в по-ново време [8], [3] при запазване на идеята от първия патент и промяна само в начина за осъществяване на изискването за синхронност на въртливото движение.

На фиг. 1 е показана структурната схема на механизма с най-същественото (без валовите и стойката) от втория патент на Рцепа при положение за праволинейно движение на автомобила, т. е. при сливащи се геометрични оси на входящия и на



изходящия вал. Нека оста на задвижващия вал се слива с координатната ос x_0 . Нека още този вал да е свързан неизменно със сферата 1, по която са оформени външно шест канала, меридианно разположени относно оста му, равномерно разпределени и с почти полукръгло напречно сечение. Нека понататък този вал и сферата разглеждаме като звено 1. Във всеки канал се намира по една сачма 4, която го запълва в напречно сечение (за простота на схемата е изобразена само една от тях). Всички сачми са обхванати от сепаратора 3. Изходящият вал на механизма, е свързан неизменно с детайла

2 (нека и тук, подобно на по-горе, тази съвкупност разглеждаме като звено 2). Това звено има вътрешна сферична повърхност с оформени по нея, подобно на 1, канали. Всяка от сачмите се намира едновременно в канал на звеното 1 и канал на звеното 2.

Въртливото движение на 1 около оста x_0 се предава на 2 посредством сачмите 4. Съвкупността от звената 1, 2, 3 и 4 образуват един сферичен механизъм, с който

се пренася основното движение. Нека го наречем основен механизъм. Нека приемем, че едното управляемо колело на автомобила е свързано неизменно със звено-то 2. При отклоняване (завъртане около z_0) на управляемост колело на някакъв ъгъл от положението за праволинейно движение, сепараторът ще се отклони на съответен ъгъл, спрямо началното си положение, посредством звеното 2, т. нар. делителен лост 6 и чашата 5. Всъщност звената 2 и 3 са съответно задвижващо и изпълнително звено на един равнинен лостов механизъм, т. е. механизъм за управление (позициониране) на сепаратора 3. Механизмът на Рцепа има две действителни степени на свобода, едната от които е свързана с предаване на въртеливото движение от звеното 1 към звеното 2, а другата – с позиционирането на сепаратора.

Синхронното въртене на валове на входа и на изхода на механизма е гарантирано, ако равнината на сепаратора е бисектриса на ъгъла между тези валове [5]. Това изискване обаче лостовият механизъм, като правило, може да осъществи само с приближение.

В [1] е предложен опростен подход за синтез на лостовия механизъм за управление на сепаратора и е решен пример. Анализ на синтезирания механизъм не е направен. В [4] е извършен оптимизационен синтез на този механизъм. Като критерий за оценка е използвано максималното отклонение от изискването за синхронност. На синтезирания механизъм е направен анализ (по същество той е геометричен) – намерени са стойностите на отклонението от изискването за синхронност като функция на ъгъла на завъртане (отклоняване) на звеното 2.

Тъй като решаваната в [1] и [4] задача за синтез е с множество решения, анализът на механизма за управление на сепаратора е естествена необходимост. Само чрез анализ може да се направи оценка на полученото от синтеза решение. Възниква обаче въпросът – дали анализът на механизма за управление дава достатъчно добра информация за работата на основния механизъм? Отговорът на този въпрос е категорично отрицателен, тъй като отклонението от изискването за синхронност е много косвена оценка за работата на основния механизъм. Много по-добре е да се извършва кинематичен, а още по-добре динамичен анализ на този механизъм.

Отклонението от желаното изискване за синхронност води до неравномерност във въртенето на изходящия вал, а това от своя страна до инерционно натоварване. За определяне на това натоварване е необходимо най-напред да се направи кинематичен анализ на механизма на Рцепа.

Не ни се удаде да намерим в литературата математичен модел за кинематичен анализ, по който да се оценява поведението на основния механизъм при отклонения от изискването за синхронност. Целта на работата е изграждане на такъв модел, без да се отчита видът на механизма за управление на сепаратора.

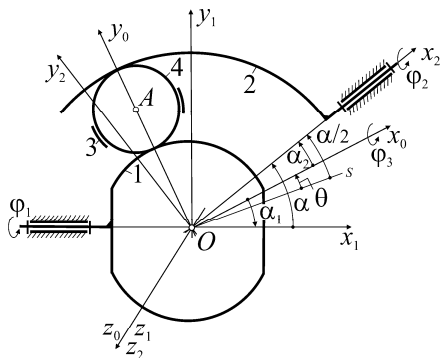
ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Предавателна функция

Въртеливото движение в механизма може да се предаде само с една сачма. Начало O на въведената на фиг. 1 координатна система $Ox_0y_0z_0$, за която приемаме краткото означение Σ_0 , съвпада с центъра: O_1 на сферичната повърхнина на звено-то 1; O_2 на концентричните сферични повърхнини на звеното 2; O_3 на сепаратора 3; O_5 на сферичната повърхнина на звеното 5. Оста x_0 приехме да се слива с геометричните оси на валове – задвижващ и задвижван, – а оста y_0 – да минава през центъра на една от сачмите.

Нека да разгледаме механизма на Рцепа без лоста 6, при което той ще има три степени на свобода. Едната е свързана с основното движение – предаване на въртеливо движение от звеното 1 към 2. Другите две степени – независимо завъртане

(отклоняване) на звената 2 и 3 на съответни ъгли. За целите на изследване, за което ще стане дума по-нататък, приемаме вместо 3 да завъртим звеното 1. Свързваме сепаратора със системата Σ_0 . Завъртаме в противоположни посоки около оста z_0 звеното 1 и звеното 2 съответно на ъгли α_1 и α_2 . Нека да фиксираме входящия и изходящия вал в тези положения. Структурната схема на механизма, без направляващата чаша и делителния лост, е показана на фиг. 2. Там, освен Σ_0 , са въведени още координатните системи: $\Sigma_1 - Ox_1y_1z_1$, – оста x_1 на която се слива с геометричната ос

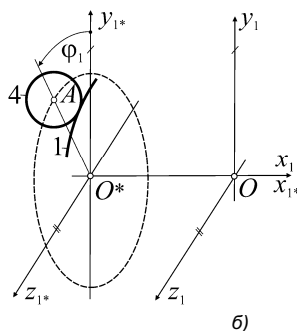
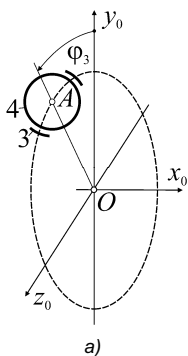


на вала на звеното 1; $\Sigma_2 - Ox_2y_2z_2$, – оста x_2 се слива с оста на вала на звеното 2. Координатните системи Σ_0 , Σ_1 и Σ_2 приемаме да са неподвижни. За преход от Σ_0 в Σ_1 ще служи матрицата

$$M_{10} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

а за обратен преход матрицата M_{10}^{-1} . Матрицата M_{20} за преход от Σ_0 в Σ_2 се получава от (1) чрез формална замяна на индекса 1 с 2.

При завъртане на звеното 1 на ъгъл φ_1 , нека звеното 2 се завърти, относно избраното на фиг. 2 положение, на ъгъл φ_2 , а сепараторът 3 – на ъгъл φ_3 . Ще намерим най-напред връзката между ъглите φ_1 и φ_3 .



Преди това обаче нека направим уточнението, че символът A е обобщено означение на: A_1 и A_2 , които са нематериални точки от каналите съответно на звената 1 и 2; точката A_3 , която е център на отвора на сепаратора, в който отвор се помещава сачмата 4; точката A_4 – центъра на сачмата. В процеса на движение тези четири точки винаги съвпадат.

На фиг. 3а е показано новото положение на сачмата в системата Σ_0 , в която координатите на точката A , при приемането $l_{OA}=R$, са $[0, R \cos \varphi_3, R \sin \varphi_3]^T$. За координатите на тази точка в Σ_1 чрез матрицата (1) получаваме

$$\begin{aligned}x_1^A &= R \sin \alpha_1 \cos \varphi_3, \\y_1^A &= R \cos \alpha_1 \cos \varphi_3, \\z_1^A &= R \sin \varphi_3.\end{aligned}\quad (2)$$

През новото положение на точката A прекарваме равнина, която да е перпендикулярна на оста x_1 . Нека прободът на x_1 с тази равнина означим с точката O^* – фиг. 3б. В тази точка поставяме началото на координатната система Σ_1^* , оста x_1^* на която се слива с оста x_1 , а осите y_1^* и z_1^* са успоредни и еднакво ориентирани относително съответните оси на системата Σ_1 . От това обстоятелство, за координатите на точката A , следват равенствата

$$y_1^A = y_1^*, \quad z_1^A = z_1^*. \quad (3)$$

Координатите на точката O^* в системата Σ_1 са $x_1^{O^*} = x_1^A$, $y_1^{O^*} = 0$, $z_1^{O^*} = 0$, т. е. в процеса на движение Σ_1^* ще се отмества по оста x_1 .

От друга страна за координатите на точката A в системата Σ_1^* можем да напишем

$$\begin{aligned}x_1^{*A} &= 0, \\y_1^{*A} &= l_{O^*A} \cos \varphi_1, \\z_1^{*A} &= l_{O^*A} \sin \varphi_1,\end{aligned}\quad (4)$$

където $l_{O^*A} = R \sqrt{\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \varphi_3 + \sin^2 \varphi_3}$ е разстоянието между точките O^* и A и е определено въз основа на координатите им в системата Σ_1 .

Като вземем под внимание (2), (4) и коя да е от двете зависимости от (3), след преобразуване получаваме

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \alpha_1. \quad (5)$$

По аналогия, за връзката между ъглите φ_2 и φ_3 , можем да напишем

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \operatorname{tg} \varphi_2 \cos \alpha_2. \quad (6)$$

От (5) и (6) за предавателната функция на механизма на Рцепа получаваме

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (7)$$

Ако $\alpha_1 = \alpha_2$, от (7) получаваме $\varphi_2 = \varphi_1$, т. е. валове на механизма ще се въртят в синхрон. Същият вид има и предавателната функция на сдвоен карданов механизъм. Механизмът на Рцепа е еквивалентен в кинематичен аспект на сдвоен карданов механизъм с пресичащи се оси на входящия и изходящия вал. Търсенето на тази еквивалентност е всъщност задачата на споменатото по-горе изследване.

Нека с α означим ъгъла между осите x_1 и x_2 , а с θ ъгъла между оста x_0 и ъглополовящата s на α . Ако изразим α_1 и α_2 чрез тези ъгли и заместим в (7) получаваме

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)} \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (8)$$

В този вид зависимостта е неудобна за ползване поради наличието в нея на тригонометрични функции с точки на прекъсване. Ако означим

$$k = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)},$$

на (8) след преобразуване даваме вида

$$\cos \varphi_2 = \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{\cos^2 \varphi_1 + k^2 \sin^2 \varphi_1}}. \quad (9)$$

От (9) се вижда, че функцията има период на изменение $[0, \pi]$.

2. Ъглова скорост и ъглово ускорение

След диференциране на (9) по времето и преобразувания получаваме зависимостта, по която ще се изменя ъгловата скорост на изходящия вал на механизма

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{k \sin^2 \varphi_1 + \frac{\cos^2 \varphi_1}{k}}, \quad (10)$$

откъдето се вижда, че при $k=1$, т. е. при $\theta=0$, $\omega_2=\omega_1$ – ще има синхронно въртене на задвижващия и задвижвания вал.

Ако приемем $\omega_1=\text{const}$, от (10) след диференциране по времето и преобразувания, за ъгловото ускорение на вала 2 получаваме

$$\varepsilon_2 = \frac{\sin 2\varphi_1}{\left(\frac{\cos^2 \varphi_1}{k} + k \sin^2 \varphi_1\right)^2} \left(\frac{1}{k} - k\right) \omega_1^2. \quad (11)$$

Ясно се вижда от (11), че при $k=1$ ъгловото ускорение на изходящия вал на механизма е $\varepsilon_2=0$.

3. Показатели за качество

Механизмът на Рцепа е възможно да се оцени по няколко показателя въз основа на кинематичния анализ. Ще приведем два от тях.

Степен на неравномерност. Ако приемем $\omega_1=\text{const}$, степента на неравномерност в движението на изходящия вал се дефинира с израз

$$\delta = \frac{\omega_{2,\max} - \omega_{2,\min}}{\omega_1}. \quad (12)$$

От (10) при $\varphi_1=0$ и $\varphi_1=\pi/2$ намираме съответно $\omega_{2,\min}$ и $\omega_{2,\max}$ за $k<1$ и обратно – $\omega_{2,\max}$ и $\omega_{2,\min}$ – за $k>1$. След преобразувания на получения израз за δ получаваме

$$\delta = \frac{2 \sin \alpha |\sin 2\theta|}{\cos \alpha + \cos 2\theta}. \quad (13)$$

Коефициент на динамично натоварване. В резултат на неравномерното въртене на изходящия вал на механизма, върху този вал, както отбелязахме по-горе, ще възниква променливо както по знак, така и по стойност инерционно натоварване. За дефинирането на този коефициент приемаме

$$\xi = J \frac{\varepsilon_{2,\max} - \varepsilon_{2,\min}}{M}, \quad (14)$$

където J и M са съответно масовият инерционен момент на управляемото колело, свързано с изходящия вал, и приложеният въртящ момент върху входящия вал на механизма. За $\varepsilon_{2,\max}$ и $\varepsilon_{2,\min}$ не е възможно да се изведат аналитични изрази, поради което тези стойности следва да се определят алгоритмично.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изграденият математичен модел за кинематичен анализ позволява да се направи по-реална преценка за качествата на механизма на Рцепа след синтеза на механизма му за управление. Степента на неравномерност, за разлика от показателя – отклонение от изискването за синхронност, което има чисто геометричен характер, – носи по-достоверна информация. Най-добра оценка обаче може да се даде при съпоставяне на инерционното натоварване на изходящия вал и предавания въртящ момент, т. е. при използване на коефициента на динамично натоварване. В този смисъл, извършеното в тази работа е част от онова, което трябва да се направи, за да се даде такава оценка за механизма на Рцепа.

Следва да отбележим, че ъгловата скорост на входящия вал на механизма, респ. скоростта на движение на автомобила, и ъгълът на отклоняване на съответното управляемо колело не са независими величини. Необходимо е да се изведе функционалната връзка между тях, за да стане възможно използване на приведените показатели за качество. Това ще бъде обект на следваща разработка.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бадиев, А.А. *Карданная передача*. Улан-Удэ, ВСГТУ, 2002.
- [2] Лукин, П.П., Г.А. Гаспарянц, В.Ф. Родионов. *Конструирование и расчет автомобиля*. М. Машиностроение, 1984.
- [3] Jacob, W., M.D. Jacob. *Rzeppa joint*. US Patent 7393283 B2, 2008.
- [4] Pennestri, E., P.P. Valentini, R. Stefanelli. *Optimal design and multibody analysis of Rzeppa pilot-lever joint*. Multibody dynamics, Milano, Italy, 2007.
- [5] Pennestri, E., P.P. Valentini. *Kinematic design and multibody analysis of Rzeppa pilot-lever joint*. Università di Roma Tor Vergata, Italy, 2008.
- [6] Rzeppa, A.H. *Universal joint*. US Patent 1665280, 1927.
- [7] Rzeppa, A.H. *Universal joint*. US Patent 201899, 1933.
- [8] Seiici, H., N. Otsuka. *Constant velocity universal joint*. US Patent 4331005, 1984.

За контакти:

Доц. д-р инж. Петър Атанасов Коев, Катедра “Теория на механизмите и машините, подемно-транспортна техника и технологии”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел: 082-888 486, e-mail: pkoev@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран.