

## Изследване на поведението на многослоен равнинен хибриден краен елемент за моделиране на ламинатни стъкла

Димитър Велчев, Марко Тодоров

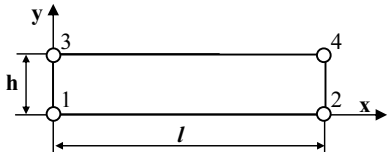
**Abstract:** Validation of multilayer plane hybrid finite element for modeling of laminated glass. A new multilayer hybrid finite element is investigated in order to test the adequacy of its behavior. Numerical tests are done and the results from them are compared to the results from exact solutions and from finite element analyses by commercial software with a high degree of discretization. It is shown that the investigated element satisfactory represents the stresses and strains of laminated glasses with a significant low degree of discretization.

**Key words:** hybrid finite element, laminated glass.

### ВЪВЕДЕНИЕ

Моделирането на ламинатни стъкла (ЛС) по метода на крайните елементи (МКЕ) е силно затруднено поради високата податливост и малката, сравнено с дебелината на стъклените плочи, дебелина на междинния ПВБ слой [1]. Това води от една страна до необходимостта от висока степен на дискретизация при използване на пространствени крайни елементи (КЕ), а от друга до неточни резултати при използване на многослойни черупкови КЕ, за формулирането на които е възприета хипотезата за запазване на „правите нормали“, която е невалидна при ЛС [2,3].

За преодоляване на тези проблеми е създаден деформационен плочов КЕ за моделиране на трислойно (триплексно) ЛС [4], който дава добри резултати при сравнително ниска степен на дискретизация на стъклената плоча. Задачата е продължена със създаване на многослоен равнинен хибриден КЕ (МРХКЕ) [5], развитието на който до пространствен би довело до по-точен анализ на напрегнатото и деформираното състояние на ЛС с произволен брой слоеве при значително по-малък брой на използваните КЕ.



Фиг. 1. Един слой от МРХКЕ

Разглежданият в настоящата работа многослоен равнинен хибриден КЕ е формулиран, като първоначално е разгледан един слой (фиг.1) с приети функции на напреженията, които са комбинация от функциите :

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

$$f(y) = b_0 + b_1 \cdot y + b_2 \cdot y^2 + b_3 \cdot y^3 + b_4 \cdot y^4$$

Тези функции трябва да удовлетворяват условията за равновесие :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

, които са винаги изпълнени ако :

$$\sigma_x = \varphi(x) \cdot f''(y)$$

$$\sigma_y = \varphi''(x) \cdot f(y)$$

$$\tau_{xy} = -\varphi'(x) \cdot f'(y)$$

За да се моделира разпределението на напреженията в един слой е необходимо по долната и горната повърхнина на елемента тези функции да удовлетворяват следните гранични условия:

$$\begin{aligned} \sigma_y(0) = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_y(d) = 0 \\ \tau_{xy}(0) = 0 \quad \text{и} \quad \tau_{xy}(d) = 0 \end{aligned} \quad , \text{ където } d \text{ е дебелината на слоя.}$$

Натоварването на един слой се представя, като равномерно разпределени напречни и надлъжни товари по долната (b) и горната (t) повърхнина на КЕ, т.е. :

$$\begin{aligned} \sigma_y(0) = -q_y^b \quad \text{и} \quad \tau_{xy}(0) = -q_x^b \\ \sigma_y(d) = q_y^t \quad \text{и} \quad \tau_{xy}(d) = q_x^t \end{aligned} \quad , \text{ където } q_y^b \text{ и } q_x^t \text{ са напречните товари,}$$

съответно по горната и долната повърхнини, а  $q_x^b$  и  $q_x^t$  - надлъжните.

На базата на горепосочените условия в [2] са изведени функциите на напреженията за един слой, като са приети безразмерни координати  $\xi = \frac{x}{l}$  и  $\eta = \frac{y}{h}$ , а

$$e = \frac{l}{h} :$$

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$
$\sigma_x$	1	$\eta$	$\eta^2$	$e\xi(1-2\eta)$	$e\xi\eta(2-3\eta)$	$e^2\xi^2(1-6\eta+6\eta^2)$	$e^2\xi^3(1-6\eta+6\eta^2)$	$e^2\xi^4(1-6\eta+6\eta^2)$
$\sigma_y$	0	0	0	0	0	$\eta^2(1-\eta)^2$	$3\xi\eta^2(1-\eta)^2$	$6\xi^2\eta^2(1-\eta)^2$
$\tau_{xy}$	0	0	0	$-\eta(1-\eta)$	$-\eta^2(1-\eta)$	$-2e\xi\eta(1-3\eta+2\eta^2)$	$-3e\xi^2\eta(1-3\eta+2\eta^2)$	$-4e\xi^3\eta(1-3\eta+2\eta^2)$

и за натоварването :

	$q_x^b$	$q_y^b$	$q_x^t$	$q_y^t$
$\sigma_x$	$e\xi$	$-3e^2\xi^2(1-2\eta)$	$-e\xi$	$3e^2\xi^2(1-2\eta)$
$\sigma_y$	0	$1-\eta^2(3-2\eta)$	0	$\eta^2(3-2\eta)$
$\tau_{xy}$	$(1-\eta)$	$6e\xi\eta(1-\eta)$	$\eta$	$-6e\xi\eta(1-\eta)$

Преместванията по лявата и дясната граница на елемента са апроксимирани с класическите линейни функции :

	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$	$u_4$	$v_4$
u	$1-\eta$	0	0	0	$\eta$	0	0	0
v	0	$1-\eta$	0	0	0	$\eta$	0	0

	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$	$u_4$	$v_4$
u	0	0	$1-\eta$	0	0	0	$\eta$	0
v	0	0	0	$1-\eta$	0	0	0	$\eta$

При така формулираните премествания и напрежения е изведена коравинната матрица за един слой.

Коравинната матрица за многослоен елемент се получава като комбинация от коравинните матрици за всеки слой, като се удовлетворяват условията :

$$\begin{aligned} (\sigma_y^t)_i = (\sigma_y^b)_{i+1} \\ (\tau_{xy}^t)_i = (\tau_{xy}^b)_{i+1} \end{aligned} \quad , \text{ където } (\sigma_y^t)_i \text{ и } (\tau_{xy}^t)_i \text{ са напреженията по горната повърхнина на}$$

$i$ -тия слой, а  $(\sigma_y^b)_{i+1}$  и  $(\tau_{xy}^b)_{i+1}$  на долната повърхнина  $i+1$ -вия слой.

Целта на настоящата работа е изследване на поведението на формулирания равнинен хибриден КЕ, като са извършени редица числени експерименти, резултатите от които са съпоставени с резултатите получени от решения по методите на „Съпротивление на материалите“ (СМ), както и с решения получени по МКЕ, извършени с използване на конвенционални КЕ при висока степен на дискретизация на модела.

### 1. Изследване на поведението на еднослойна плоча.

Изследвано е цилиндричното огъване на еднослойна стъклена плоча с размери 1x1m и дебелина 8 mm, като е разгледано едно сечение в условията на равнинно деформирано състояние (РДС). Резултатите са обобщени в табл. 1.

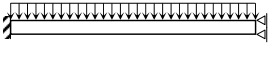

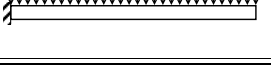
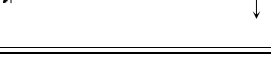
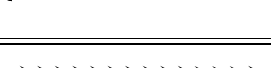
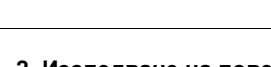
Решенията от СМ са за гредя с отчитане на влиянието на напречните деформации. Модулът на еластичност на стъклото е  $E_{glass} = 7.10^{10}$  Pa, а коефициентът на Поасон е  $\mu_{glass} = 0,23$ . При пресмятанията е използван приведен модул на еластичност, както се изисква при РДС :

$$E_c = \frac{E_{glass}}{1 - \mu_{glass}^2} = \frac{7.10^{10}}{1 - 0,23^2} = 7,391.10^{10} \text{ Pa}$$

При пресмятанията по МКЕ с конвенционални КЕ е направен анализ на сходимостта и е приет модел съставен от минималния брой елементи, осигуряващ необходимата точност.

Резултати от изследването на еднослойна плоча

Табл. 1

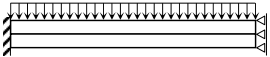

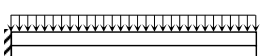
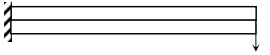
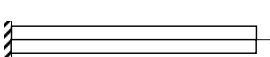
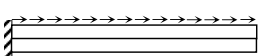
Схема	Натоварване	Вид решение	max(w,u) mm	max(σ <sub>x</sub> ), MPa
	1 kN/m <sup>2</sup>	Решение от СМ	-0,872	7,81
		50 равнинни КЕ	-0,872	7,58
		3 РХКЕ	-0,826	7,81
	1 kN/m <sup>2</sup>	Решение от СМ	-4,360	11,70
		50 равнинни КЕ	-4,360	11,52
		3 РХКЕ	-4,130	11,71
	1 kN/m <sup>2</sup>	Решение от СМ	-41,850	46,88
		50 равнинни КЕ	-39,640	45,30
		3 РХКЕ	-39,640	46,69
	1 kN	Решение от СМ	-111,600	93,75
		50 равнинни КЕ	-110,450	91,43
		3 РХКЕ	-105,710	93,75
	100 kN	Решение от СМ	0,169	12,50
		50 равнинни КЕ	0,169	12,50
		3 РХКЕ	0,169	12,54
	100 kN/m <sup>2</sup>	Решение от СМ	0,0890	12,50
		50 равнинни КЕ	0,0843	12,50
		3 РХКЕ	0,0855	12,50

### 2. Изследване на поведението на двуслойна плоча

Поведението на двуслоен елемент и силовото взаимодействие между отделните слоеве е изследвано, като горепосочената плоча е моделирана като две плочи с дебелина 4 mm кораво свързани помежду си. При така формулирана задача, резултатите получени от двуслойния елемент трябва да са близки до тези, получени от предното изследване. Резултатите са показани в табл. 2, като е направена съпоставка с решението по СМ и с използвания в предходното изследване брой РХКЕ.

Резултати от изследването на двуслойна плоча

Табл. 2

Схема	Натоварване	Вид решение	max(w,u) mm	max(σ <sub>x</sub> ), MPa
	1 kN/m <sup>2</sup>	Решение от СМ	-0,872	7,81
		3 РХКЕ	-0,827	7,98
		10 РХКЕ	-0,826	8,00
	1 kN/m <sup>2</sup>	Решение от СМ	-4,360	11,70
		3 РХКЕ	-4,194	16,41
		10 РХКЕ	-4,131	11,72
	1 kN/m <sup>2</sup>	Решение от СМ	-41,850	46,88
		3 РХКЕ	-39,647	47,51
		10 РХКЕ	-39,642	47,20
	1 kN	Решение от СМ	-111,600	93,75
		3 РХКЕ	-106,660	95,01
		10 РХКЕ	-105,730	94,26
	100 kN	Решение от СМ	0,169	12,50
		3 РХКЕ	0,169	12,51
		10 РХКЕ	0,169	12,66
	100 kN/m <sup>2</sup>	Решение от СМ	0,0890	12,50
		3 РХКЕ	0,0853	12,37
		10 РХКЕ	0,0846	12,67

### 3. Изследване поведението на трислойна плоча


Изследвана е плоча от ламинатно стъкло, състояща се от два стъклени слоя с дебелина 4 mm и междинен PVB слой с дебелина 0,8 mm. Модулът на еластичност на PVB е  $E_{PVB} = 2,3 \cdot 10^6$  Pa, а коефициентът на Поасон е  $\mu_{PVB} = 0,45$ . При пресмятанята е използван приведенения модул на еластичност :

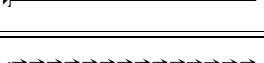
$$E_p = \frac{E_{PVB}}{1 - \mu_{PVB}^2} = \frac{2,3 \cdot 10^6}{1 - 0,45^2} = 2,884 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

При това изследване, както и в т.2 е направен анализ на сходимостта и е приет модел, съставен от минималния брой конвенционални КЕ, осигуряващ необходимата точност.

Резултати от изследването на трислойна плоча

Табл. 3

Схема	Натоварване	Вид решение	max(w,u) mm	max(σ <sub>x</sub> ), MPa
	1 kN/m <sup>2</sup>	3x50 равнинни КЕ	-2,045	12,21
		3 РХКЕ	-2,103	12,57
		10 РХКЕ	-2,051	12,69
	1 kN/m <sup>2</sup>	3x100 равнинни КЕ	-5,987	12,50
		3 РХКЕ	-6,270	13,66
		10 РХКЕ	-5,997	12,47
	1 kN/m <sup>2</sup>	3x100 равнинни КЕ	-40,191	52,80

		3 РХКЕ	-40,603	52,82
		10 РХКЕ	-40,259	54,20
	1 kN	3x100 равнинни КЕ	-103,507	95,60
		3 РХКЕ	-107,380	98,81
		10 РХКЕ	-103,680	96,18
	100 kN	3x100 равнинни КЕ	0,169	11,80
		10 РХКЕ	0,171	12,55
		20 РХКЕ	0,171	12,55
	100 kN/m <sup>2</sup>	3x50 равнинни КЕ	0,084	11,87
		10 РХКЕ	0,085	12,68
		20 РХКЕ	0,084	12,80

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

От горепосочените данни се налагат следните изводи :

- резултатите получени при изследването на един слой с 5 РХКЕ са близки (не са много близки, може би трябва повече КЕ) до тези получени по методите на СМ и до тези получени от анализ по МКЕ с 50 равнинни конвенционални КЕ;
- от резултатите при моделирането на монолитна стъклена плоча, като двуслоен РХКЕ се вижда, че диаграмите на напреженията и деформациите на границата на двата слоя са коректни;
- при изследването на трислойно ламинатно стъкло с 10-20 РХКЕ се получават резултати сходни с тези получени с 300 конвенционални КЕ. При използването на по-малък брой РХКЕ се получават по-големи напрежения, което е в полза на сигурността на конструкцията.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] Duser, A.V., Jagota, A., Bennison, S.J., 1999. Analysis of glass/polyvinyl butyral laminates subjected to uniform pressure, Journal of Engineering Mechanics 125, 435–442.

[2] Ivanov I., Velchev D., Todorov M., Modeling Of Laminated Glasses For Finite Element Analysis, Challenges in Higher Education & Research, eds. N. Kolev, L. Dimitrov, Heron Press, Sofia, 2, 2004, 260-263.

[3] Ivanov I. V., Analysis, modeling, and optimization of laminated glasses as plane beam, International Journal of Solids and Structures, 43 (2006), 6887–6907, (ISSN: 0020-7683).

[4] Velchev D., Ivanov I., A Plate Finite Element for Triplex Laminated Glass, 11th National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Borovets, Bulgaria, 2009.

[5] Д. Велчев, М. Тодоров, Многослоен равнинен хибриден краен елемент за моделиране на ламинатни стъкла, под печат

### За контакти:

ст. ас. Димитър Велчев, Катедра “Техническа механика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, Тел.: 082-888 224, e-mail: [dvelchev@uni-ruse.bg](mailto:dvelchev@uni-ruse.bg)  
доц. д-р Марко Тодоров, Катедра “Техническа механика”, Русенски университет “Ангел Кънчев”, тел.: 082-888 224, e-mail: [mtodorov@uni-ruse.bg](mailto:mtodorov@uni-ruse.bg)

Докладът е рецензиран