Зъбни предавки с малък брой прави зъби (Част I – предавки със симетрично и несиметрично еволвентно зацепване)

Огнян Алипиев

Spur gear drives with a small number of teeth (Part I – symmetric and asymmetric involute meshing) *The problem of finding the least possible number of spur teeth of cylindrical gear drives with external symmetric and asymmetric meshing, is solved, as the meshing is formed by gears of equal number of teeth, where the transverse contact ratio is larger than one. A new method for geometric synthesis is proposed, called the "method of realized potential", by which the parameters of the rack-cutter for cutting of gears with a small number of teeth are found. Using this method it is proved that the smallest possible number of teeth of symmetric involute meshing is five, and of the asymmetric one – four.*

Key words: *Spur gear; Involute meshing; Asymmetric teeth; Rack-cutter; Contact ratio.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Един от малкото недостатъци на традиционното еволвентно зацепване е невъзможността му да се използва при цилиндрични правозъби предавки с малък брой зъби z. Тогава коефициентът на челно припокриване ε_α е по-малък от единица и след излизане от зацепване на дадена зъбна двойка, следващата след нея зъбна двойка още не е зацепила (движението в предавката се прекъсва). Причините за ниския ε_a се дължат както на традиционния метод за геометрично изчисляване [1÷3], така и на повишената склонност към подрязване и заостряне на еволвентните зъби, когато техният брой е малък ($z = 2, 3, 4, 5$).

Обект на изследване в настоящата работа са правозъби предавки със симетрично и несиметрично еволвентно зацепване, при които колелата имат малък равен брой зъби ($z = z_1 = z_2$). Зъбни предавки от този вид намират приложение в зъбни помпи, хидромотори, компресори, вентилатори и др.

За решаването на задачата, свързана с геометричния синтез на еволвентните предавки с малък брой зъби са известни два различни метода, с които са получени почти еднакви крайни резултати. Недостатък на първия метод [4, 5] е отсъствието на критерии относно възможността за формообразуване на получените зъбни колела по метода на отъркалване. При втория метод [6] е трудно да се определи областта на съществуване на синтезираната предавка и да се намери най-доброто решение по отношение на коефициента на припокриване. И двата метода не разглеждат случаите, при които еволвентните профили на зъбите са несиметрични.

В настоящата работа при определяне на най-малкия равен брой зъби на колелата е използван нов метод за синтез [7], наречен „метод на реализирания потенциал". С този метод са синтезирани еволвентни предавки както със симетрично, така и с несиметрично зацепване.

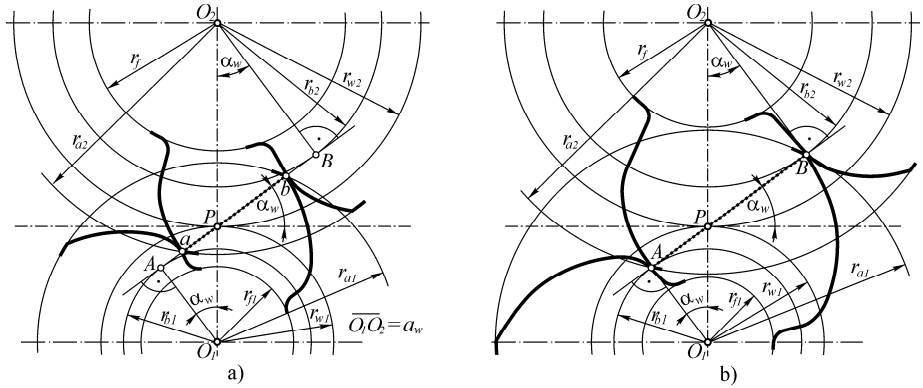
ИЗЛОЖЕНИЕ

1.Метод на реализирания потенциал

Осигуряването на непрекъснато и плавно предаване на движението от едното колело към другото в работната посока на движение при еволвентната предавка с прави зъби се проверява чрез коефициента на припокриване ε_α, определен по формулата

$$\varepsilon_\alpha = \overline{ab} / p_b \,, \tag{1}$$

в която $\overline{ab}$ е действителната линия на зацепване (фиг. 1а), а $p_b\,(p_b = p_{b1} = p_{b2})$ е стъпката на зъбите по основните окръжности r_{b1} и r_{b2}. Изпълнението на условието $\varepsilon_\alpha > 1$ гарантира, че преди още да е излязла от зацепване една двойка зъби, следващата след нея втора двойка зъби вече е влязла в зацепване.



Фиг.1. Потенциал на еволвентната предавка

При традиционния метод за геометрично изчисляване на еволвентните предавки [3] действителната линия на зацепване е винаги по-малка от теоретично възможната линия на зацепване $\overline{AB}$, построена като обща допирателна към основните окръжности. В този случай от равенство (1) следва, че при $\overline{ab} < \overline{AB}$ коефициентът на припокриване е по-малък от максимално възможния (при $\overline{ab} = \overline{AB}$).

За оценяване на еволвентното зацепване по отношение неговата геометрия авторът въвежда нов качествен показател, наречен „*потенциал на зъбната предавка*". Под потенциал на дадена зъбна предавка се разбира нейният максимално възможен коефициент на челно припокриване ε_{pw} в работната посока на движение, получен при $\overline{ab} = \overline{AB}$. Очевидно е, че потенциалът на предавката може да се реализира, ако се осъществи зацепване по цялата дължина на линията на зацепване $\overline{AB}$ (фиг. 1b). В този граничен случай върховите окръжности с радиуси r_{a1} и r_{a2} минават съответно през неподвижните точки B и A от линията на зацепване.

Потенциалът на еволвентната зъбна предавка в работната посока на движение се определя по формулата

$$\varepsilon_{pw} = \frac{\overline{AB}}{p_b} = \frac{z_1 + z_2}{2\pi} \tan \alpha_w \ , \tag{2}$$

откъдето се вижда, че големината му зависи само от ъгъла на зацепване α_w и сумата на броя зъби z_1 и z_2. Този потенциал може да се реализира с еволвентно зацепване, ако зъбната предавка се проектира с предложения метод на реализирания потенциал.

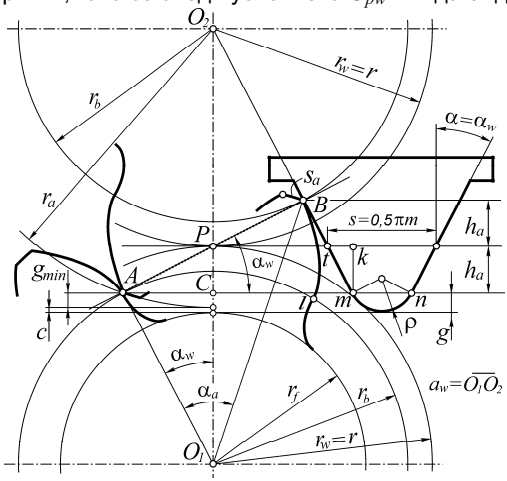
Същността на метода, при еднакви размери на зацепените колела, се изяснява с помощта на фиг. 2. Основната задача, която се решава с метода на реализирания потенциал, е пряко свързана с намирането на независимите параметри α, h_a^* и g^* на инструменталния гребен, при които зъбното зацепване се осъществява по цялата дължина на отсечката $\overline{AB}$. Зададени величини в разглеждания случай са броят на зъбите на колелата $z = z_1 = z_2$ и реализираният потенциал на предавката ε_{pw}.

Геометричното проектиране на правозъба еволвентна предавка в този случай се извършва в следната последователност:

1⁰ - Определяне на ъгъла на зацепване α_w. Чрез зададения потенциал ε_{pw} и броя на зъбите z_1 и z_2 на двете колела се изчислява ъгълът на зацепване α_w на предавката в работната посока на движение по формулата

$$\alpha_w = \alpha = \arctan(\pi \varepsilon_{pw} / z) \ , \tag{3}$$

получена след преобразуване на равенство (2). След това стойността за α_w се закръгля, като се следи условието $\varepsilon_{pw} > 1$ да бъде удовлетворено.



Фиг.2. Зацепване, образувано по метода на реализирания потенциал

2^0 - Определяне на височината на главата на зъба h_a. От фиг. 2 се установява, че отсечката на зацепване AB от зъбната предавка съвпада с линията на зацепване от зъбно-гребенната предавка, ако върховите прави на праволинейния профил от инструменталния гребен минават през точките A и B. Тогава пълната височина на праволинейния участък от гребена, равна на $2h_a$, се определя пряко от зацепването на зъбните колела. От правоъгълните триъгълници PCA и O_1AP, като се вземе предвид, че $r_w = r = 0,5mz$, за височината на главата на зъба се получава

$$h_a = h_a^* m = 0,5\,mz\sin^2\alpha\,. \qquad (4)$$

3^0 - Определяне на радиуса на върховата окръжност r_a. За да се реализира пълният потенциал на предавката, е необходимо върховите окръжности на зъбните колела да минават през крайните точки A и B на линията на зацепване. Като се вземе предвид тази особеност, за радиуса на върховата окръжност от правоъгълните триъгълници O_1AB и O_1AP се получава

$$r_a = \frac{r_b}{\cos\alpha_a} = r\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_a} = \frac{mz}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_a}\,, \qquad (5)$$

където α_a е профилният ъгъл на еволвентната крива във върховата точка на зъба. Определянето му се извършва от правоъгълния триъгълник O_1AB, след като предварително от триъгълниците O_1AP и O_2BP се намира дължината на отсечката на зацепване AB. Тогава

$$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{BP} = a_w\sin\alpha_w = mz\sin\alpha\,, \qquad (6)$$

$$\tan\alpha_a = \frac{\overline{AB}}{r_b} = \frac{mz\sin\alpha}{0,5mz\cos\alpha} = 2\tan\alpha\,. \qquad (7)$$

Особеност на разглеждания метод е независимостта на върховия радиус r_a от радиалната хлабина c на предавката (в традиционното формула r_a зависи от c).

4^0 - Проверка за незаостряне на зъбите. Необходимо условие за реализиране потенциала на предавката е срещуположните еволвентни профили на зъба да се пресекат извън кръга, заграден от върховата окръжност. Това означава, че дебелината на зъба s_a по върховата окръжност трябва да има положителна стойност, т.е. $s_a > 0$. При некоригирани зъбни колела с несиметрични еволвентни профили s_a се определя по формулата [7]

$$s_a = r_a(\frac{\pi}{z} + \mathrm{inv}\alpha + \mathrm{inv}\alpha - \mathrm{inv}\alpha_a - \mathrm{inv}\hat{\alpha}_a), \quad (8)$$

в която профилният ъгъл α_a на върховите точки от задвижващите еволвентни профили се определя от равенство (7), а профилният ъгъл $\hat{\alpha}_a$ на върховите точки от неработните еволвентнитни профили по формулата

$$\hat{\alpha}_a = \arccos(\frac{mz}{2r_a}\cos\hat{\alpha}), \quad (9)$$

След изчисляване на s_a се проверява ограничителното условие

$$s_a > 0. \quad (10)$$

При синтеза на предавката първоначално се избира симетрично зацепване. Ако проверката (10) не е изпълнена, чрез намаляване на α се прави опит отново да се реши задачата, като едновременно с това се следи $s_a > 0$. При много малък брой зъби може да окаже, че задачата няма решение. Тогава се прави опит чрез намаляване профилния ъгъл $\hat{\alpha}$ на неработната страна на зъба от гребена ($\hat{\alpha} < \alpha$) да се удовлетвори условие (10). Очевидно е, че дебелината на зъба s_a е най-голяма, когато $\hat{\alpha} = 0$. Това означава, че в редица случаи заострянето на зъбите може да се избегне, ако вместо симетрично се използва несиметрично зацепване.

5⁰ - Определяне височината на преходния участък на изходния контур – g. От фиг. 2 се вижда, че минималната височина на преходния участък $g_{\min}$ от гребена трябва да осигури безпрепятствено преминаване на върха на зъба от едното колело покрай дъното на междузъбието от другото колело. За тази цел при допиране на върха на зъба с дъното на междузъбието и $z = z_1 = z_2$, за $g_{\min}$ се получава

$$g_{\min} = r_a - r - h_a. \quad (11)$$

Като се вземе предвид, че $r = 0{,}5mz$ и равенства (4) и (5). за $g_{\min}$ се получава окончателно

$$g_{\min} = m g^*_{\min}, \quad \text{където} \quad g^*_{\min} = \frac{z}{2}(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_a} - \sin^2\alpha - 1). \quad (12)$$

Тъй като в зъбната предавка е необходимо да се осигури и радиална хлабина c, от фиг. 2 се вижда, че височината g е сума от $g_{\min}$ и c. Тогава, ако радиалната хлабина c е зададена предварително, за височината на преходния участък от гребена се получава

$$g = g_{\min} + c = m(g^*_{\min} + c^*) = mg^*. \quad (13)$$

6⁰ - Проверка за съществуване на преходния участък от инструменталния гребен. След като с равенство (13) се изчисли височината на преходния участък от инструменталния гребен, се проверява възможно ли е преходната крива да съществува с такава височина. Решаването на тази задача зависи от вида на преходната крива (окръжност, елипса, парабола и т.н.) и формата на преходния участък.

2. Резултати от геометричното проектиране

2.1. Област на съществуване на еволвентното зацепване

За да се изяснят възможностите на еволвентното зацепване, образувано от еднакви зъбни колела ($z = z_1 = z_2$), е удобно да се построи *областта на съществуване*

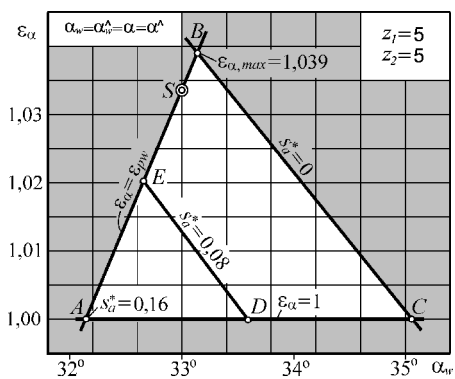
в координатна система с оси ε_α и α_w. Всяка точка от областта на съществуване съответства на зъбно зацепване с различна геометрия, при което коефициентът на челно припокриване е по-голям от единица.

На фиг. 3 е построена областта на съществуване ABC на симетрично еволвентно зацепване при $z_1 = z_2 = 5$. Долната граница съответства на равенството $\varepsilon_\alpha = 1$. Областта на реализирания потенциал е всъщност наклонената линия, построена с помощта на уравнение (2). Тази линия ($\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{pw}$) служи като лява граница на областта на съществуване. Дясната граница в областта на съществуване съответства на случаите, при които зъбите на зацепените колела са заострени ($s_a = s_a^* m = 0$). Тя е построена с помощта на традиционната формула за определяне на коефициента на припокриване.

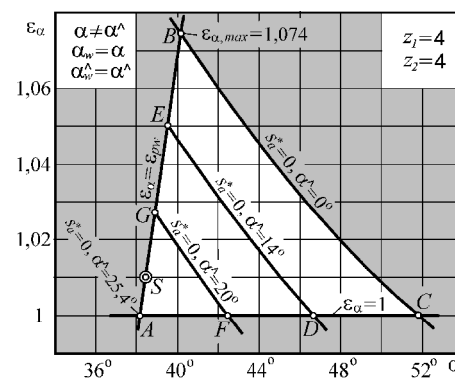
$$\varepsilon_\alpha = z(\tan\alpha_a - \tan\alpha_w)/\pi, \tag{14}$$

в която предварително от равенство (8), при $s_a = 0$, е намерен профилният ъгъл α_a. Пресечната точка B на лявата и дясната граници дефинира точката от областта на съществуване, в която коефициентът на припокриване е максимален. Освен граничните линии, за по-лесно ориентиране при избора на работоспособна зъбна предавка, в полето с допустимите стойности на α_w е построена линията DE, съответстваща на зъбни колела, за които $s_a = s_a^* m = 0{,}08m$. Максималната стойност на s_a се получава в пресечната точка A на линиите $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{pw}$ и $\varepsilon_\alpha = 1$.

По аналогичен начин се построява и областта на съществуване на несиметричното еволвентно зацепване. При брой на зъбите $z_1 = z_2 = 4$ областта на съществуване е показана на фиг. 4. В този случай дясната граница *BC* на областта съответства на заострени зъби, за които $\alpha^\wedge = \alpha_w^\wedge = 0$. Ако $\alpha^\wedge = 14^0$ дясна граница на областта е линията DE, а при $\alpha^\wedge = 20^0$ – линията FG. Следователно с нарастване на $\alpha^\wedge$ областта на съществуване се стеснява и при $\alpha^\wedge > 25{,}4^0$ областта не съществува.



Фиг. 3. Област на съществуване на симетрично зацепване $z_1 = z_2 = 5$



Фиг. 4. Област на съществуване на несиметрично зацепване $z_1 = z_2 = 4$

2.2. Минимален брой симетрични и несиметрични зъби

За да се съпоставят възможностите на еволвентни зъбни предавки със симетрично и несиметрично зацепване по отношение на максималния коефициент на припокриване $\varepsilon_{\alpha,\max}$, е съставена Табл. 1, съответстваща на случаите, при които $z_1 = z_2$. Числените стойности за $\varepsilon_{\alpha,\max}$ и ъгълът на зацепване α_w за всяка предавка са намерени след построяване на областта на нейното съществуване. За целта във всяка област със зададен брой зъби на колелата, аналогично на областите от фиг. 3 и фиг. 4, е намерена пресечната точка В на линията на реализирания потенциал $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{pw}$ с линията на заостряне на зъбите $s_a^* = 0$, където $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha,\max}$. От Табл. 1 се

вижда, че с увеличаването на броя на зъбите логично се увеличава и коефициентът на припокриване, докато ъгълът на зацепване намалява. Освен това от същата таблица се установява, че при симетрично еволвентно зацепване най-малкият брой на зъбите, при които $\varepsilon_\alpha > 1$, е $z_1 = z_2 = 5$. Ако еволвентното зацепване е несиметрично, тогава най-малкият брой на зъбите е $z_1 = z_2 = 4$.

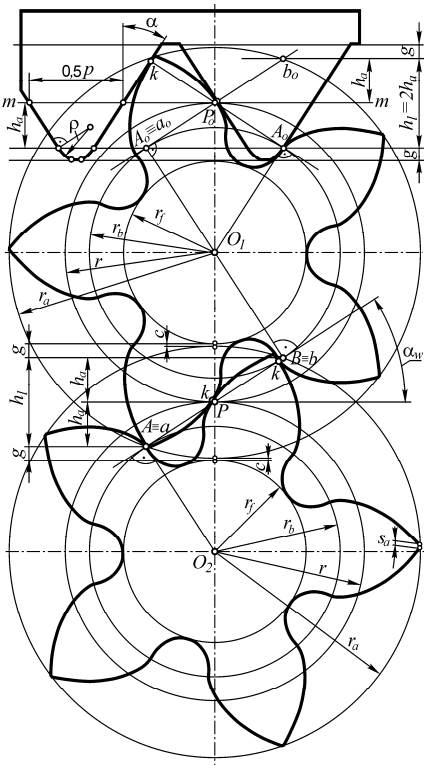
Предавки с малък брой зъби **($z_1 = z_2$)** ***Таблица 1***

z_1/z_2	Симетрично зацепване		Неиметрично зацепване ($\alpha_w^{\wedge} = 0^0$)	
	$\varepsilon_{\alpha,\max}$	α_w	$\varepsilon_{\alpha,\max}$	α_w
1/1	0.57498	61.03101^0	0.86170	69.72589^0
2/2	0.69832	47.64630^0	0.88761	54.35081^0
3/3	0.81900	40.61830^0	0.97467	45.58613^0
4/4	0.93244	36.21669^0	1.07452	40.16189^0
5/5	1.03928	33.14449^0	1.17544	36.44775^0
6/6	1.14056	30.84547^0	1.27435	33.71312^0
7/7	1.23717	29.04081^0	1.37049	31.59461^0
8/8	1.32981	27.57425^0	1.46376	29.89103^0
9/9	1.41903	26.35082^0	1.55429	28.48203^0
10/10	1.50527	25.30921^0	1.64227	27.29076^0
11/11	1.58888	24.40774^0	1.72793	26.26614^0
12/12	1.67014	23.61695^0	1.81144	25.37189^0

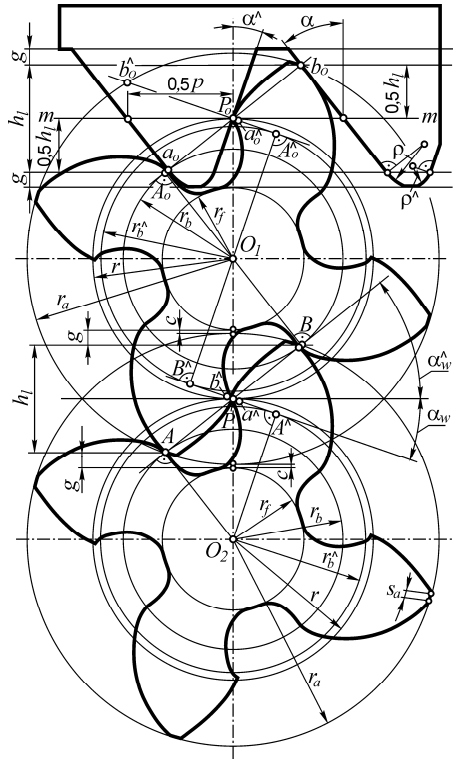
Резултати от изчисленията **($z_1 = z_2$)** ***Таблица 2***

Параметри и дименсии	Означение	Формули	Зъбно зацепване	
			Симетрично	Несиметрично
Брой зъби	z	$z = z_1 = z_2$	5	4
Модул, mm	m	-	10	10
Потенциал на зъбната предавка	ε_{pw}	-	1.033564	1.01
Ъгъл на зацепване за активните профили, deg	α_w	$\alpha_w = \arctan(\pi\varepsilon_{pw}/z)$	33^0	38.42328^0
Ъгъл на зацепване за пасивните профили, deg	$\alpha_w^{\wedge}$	$\alpha_w^{\wedge} < \alpha_w$	-	19^0
Радиус на началната окръжност, mm	r_w	$r_w = mz/2$	25	20
Радиус на основната окр. за активните проф., mm	r_b	$r_b = r_w \cos\alpha_w$	20.9667	15.66882
Радиус на основната окр. за пасивните проф., mm	$r_b^{\wedge}$	$r_b^{\wedge} = r_w \cos\alpha_w^{\wedge}$	-	18.91037
Отсечка на зацепване за активните профили, mm	$\overline{AB}$	$\overline{AB} = mz \sin\alpha_w$	27.2319	24.85865
Ъгъл при върховата окр. за активните проф., deg	α_a	$\alpha_a = \arctan(2\tan\alpha_w)$	52.40616^0	57.77608^0
Радиус на върховата окръжност, mm	r_a	$r_a = r_b/\cos\alpha_a$	34.3684	29.3848
Височина на главата на зъба, mm	h_a	$h_a = 0.5mz\sin^2\alpha_w$	7.4158	7.7244
Височина на захващането, mm	h_l	$h_l = 2h_a$	14.8316	15.4488
Минимална височина на преходната крива, mm	$g_{\min}$	$g_{\min} = r_a - r_w - h_a$	1.9526	1.6604
Радиална хлабина, mm	c	$c = c_1 = c_2$	0.5	0.4
Височина на активния преход за гребена, mm	g	$g = g_{\min} + c$	2.4526	2.0604
Пълна височина на гребена, mm	h	$h = 2(h_a + g)$	19.7367	19.5695
Радиус на вътрешната окръжност, mm	r_f	$r_f = r_w - h_a - g$	15.1316	10.2152
Профилен ъгъл на гребена (активни профили), deg	α	$\alpha = \alpha_w$	33^0	38.42328^0
Профилен ъгъл на гребена (пасивни профили), deg	$\alpha^{\wedge}$	$\alpha^{\wedge} = \alpha_w^{\wedge}$	-	19^0
Дебелина на зъба по началната окръжност, mm	s_w	$s_w = \pi m/2$	15.7080	15.7080
Ъгъл при върховата окр. за пасивните проф., deg	$\alpha_a^{\wedge}$	$\alpha_a^{\wedge} = \arccos(mz\cos\alpha^{\wedge}/2r_a)$	-	49.94345^0
Дебелина на зъба по върховата окръжност, mm	s_a	$s_a = r_a(\pi/z + \mathrm{inv}\alpha + \mathrm{inv}\alpha^{\wedge} - \mathrm{inv}\alpha_a - \mathrm{inv}\alpha_a^{\wedge})$	0.2373	0.7329
Радиус на гребена при активните профили, mm	ρ	-	6.1	6.2
Радиус на гребена при пасивните профили, mm	$\rho^{\wedge}$	-	-	3.1
Височина на пасивния преход за гребена, mm	$g^{\wedge}$	$g^{\wedge} = g$	-	2.0604
Коефициент на припокриване за неработ. профили	$\varepsilon_\alpha^{\wedge}$	Методика разработена от автора	-	0.0596
Коефициент на припокриване за работ. профили	ε_α	$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{pw}$	1.033564	1.01

Върху линията на реализирания потенциал в областите на съществуване на симетричното (фиг. 3) и несиметричното (фиг. 4) зацепване е избрана точката *S*, за която е определена геометрията на зацепените колела. Резултатите от геометричните изчисления, получени по метода на реализирания потенциал, са дадени в Табл. 2. Освен това, тъй като зацепените колела имат еднаква геометрия, числените резултати за пиньона и колелото при симетричното зацепване ($z_1 = z_2 = 5$) са обединени в една колона, а при несиметричното зацепване ($z_1 = z_2 = 4$) – в друга колона. С помощта на получените резултати на фиг. 5 е построена картината на симетричното зацепване, а на фиг. 6 са показани изработените опитни образци. Аналогично с ре-



Фиг.5. Симетрично зацепване $z_1 = z_2 = 5$



Фиг. 7. Несиметрично зацепване $z_1 = z_2 = 4$

Фиг.6. Симетрична предавка $z_1 = z_2 = 5$

Фиг.8. Несиметрична предавка $z_1 = z_2 = 4$

зултатите от последната колона на Табл. 2 е определена геометрията на несиметричното зацепване при $z_1 = z_2 = 4$, показано на фиг. 7 и фиг. 8.

От картините на зацепване между зъбните колела се вижда, че потенциалът на съответните зъбни предавки е реализиран, тъй като контактът между задвижващите еволвентни профили се осъществява по цялата линия на зацепване *AB*. Тъй като инструменталните гребени за двете колела са напълно еднакви, в съответните картини на зацепване е показан само единият инструментален гребен.

ИЗВОДИ

Извършените изследвания, свързани с геометрично проектиране на правозъби еволвентни предавки със симетрични и несиметрични зъби, позволяват да се направят следните изводи:

1. Потенциалът на зъбната предавка е основен качествен показател, с който още преди етапа на проектиране при зададени z_1, z_2 и α_w се оценяват възможностите на предавката по отношение на коефициента на припокриване.

2. Предложеният метод за геометрично проектиране на еволвентни предавки със симетрично и несиметрично зацепване позволява чрез предварително задаване на потенциала на предавката и броя на зъбите ($z = z_1 = z_2$) да се намери геометрията на изходния контур, зъбните колелата и зъбното зацепване с което се реализира зададеният потенциал.

3. Методът на реализирания потенциал е подходящ за геометрично проектиране на еволвентни предавки, при които правозъбите колела имат малък брой зъби.

4. Най-малкият равен брой зъби при симетричното еволвентно зацепване на правозъби колела е $z_1 = z_2 = 5$.

5. Най-малкият равен брой зъби при несиметричното еволвентно зацепване на правозъби колела е $z_1 = z_2 = 4$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Болтовскиий И. и др., Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач. М., Машиностроение, 1986, 477с.

[2] ISO 21771, Gears. Cylindrical involute gears and gear pairs – Concepts and geometry, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2007.

[3] ГОСТ 16532-70. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления - Расчет геометрии, М., Русия, 1970.

[4] Вулгаков Э., Теория эвольвентных зубчатых передач. М., Машиностроение, 1995, 320 с.

[5] A.L. Kapelevich, R.E. Kleiss, Direct gear design for spur and helical gears, Gear Technology, 9/10 (2002) p.29–35.

[6] Котельников В., Наименьшие числа прямых внешних зубьев, нарезанных нестандартным инструментом реечного типа. Изв. вузов. Машиностроение, №6, 1973, с.52-56

[7] Алипиев О., Геометричен синтез на симетрично и несиметрично еволвентно зацепване по метода на реализирания потенциал. Международна. конференция ОМК'09, Русе, 2009, с.43-50. http://gmd-09.conf-bg.com/uploads/PROCEEDINGS-PDF/p9-d-4-OK-Alipiev-R.pdf

За контакти:

Доц. д-р Огнян Алипиев, Катедра "Теория на механизмите и машините и подемно-транспортна техника и технологии", Русенски университет "Ангел Кънчев", тел: 082-888 593, e-mail: oalipiev@uni-ruse.bg

Докладът е рецензиран