Върху някои свойства на функцията *sin(n arctg(x))*

Ели Калчева, Николай Димитров

About Some Properties of sin(n arctg(x)): *In the paper some properties of the functions sin(n arctg(x)) and cos(n arctg(x)) are described.*

Key words: *Differential equations, orthogonal functions.*

ВЪВЕДЕНИЕ И ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

В статията се разглеждат някои по-важни свойства на функциите $\sin(n\,arctg(x))$ и $\cos(n\,arctg(x))$, където n е естествено число и $x>0$. Идеята за това беше породена от изследване за съществуването на положителни решения на диференчни уравнения от четвърти ред с периодични гранични условия. Такъв въпрос обаче възниква и при по-просто уравнение от вида $\Delta^2(u(k))+x^2u(k)=0$. Доказани са следните твърдения:

Твърдение 1. В сила са равенствата:

$$\sin(n\,arctg(x))=\frac{i[(1-ix)^n-(1+ix)^n]}{2(1+x^2)^{n/2}} \text{ и } \cos(n\,arctg(x))=\frac{(1-ix)^n+(1+ix)^n}{2(1+x^2)^{n/2}}.$$

Твърдение 2. Корените на уравнението $\sin(n\,arctg(x))=0$ са $x_k=-tg\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, където $k=0,1,...,n-1$ и $k\neq\frac{n}{2}$.

Твърдение 3. Нека p и q са естествени числа, $p\neq q$. Функциите $\frac{\sin(p\,arctg(x))}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\frac{\sin(q\,arctg(x))}{\sqrt{1+x^2}}$ са ортогонални в пространството $L^2(-\infty,\infty)$ тогава и само тогава, когато p и q имат една и съща четност.

Твърдение 4. Всички лица на фигури, заградени от графиката на функцията $\frac{\sin(n\,arctg(x))}{1+x^2}$ и остта Ox в интервалите (x_k,x_{k+1}), $k=0,1,...,n-2$ са равни.

ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ОСНОВНИТЕ РЕЗУЛТАТИ

Доказателство на Твърдение 1.

Полагаме $y=arctg(x)$. Чрез метода на математическата индукция лесно може да се покаже, че $\sin(ny)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n/2}}$ и $\cos(ny)=\frac{Q_n(x)}{(1+x^2)^{n/2}}$, където $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ са полиноми. От формулите: $\sin((n+1)y)=\sin(ny)\cos(y)+\cos(ny)\sin(y)$ и $\cos((n+1)y)=\cos(ny)\cos(y)-\sin(ny)\sin(y)$, следва системата диференчни уравнения: $\left|\begin{array}{l}P_{n+1}=P_n+xQ_n\\ Q_{n+1}=Q_n-xP_n\end{array}\right.$. Последната се свежда до решаването на диференчните уравнения $P_{n+2}-2P_{n+1}+(1+x^2)P_n=0$ и $Q_{n+2}-2Q_{n+1}+(1+x^2)Q_n=0$ с начални условия

съответно $P_0 = 0, P_1 = x$ и $Q_0 = 1, Q_1 = 1$. Оттук следва, че $\sin(ny) = \dfrac{i[(1-ix)^n - (1+ix)^n]}{2(1+x^2)^{n/2}}$ и $\cos(ny) = \dfrac{(1-ix)^n + (1+ix)^n}{2(1+x^2)^{n/2}}$.

Би могло да се разпишат по-подробно полиномите $P_n(x) = \dfrac{i}{2}[(1-ix)^n - (1+ix)^n]$, тъй като те имат само реални коефициенти. Има четири основни случая в зависимост остатъка на n при деление на 4.

Ако $n = 4t,\ t = 1,2,3,...$ то:

$$P_n(x) = \frac{i}{2}\left[1 - \binom{n}{1}ix - \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}ix^{n-1} + x^n - 1 - \binom{n}{1}ix + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}ix^{n-1} - x^n\right] =$$

$$= \binom{n}{1}x - \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{5}x^5 - ... - nx^{n-1} = x\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3}x^2 + \binom{n}{5}x^4 - ... - nx^{n-2}\right]$$

Аналогично в другите случаи получаваме:

$$P_n(x) = x\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3}x^2 + ... + x^{n-1}\right],\ \text{ако}\ n = 4t+1,\ t = 0,1,2,...$$

$$P_n(x) = x\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3}x^2 + ... + nx^{n-2}\right],\ \text{ако}\ n = 4t+2,\ t = 0,1,2,...$$

$$P_n(x) = x\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3}x^2 + ... - x^{n-1}\right],\ \text{ако}\ n = 4t+3,\ t = 0,1,2,...$$

Можем да обобщим горните резултати с формулата:

$$P_n(x) = \begin{cases} x\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3}x^2 + ... + (-1)^{\frac{n}{2}+1} nx^{n-2}\right], & \textit{при } n - \textit{четно} \\ x\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3}x^2 + ... + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-1}\right], & \textit{при } n - \textit{нечетно} \end{cases}$$

Доказателство на Твърдение 2.

От горното твърдение $\sin(n\,arctg(x)) = 0$, тогава и само тогава, когато $\left(\dfrac{1-ix}{1+ix}\right)^n = 1$. Последното може да бъде написано и във вида:

$\dfrac{1-ix}{1+ix} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, където $k = 0,1,...,n-1$ и $k \neq \dfrac{n}{2}$. Оттук :

$1 - ix = (1+ix)e^{i\frac{2\pi k}{n}} = e^{i\frac{2\pi k}{n}} + ie^{i\frac{2\pi k}{n}}x$. Тогава $x_k = \dfrac{1 - e^{i\frac{2\pi k}{n}}}{i\left(1 + e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right)}$, откъдето:

$$x_k = \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}{i\left(1+\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right) - \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} = \frac{\left(1-i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right)^2 - \cos^2\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}{2i\left(1+\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right)} = \frac{-i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}{2i\cos^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)} = -tg\left(\frac{\pi k}{n}\right).$$

Забележка: С аналогични разсъждения може да бъде доказано, че за корените x_k на уравнението $\cos(n\,arctg(x)) = 0$ е изпълнено, че $x_k = -tg\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$, където $k = 1,3,...,2n-1$.

Доказателство на Твърдение 3.

За да докажем това твърдение е нужно да пресметнем стойността на $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(p\,arctg(x))\sin(q\,arctg(x))}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}}dx.$ След смяна на променливите $y = arctg(x)$ получаваме, че: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(py)\sin(qy)dy.$ Оттук лесно се вижда, че са в сила следните равенства:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(p-q)y - \cos(p+q)y\right)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-q}\sin(p-q)y\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{p+q}\sin(p+q)y\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

След заместване и пресмятане намираме, че: $I = \begin{cases} 0, & p \text{ и } q \text{ са с еднаква четност} \\ \neq 0, & p \text{ и } q \text{ са с различна четност} \end{cases}$

По-точно, ако p и q са с различна четност, тогава:

$$I = -2\frac{p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) - q\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{q\pi}{2}\right)}{p^2-q^2}.$$ При $p = q$ имаме $I = \frac{\pi}{2}.$

Доказателство на Твърдение 4.

Нека разгледаме лицето, намиращо се между точките $x_k = -tg\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ и $x_{k+1} = -tg\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$. Означаваме го с S. Тогава имаме:

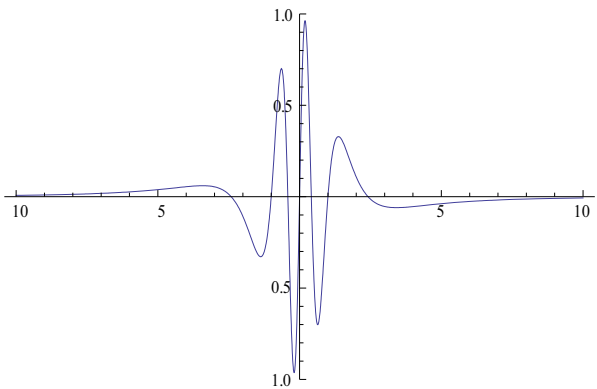
$$S = \left|\int_{-tg\left(\frac{k\pi}{n}\right)}^{-tg\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)} \frac{\sin(n\,arctg(x))}{1+x^2}dx\right|.$$ След като направим смяна на променливите $y = arctg(x)$, получаваме последователно:

$$S = \left| \int_{-\left(\frac{k\pi}{n}\right)}^{-\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)} \sin(ny)dy \right| = \left| -\frac{1}{n}\left(\cos(k+1)\pi - \cos k\pi\right) \right| = \frac{1}{n}\left|(-1)^{k+1} - (-1)^k\right| = \frac{2}{n}.$$

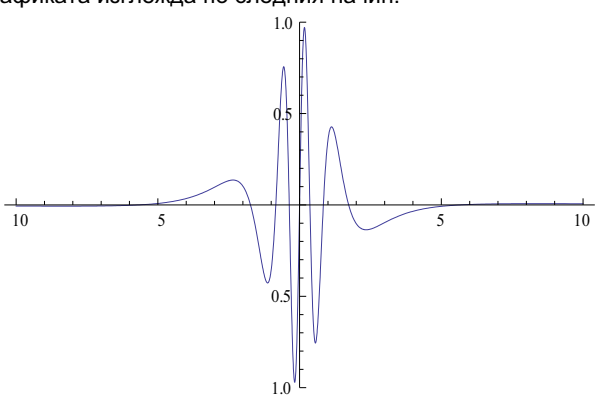
Забележка: С аналогични разсъждения може да се докаже, че когато n е четно лицата на крайните фигури също са равни на $\frac{2}{n}$, а когато е нечетно – на $\frac{1}{n}$.

За по-добра илюстрация прилагаме по една графика на фукнцията, начертана постредством използването на Mathematica, във всеки един от четирите случая в зависимост от остатъка на n при деление на 4.

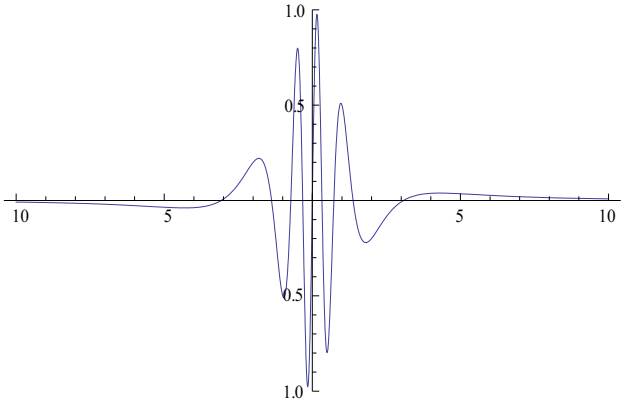
При $n = 8$, графиката има вида:



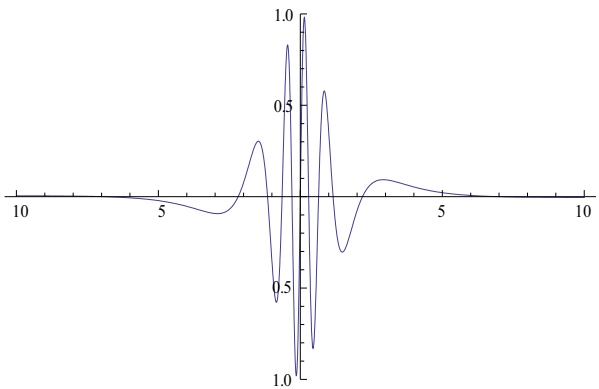
При $n = 9$, графиката изглежда по следния начин:



При $n = 10,$ графиката има вида:



При $n = 11,$ графиката изглежда по следния начин:



Авторите изказват своята благодарност на проф. дмн. Степан Терзиян за полезните му идеи и препоръки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Боянов. Лекции по Числени методи, София, 1998.
[2] W. Kelly, A. Peterson, Difference Equations. An Introduction with Applications, Academic Press, New York, 1990.

За контакти:
гл. ас. Ели Калчева, Русенски университет “Ангел Кънчев”, Катедра “Математичен анализ”, e-mail: ekalcheva@ami.uni-ruse.bg
Николай Димитров, Русенски университет “Ангел Кънчев”, Специалност “Информатика и информационни технологии”, e-mail: acm189@abv.bg

Докладът е рецензиран.